RAPPORT SUR L'ÉPREUVE DE MÉCANIQUE GÉNÉRALE

Présentation du sujet

L'épreuve de mécanique portait cette année sur l'étude de certaines propriétés des mouvements périodiques des systèmes hamiltoniens.

Dans la première partie, on établissait une propriété variationnelle des mouvements périodiques, de période fixée T. Ces mouvements sont, dans l'espace A des applications différentiables γ de $[0,T]$ dans l'espace des phases P prenant, ainsi que toutes leurs dérivées, des valeurs égales aux deux extrémités de cet intervalle, les extrémales de la fonctionnelle

$$I(\gamma) = \int_0^T \left(\sum_{i=1}^n p_i(t)\frac{dq^i(t)}{dt} - H \circ \gamma(t)\right) dt\,.$$

Cette propriété, variante du principe de Hamilton, figure par exemple, sous une forme voisine, dans le livre classique d'Elie Cartan "Leçons sur les invariants intégraux" (Hermann, Paris, 1922); elle a été utilisée notamment par I. Ekeland (*J. Diff. Eq.* **34**, 1979, 523–534). La première question, très facile, demandait de montrer que la fonctionnelle I était liée par une relation très simple à une autre fonctionnelle J; cette relation permettait de prouver que sur l'espace A, les fonctionnelles I et J admettaient les mêmes extrémales. Dans la seconde question, on devait prouver que les extrémales de I (ou de J) sont les mouvements périodiques de période T du système hamiltonien considéré. Dans la troisième, il était demandé d'appliquer cette propriété à la recherche des mouvements périodiques de l'oscillateur harmonique. Cet exemple ne servait qu'à illustrer la propriété dans un cas très simple, trop simple même, puisque tous les mouvements de ce système sont périodiques et de même période. En fait, on demandait d'exprimer que le mouvement considéré réalisait un extremum de la fonctionnelle I non pas dans l'espace fonctionnel A entier, mais dans un sous-espace de dimension finie: cela suffisait à déterminer tous les paramètres dont pouvait dépendre le mouvement périodique recherché. Bien entendu, il fallait ensuite vérifier qu'on avait bien obtenu ainsi une solution des équations de Hamilton, ce qui faisait l'objet de la dernière question de cette partie.

Dans la seconde partie, la même méthode devait être appliquée à la recherche des mouvements stationnaires du problème plan des trois corps. On demandait de prouver que les seules configurations stationnaires possibles du système sont celles (connues depuis Lagrange) où les trois corps sont soit alignés, soit disposés aux sommets d'un triangle équilatéral. On demandait, dans chaque cas, de déterminer complètement la configuration, ainsi que la période du mouvement. Enfin, on devait vérifier (comme dans l'exemple simple de la première partie) que les mouvements ainsi déterminés vérifiaient effectivement les équations de Hamilton.

Dans la troisième partie, on demandait d'établir une propriété remarquable des systèmes hamiltoniens qui possèdent une famille de mouvements périodiques dépendant différentiablement d'un paramètre: si les mouvements de cette famille sont tous de même énergie, la fonctionnelle $K = I + HT$ prend la même valeur, pour tous les mouvements de la famille. On devait ensuite en déduire une seconde propriété remarquable: pour un système hamiltonien dont tous les mouvements sont périodiques, la période est (sous certaines hypothèses générales de connexité et de régularité) fonction seulement de l'énergie. Ces propriétés figurent dans une publication de W. B. Gordon (*J. Math. Mech.* **19**, 1969–70, 111–114), ainsi que dans une publication de Frankel (*Ann. of Math.* **70**, 1959, 1–8); mais elles étaient probablement connues antérieurement. Les questions 1 à 3 amenaient les candidats à établir la première, la question 4 la seconde. Les deux dernières questions (5 et 6) invitaient les candidats à vérifier ces propriétés sur deux exemples: l'oscillateur harmonique, puis le système de Kepler.

Commentaire

Le calcul des variations ne figurant pas explicitement au programme, pas plus que le principe de Hamilton, on a dû, dans une partie préliminaire de l'énoncé, indiquer un certain nombre de résultats (utiles pour la résolution du problème) que les candidats pouvaient utiliser, sans avoir à les démontrer.

Première partie. Tous les candidats ont essayé de résoudre la première partie. Tous ont correctement répondu à la première question (très facile).

La première partie de la seconde question était tout aussi facile: on attendait des candidats qu'ils disent qu'une fonction différentiable périodique, de période T, détermine, par restriction à l'intervalle $[0, T]$, une fonction différentiable définie sur $[0, T]$ prenant, ainsi que toutes ses dérivées, des valeurs égales aux deux extrémités de cet intervalle; et que réciproquement, une fonction différentiable définie sur $[0, T]$ prenant, ainsi que toutes ses dérivées, des valeurs égales aux deux extrémités de cet intervalle, se prolonge par périodicité en une fonction différentiable (en tout point), périodique de période T. Or on relève un bon nombre de réponses fantaisistes, certains candidats cherchant par exemple à prouver la périodicité par un développement en série de Taylor! La seconde partie de cette question (où il suffisait d'appliquer les indications données dans les préliminaires) a été traitée tout à fait correctement par une quinzaine de candidats, et de manière en partie correcte par plus de la moitié des candidats.

La question 3 a), simple exercice de calcul, a été correctement traitée par la majorité des candidats. Mais la question 3 b) a été souvent mal interprétée: alors qu'on souhaitait voir utiliser le résultat de la question 2, une trentaine de candidats ont répondu en résolvant les équations de Hamilton, ce qui bien entendu conduisait au résultat correct, mais rendait sans objet la question 3 c). La notation a été adaptée de manière à ne pas pénaliser ces candidats, dans la mesure où leurs résultats, même obtenus par une méthode autre que celle suggérée dans l'énoncé, étaient corrects.

Deuxième partie. Elle a été abordée par la majorité des candidats.

La question 1 a), évidente, a été presque toujours traitée correctement. Par contre, environ 40 candidats (sur 93) ont fait une erreur stupide dans la question 1 b): pour exprimer le produit scalaire, dans le plan $\mathbf{R}^2$, identifié à $\mathbf{C}$, de deux vecteurs (x_1, y_1) et (x_2, y_2), identifiés aux complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, ils ont fait le produit de z_1 et de z_2, au lieu de prendre la partie réelle du produit de z_1 et du complexe conjugué de z_2.

Cette erreur avait malheureusement des conséquences funestes sur les questions suivantes 2 et 3.

Par ailleurs, l'énoncé de la question 2 comportait une petite erreur typographique: dans la formule (4), il était écrit $P_k(t)$ au lieu de P_k, ce qui pouvait laisser penser que P_k était une fonction de t, alors qu'il était dit, à la ligne immédiatement au dessous, que P_k était une constante. Pour la plupart, les candidats ont considéré P_k comme une constante, ce qui était effectivement l'interprétation correcte, sans rien signaler. Trois ou quatre ont signalé l'erreur et indiqué qu'ils prenaient P_k constante. Un a déclaré que cela lui avait fait perdre du temps. Cette erreur typographique semble cependant n'avoir dans aucun cas causé de variation importante de la valeur d'une copie.

Comme la question 3 b) de la première partie, la question 3 a été traitée, par certains candidats, par résolution des équations de Hamilton ou par le principe fondamental, ce qui n'était pas la méthode suggérée par l'énoncé. Il en a été parfois de même de la question 4. La notation a été faite de manière telle que les candidats ayant obtenu le résultat correct ne soient pas pénalisés, quelle que soit la méthode employée.

Les questions 4, 5, 6 et 7 de la seconde partie n'ont été abordées que par moins du tiers candidats.

Troisième partie. Elle a été abordée par une vingtaine de candidats. Sept ou huit seulement en ont traité correctement une partie notable.

La première question se résolvait par application de la formule de Stokes dans un cas très élémentaire: transformation d'une intégrale sur un contour fermé (constitué par deux segments de droite parallèles à l'axe des ordonnées, et par deux arcs de courbe qui étaient les graphes de deux fonctions) en intégrale double dans la partie du plan dont ce contour formait la frontière. Alors que l'énoncé indiquait la méthode à suivre, cette question n'a été abordée que par cinq ou six candidats, et traitée de manière vraiment correcte par aucun!

Les questions 2, 3, 4, faciles, ont permis à quatre ou cinq candidats de gagner quelques points.

Un seul candidat a traité correctement la question 5, et abordé la question 6, sans l'achever.

Répartition des notes

Note	Nombre de copies	Note	Nombre de copies	Note	Nombre de copies
0 à 4	12	5 à 9	20	10 à 14	32
15 à 19	13	20 à 24	9	25 à 29	4
30 à 34	0	35 à 39	2	40	1

Corrigé

Première partie.

1. On a:

$$\begin{aligned}
I(\gamma) - J(\gamma) &= \frac{1}{2}\int_a^b \sum_{i=1}^{n} \left(p_i(t)\frac{dq^i(t)}{dt} - q^i(t)\frac{dp_i(t)}{dt}\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_a^b \frac{d}{dt}\left(p_i(t)q^i(t)\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(p_i(b)q^i(b) - p_i(a)q^i(a)\right).
\end{aligned}$$

2. L'application restriction à l'intervalle $[0, T]$, de l'espace des applications différentiables de $\mathbf{R}$ dans P périodiques et de période T, est injective, et a son image contenue dans A. En utilisant la définition de A, on vérifie que l'image de cette application est A entier, puisqu'un élément de A se prolonge, par périodicité, en une application de $\mathbf{R}$ dans P, périodique de période T, différentiable en tout point de $\mathbf{R}$.

Soit $\gamma : \mathbf{R} \to P$ un élément de A. On identifiera γ à une application différentiable, périodique de période T, de $\mathbf{R}$ dans P. En raison de la périodicité, on a

$$I(\gamma) = J(\gamma).$$

Les fonctionnelles I et J, étant égales sur A, ont sur cet espace les mêmes extrémales.

Soit γ_s $(s \in J)$ une famille à un paramètre d'éléments de A, vérifiant $\gamma_{s_0} = \gamma$. On applique la formule indiquée au point 5 des préliminaires, en posant

$$\mathcal{L}(q, p, \dot{q}, \dot{p}) = \sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}^i - H(q, p),$$

et en prenant, pour tout $s \in J$, $a_s = 0$, $b_s = T$. En raison de la périodicité, les termes tout intégrés au second membre de la formule donnant $\frac{d}{ds}I(\gamma_s)$ se retranchent deux à deux, et il reste

$$\frac{d}{ds}I(\gamma_s) = \int_0^T \sum_{i=1}^n \left(\left(-\frac{\partial H}{\partial q^i} - \dot{p}_i\right)\frac{\partial q^i(s,t)}{\partial s} + \left(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\frac{\partial p_i(s,t)}{\partial s} \right) dt\,.$$

Cette formule, compte tenu de la définition et du résultat indiqués aux points 6 et 7 des préliminaires, montre que γ est une extrémale de I sur A si et seulement si elle vérifie les équations de Hamilton, c'est-à-dire si et seulement si c'est un mouvement du système.

3 a). Un calcul simple donne

$$I(\gamma) = \pi PQ \sin(\beta - \alpha) - \frac{T}{2}\left(\frac{P^2}{2m} + kQ^2\right).$$

3 b). On prend P, Q et $\beta - \alpha$ comme paramètres, et on écrit que les dérivées partielles de $I(\gamma)$ par rapport à ces paramètres sont nulles.

3 c). On vérifie que les expressions de $p(t)$ et $q(t)$ trouvées dans la question précédente sont bien solutions des équations de Hamilton.

Deuxième partie.

1 a). On trouve:

$$H(z_k, \xi_k) = \sum_{k=1}^3 \frac{|\xi_k|^2}{2m_k} - K\left(\frac{m_1 m_2}{|z_1 - z_2|} + \frac{m_2 m_3}{|z_2 - z_3|} + \frac{m_3 m_1}{|z_3 - z_1|}\right).$$

1 b). On trouve:

$$I(\gamma) = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^3 \Re\left(\xi_k(t)\frac{d\overline{z_k(t)}}{dt}\right) - H\big(z_k(t), \xi_k(t)\big) \right) dt\,.$$

2. Le calcul se simplifie si l'on remarque que H ne dépend pas de t. On trouve:

$$I(\gamma) = \pi i \sum_{k=1}^3 (Q_k \overline{P_k} - P_k \overline{Q_k}) - hT\,.$$

3. On pose:

$$Q_k = r_k \exp(i\theta_k)\,; \quad P_k = \rho_k \exp(i\alpha_k)\,,$$

avec $r_k \geq 0$, $\rho_k \geq 0$. On pose aussi:

$$\rho_k \cos(\alpha_k - \theta_k) = x_k\,, \quad \rho_k \sin(\alpha_k - \theta_k) = y_k\,.$$

On considère $I(\gamma)$ comme dépendant des paramètres x_k et y_k, et on écrit que ses dérivées partielles par rapport à ces paramètres sont nulles. On trouve ainsi l'expression (5) de l'énoncé, dont l'interprétation mécanique est la suivante: l'impulsion du point matériel M_k est le produit de sa vitesse par sa masse.

Compte tenu des relations déjà trouvées, l'expression de I devient:

$$I(\gamma) = \pi\omega \sum_{k=1}^{3} m_k r_k^2 + KT\left(\frac{m_1 m_2}{|Q_1 - Q_2|} + \frac{m_2 m_3}{|Q_2 - Q_3|} + \frac{m_3 m_1}{|Q_3 - Q_1|}\right).$$

On remplace Q_k par $Q_k + su$, s étant un paramètre réel, et u un élément fixe quelconque de $\mathbf{C}$. On obtient ainsi une famille γ_s à un paramètre s d'applications, et on écrit que la dérivée de $I(\gamma_s)$ par rapport à s est nulle pour $s = 0$. On trouve ainsi:

$$\sum_{k=1}^{3} m_k \left(Q_k \overline{u} + \overline{Q_k} u\right) = 0\,.$$

En faisant successivement $u = 1$ puis $u = i$, on obtient l'expression (6) de l'énoncé. Sa signification mécanique est la suivante: le point O est le centre de masse du système.

4 a). On écrit que la dérivée partielle de $I(\gamma)$ par rapport à θ_1 est nulle, et on obtient la formule indiquée dans l'énoncé. On obtient deux autres formules analogues en permutant circulairement les rôles de θ_1, θ_2, θ_3.

4 b). On suit les indications de l'énoncé, et on écrit que la dérivée de $I(\gamma)$ par rapport à λ est nulle pour $\lambda = 1$. On trouve la formule indiquée.

5. Si les points M_1, M_2 et M_3 ne sont pas alignés, la relation (6) de l'énoncé montre que Q_1, Q_2 et Q_3 sont non nuls. La relation obtenue en 4 a) peut s'écrire:

$$\frac{m_2 r_2}{r_{12}^3}\sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{m_3 r_3}{r_{31}^3}\sin(\theta_1 - \theta_3) = 0\,.$$

En comparant avec l'égalité déduite de (6) par projection sur la perpendiculaire à OM_1, on en déduit $r_{12} = r_{31}$. On montre de même $r_{12} = r_{23}$. Les trois points matériels forment donc un triangle équilatéral.

L'expression de T^2 obtenue à la question 4 b) peut être transformée, en utilisant la relation (6) ainsi que le fait que le triangle est équilatéral. On trouve:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{K}\frac{r^3}{m_1 + m_2 + m_3}\,.$$

6 a). La propriété résulte de l'égalité (6).

6 b). On écrit que les dérivées partielles de $I(\gamma)$ par rapport aux paramètres x_1, x_2 et x_3 sont nulles. En remplaçant ces trois paramètres par leurs expressions au moyen de a et de λ, on obtient, après quelques calculs simples, la double égalité indiquée dans l'énoncé.

6 c). Les fonctions, définies sur l'intervalle ouvert $]0,1[$,

$$\lambda \mapsto \left(\frac{m_2}{\lambda^2} + m_3\right)(m_2\lambda + m_3)^{-1}$$

et

$$\lambda \mapsto \left(m_1 + \frac{m_2}{(1-\lambda)^2}\right)(m_1 + m_2(1-\lambda))^{-1}$$

sont, l'une strictement décroissante de $+\infty$ à 1, l'autre strictement croissante de 1 à $+\infty$. Leur différence s'annule donc pour une valeur unique de $\lambda \in]0,1[$. Cette valeur de λ satisfait la seconde égalité obtenue à la question 6 b. La première égalité permet alors de déterminer la période T du mouvement, connaissant K, a, m_1, m_2, m_3.

7. On vérifie, par calcul direct, que γ est solution des équations de Hamilton, successivement pour la configuration équilatérale et pour la configuration alignée.

Troisième partie.

1. On pose, pour tout $(s,t) \in \Omega$:

$$p_k(s,t) = p_k(\gamma_s(t))\,; \quad q^k(s,t) = q^k(\gamma_s(t))\,.$$
$$F(s,t) = \sum_{k=1}^{n} p_k(s,t)\frac{\partial q^k(s,t)}{\partial t} - H(\gamma_s(t))\,.$$

On remarque que $I(\gamma_{s_1})$ et $I(\gamma_{s_2})$ sont les intégrales de F sur les deux segments de droite, faisant partie du contour frontière de Ω, $s = s_1$, $a(s_1) \le t \le b(s_1)$, et $s = s_2$, $a(s_2) \le t \le b(s_2)$. On calcule la dérivée partielle de F par rapport à s; compte tenu des équations de Hamilton, on obtient:

$$\frac{\partial F(s,t)}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k(s,t)\frac{\partial q^k(s,t)}{\partial s}\right)\,.$$

On pose donc

$$G(s,t) = \sum_{k=1}^{n} p_k(s,t)\frac{\partial q^k(s,t)}{\partial s}\,.$$

D'après la formule de Stokes, on a:

$$\oint_{\partial\Omega}(F(s,t)dt + G(s,t)ds) = \iint_{\Omega}\left(\frac{\partial F(s,t)}{\partial s} - \frac{\partial G(s,t)}{\partial t}\right) ds\,dt\,.$$

En explicitant, on trouve la formule indiquée dans l'énoncé.

2. L'application de la formule indiquée au point 5 des Préliminaires conduit à:

$$\frac{d}{ds}I(\gamma_s) = -h(s)\frac{dT(s)}{ds},$$

d'où la formule de la question précédente, en intégrant sur l'intervalle $[s_1, s_2]$.

3. Le résultat indiqué dans l'énoncé découle directement de la question 1 et de la définition de K.

4 a). Question sans difficulté. On indiquait aux candidats qu'ils pouvaient admettre la différentiabilité de l'application $(s,t) \mapsto \gamma_s(t)$. En fait, celle-ci résulte du théorème de différentiabilité des solutions d'une équation différentielle par rapport aux données de Cauchy.

4 b). Question sans difficulté.

4 c). Même chose.

5. Tous les mouvements de l'oscillateur harmonique sont périodiques, de même période

$$T = \pi\sqrt{\frac{2m}{k}}.$$

Le calcul de K conduit à

$$K(q,p) = TH(q,p),$$

résultat en accord avec celui de la question précédente.

6. On sait que les trajectoires du système de Kepler sont, dans l'espace de configuration, des ellipses, des hyperboles ou des paraboles, selon les données de Cauchy, ayant l'origine pour foyer. L'ensemble des données de Cauchy pour lesquelles les trajectoires sont des ellipses est l'ouvert de l'espace des phases

$$\{(\vec{q},\vec{p}) \in \mathbf{E}^3 \times \mathbf{E}^3 \mid H(\vec{q},\vec{p}) < 0, \quad \vec{q}\wedge\vec{p} \neq 0\},$$

où $\mathbf{E}^3$ désigne l'espace euclidien orienté de dimension 3. La condidion $\vec{q}\wedge\vec{p} \neq 0$, qui exprime que le moment cinétique par rapport à l'origine est non nul, a été imposée pour éviter les collisions avec le centre attractif. Le hamiltonien du système a pour expression:

$$H(\vec{q},\vec{p}) = \frac{\|\vec{p}\|^2}{2m} - \frac{km}{\|\vec{q}\|}.$$

Le calcul de K peut être fait en considérant une orbite circulaire, puisqu'on sait d'avance que la valeur de K ne dépend que de l'énergie. On trouve:

$$K = 2\pi mk\sqrt{\frac{m}{-2h}}.$$

En dérivant K par rapport à l'énergie h, on obtient:

$$\frac{dK}{dh} = \frac{\pi k m^{3/2}}{\sqrt{2}}(-h)^{-3/2},$$

qui doit être égale à la période T. C'est bien le cas, puisqu'on a la relation période-énergie (pour une énergie $h < 0$):

$$T^2 = -\frac{\pi^2 k^2 m^3}{2h^3}.$$