RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE NUMERIQUE.

I - REMARQUES GENERALES.

L'objet du problème était de mettre en place les questions d'approximation d'une fonction par des fractions rationnelles. Le critère le plus simple est retenu, c'est à dire l'ordre d'approximation en zéro. Quand cet ordre est maximal ($p+q+1$ pour une fraction de type (p,q)), on trouve les approximants de Padé, quand l'ordre est seulement $p+1$ et le dénominateur arbitraire, on trouve les approximants de type Padé.

Les fractions rationnelles étant évidemment développables en séries entières, le champ théorique naturel de ces questions est la théorie (élémentaire) des fonctions de variables complexes. Il est clair que les difficultés de beaucoup de candidats viennent d'un raisonnement peu sûr dans ce cadre, et ceci dès la formule de Cauchy.

Il faut insister sur le fait que la valeur d'une justification (dérivation sous le signe somme par exemple) ne tient pas à son volume!

Enfin deux erreurs s'étaient glissées au début de la quatrième partie. La 1ère n'a pas géné les candidats, la seconde en a géné certains, ce dont on a tenu compte dans la notation.

II - ANALYSE DU SUJET.

La première partie amène à la définition des approximants de Padé et de type Padé. On démontre les formules d'interpolation d'Hermite d'une fonction g par un polynôme P puis on passe au problème proprement dit par la fonctionnelle c ; g est remplacé par

$$\frac{1}{1-xt}$$

et on a :

$$c\left(\frac{1}{1-xt}\right) = f(x) \quad \text{et} \quad c(P) = \langle n-1/n\rangle_f$$

La deuxième partie étudie le comportement des pôles de la suite des approximants de Padé $([n/\gamma])_n$ d'une fonction méromorphe à γ poles dans le disque de rayon ρ. On démontre le théorème de Montessus de Ballore : les pôles des approximants convergent vers les pôles de f.

Les parties III, IV, V ne concernent que les approximants de type Padé. La troisième partie est une sorte de réciproque de la seconde : si f est méromorphe avec γ pôles et si on choisit ces points comme pôles des approximants de type Padé, alors les développements en série de $(n+\gamma-1/\gamma)$ et de $[n+\gamma-1/\gamma]$ sont voisins.
La partie IV traite des approximants de Padé et de type Padé de l'exponentielle pour lesquelles on peut définir un C-polynôme (ou polynôme générateur). La question 24 permettait à travers la τ méthode de Lanczos, de retrouver le polynôme de Legendre de d°n comme générateur de l'approximant de Padé $[n/n]$ de l'exponentielle. L'intérêt de cette partie réside dans le fait que les approximants sont explicitement connus, y compris leur vitesse de convergence (Q.26).
La cinquième partie s'intéressaient aux fonctions développables en série de Stieltjes : si les dénominateurs sont associés à des polynômes orthogonaux (ici ceux de Tchebicheff), les ATP convergent dans tout le domaine d'analycité de la fonction, et convergent plus vite que la série dans son disque de convergence.

III - COMMENTAIRE SUR LES QUESTIONS.

1ère partie : Beaucoup de candidats n'ont pas réalisé quelques points simples et ont passé un temps considérable à cette partie :

1) P(t) est l'intégrale par rapport à u d'un polynôme de d°n-1 en t c'est donc un polynôme de d°n-1 en t.

$$V_n(t)/t-u = (t-x_i)^{m_i}(\varphi(t)/t-u)$$

et t-u ne s'annule pas en x_i, donc x_i est un zéro d'ordre m_i de $V_n(t)/t-u$.

2°) $c(P_x) = \tilde{W}_n(x)/\tilde{V}_n(x)$.

C est linéaire et agit sur t donc

$$C(P_x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial r} c\left(\frac{V_n(t)-V_n(u)}{t-u}\right)\frac{h(u)}{V_n(u)}\,du,$$

sans intégrale double, sans théorèmes de Fubini, ou Lebesgue. (On pouvait développer le polynôme si on voulait être convaincu !)
Donc

$$C(P_x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial r}\frac{W_n(t)}{V_n(u)(1-xu)}\,du,$$

1/x est un pôle extérieur au contour, donc on applique le théorème des résidus à l'extérieur du contour où les pôles sont 1/x et l'infini.

Le résidu est nul à l'infini ($d°W_n < d°V_n$) et finalement :

$$C(P_x) = - \mathrm{Res}\left(\frac{W_n(u)}{V_n(u)(1-xu)}, 1/x \right) = \frac{W_n(x^{-1})}{x\, V_n(x^{-1})}$$

Ce calcul qui n'a été correct que dans deux ou trois copies est tout à fait symbolique du manque de rigueur et de sûreté des candidats en analyse complexe.

2ème partie.

Cette partie, à finalité tout à fait numérique, expose en fait une "belle" démonstration, Elle a été assez bien faite par un certain nombre de candidats.
Les question III, IV, V n'ont été abordées par les candidats dans la majorité des cas que pour gagner des points ici et là. Elles comportaient effectivement quelques questions faciles, mais par exemple la question 14 très facile est rarement bien faite, et confirme le commentaire sur la 1ère partie.

IV - REPARTITION DES NOTES.

Nombre de copies 277
Moyenne (sur 40) 11.52

Répartition	Notes	
	0.4	57
	5.9	70
	10.14	58
	15.19	46
	20.24	28
	25.29	12
	30.34	3
	35.40	3