COMPOSITION D'ANALYSE

DURÉE : 6 heures

Dans tout le problème $\mathbf{R}^3$ est muni de la norme euclidienne $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

On rappelle que, en coordonnées sphériques :

$$x = r\cos\theta\cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$y = r\cos\theta\sin\varphi$$
$$z = r\sin\theta$$

le laplacien s'écrit : $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} - \operatorname{tg}\theta\,\dfrac{\partial f}{\partial\theta} + \dfrac{1}{\cos^2\theta}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right]$

On note $\mathbf{R}^+$ (resp. $\mathbf{R}^{+*}$) l'ensemble des réels positifs (resp. strictement positifs).

On note $\mathbf{R}^{3*}$ l'espace $\mathbf{R}^3$ privé de 0. On note $\mathbf{S}$ la sphère unité de $\mathbf{R}^3$.

On note $\mathbf{C}$ le corps des complexes, $\mathbf{N}$ (resp. $\mathbf{Z}$) l'ensemble des entiers positifs (resp. relatifs).

Les intégrales dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^3$ font référence à la mesure de Lebesgue standard ; les intégrales sur $\mathbf{S}$ à la mesure de surface usuelle, image de la mesure de Lebesgue sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \times \left[-\pi, \pi\right]$

par le paramétrage ci-dessus : $(\theta, \varphi) \longrightarrow \begin{cases} x(1,\theta,\varphi) \\ y(1,\theta,\varphi) \\ z(1,\theta) \end{cases}$

Suivant l'abus de langage habituel, on dira qu'un élément f de $\mathbf{L}^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ s'il existe une fonction deux fois continûment différentiable qui coïncide presque partout avec f.

On dit qu'une fonction f, définie sur $\mathbf{R}^{+*}$, à valeurs dans $\mathbf{C}$ est développable en série de Laurent si, et seulement si, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ telle que la série $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ converge pour tout $x > 0$ et ait pour somme f.

(On dit qu'une telle série converge si et seulement si les deux séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} x^{-k}$ convergent.)

La partie IV et l'essentiel de V sont indépendants de II et III.

II et III font appel essentiellement à du calcul différentiel et de l'intégration dans $\mathbf{R}^3$.

IV et V font appel essentiellement à de l'analyse à une variable réelle; elles comportent moins de calculs mais peut-être un peu plus de difficultés théoriques.

PREMIÈRE PARTIE

Ces questions introduisent soit des résultats utiles pour la suite du problème, soit des méthodes voisines de celles qui sont utilisées ultérieurement, mais présentées ici dans un contexte simplifié.

1° Quelle est la dimension de l'espace vectoriel sur **C** des polynômes à deux indéterminées, à coefficients complexes, de degré global inférieur ou égal à n ?

2° Calculer l'intégrale, étendue à la sphère **S**, de la fonction définie par $(x, y, z) \in \mathbf{S} \longrightarrow f(x, y, z) = 1 + z^2$.

3° Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - z^2)^p \left[\frac{d^{p+q}}{dz^{p+q}} (1 - z^2)^q\right] \left[\frac{d^{p+r}}{dz^{p+r}} (1 - z^2)^r\right] dz \qquad (0 \leqslant p \leqslant q \leqslant r\,;\, p, q, r \text{ entiers}).$

(On pourra faire des intégrations par parties judicieusement choisies, en étudiant à chaque fois les valeurs aux bornes de la « partie tout intégrée ».)

4° Déterminer les solutions de l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)\, y'' - 2\, x\, y' + \lambda(\lambda + 1)\, y = 0 \qquad (\lambda \in \mathbf{R})$$

qui sont développables en série entière au voisinage de $x = 0$.

Quel est le rayon de convergence des séries obtenues?

Pour quelles valeurs de λ existe-t-il des solutions polynomiales non nulles?

5° Soit f une fonction continue positive sur $[1, + \infty[$ telle qu'il existe deux constantes positives a et b vérifiant :

$$\forall x \geqslant 1 \qquad f(x) \leqslant a \int_1^x \frac{f(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t + b$$

Montrer que f est bornée.

DEUXIÈME PARTIE

1° On dit qu'une fonction complexe f définie sur **S** est polynomiale de degré inférieur ou égal à n si elle est la restriction à **S** d'une fonction polynomiale sur $\mathbf{R}^3$ de degré inférieur ou égal à n.

Montrer que toute fonction polynomiale sur S de degré inférieur ou égal à n peut être représentée par un polynôme de degré inférieur ou égal à n de la forme $\mathrm{P}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) + \mathrm{Z}\, \mathrm{Q}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

Déterminer la dimension de l'espace vectoriel sur **C** des fonctions polynomiales sur S de degré inférieur ou égal à n.

2° f étant une fonction de $\mathbf{R}^3$ dans **C** et r un réel positif, on définit la fonction f_r de **S** dans **C** par $f_r(\mathrm{M}) = f(r\,\mathrm{M})$.

Montrer que, si f appartient à $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3)$, la fonction f_r appartient à $\mathbf{L}^2(\mathbf{S})$ pour presque tout r.

3° Soit $g \in \mathbf{L}^2(\mathbf{S})$, h une fonction de $\mathbf{R}^{+*}$ dans **C** et f la fonction de $\mathbf{R}^{3*}$ dans **C** définie par $f(r\mathrm{M}) = h(r)\, g(\mathrm{M})$. À quelles conditions (portant sur h) la fonction f est-elle dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3)$?

4° Soit l un entier positif, m un entier tel que $|\, m\, | \leqslant l$.

On note $\mathrm{X}_{l,m}$ la restriction à **S** du polynôme de $\mathbf{R}^3$:

$$(x + i\, \varepsilon\, y)^{|m|} \frac{d^{l+|m|}}{dz^{l+|m|}} ((1 - z^2)^l) \qquad \text{où} \quad \begin{cases} (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \\ i^2 = -1 \\ \varepsilon = +1 \text{ si } m > 0, \\ \varepsilon = -1 \text{ si } m < 0 \end{cases}$$

On pose $\mathrm{X}_{0,0} = 1$, fonction constante.

Montrer que les $X_{l,m}$, $0 \leqslant |m| \leqslant l$, $m \in \mathbf{Z}$, $l \in \mathbf{N}$, forment un système orthogonal de $L^2(S)$.

On pose $Y_{l,m} = \dfrac{X_{l,m}}{\| X_{l,m} \|_{L^2}}$.

Montrer que les $Y_{l,m}$ forment une base hilbertienne de $L^2(S)$.

5° On note $\mathbf{H}_{l,m}$ le sous-espace de $L^2(\mathbf{R}^3)$ engendré par les fonctions de la forme $h(r)\,Y_{l,m}$, où h vérifie les conditions déterminées au 3° de la deuxième partie.

Montrer que $\mathbf{H}_{l,m}$ est fermé dans $L^2(\mathbf{R}^3)$. Déterminer la projection orthogonale d'une fonction f appartenant à $L^2(\mathbf{R}^3)$ sur $\mathbf{H}_{l,m}$.

Montrer que $L^2(\mathbf{R}^3)$ est la somme hilbertienne des $\mathbf{H}_{l,m}$ $(0 \leqslant |m| \leqslant l\,;\, l \geqslant 0)$, c'est-à-dire que les $\mathbf{H}_{l,m}$ sont deux à deux orthogonaux et que leur somme est dense dans $L^2(\mathbf{R}^3)$.

TROISIÈME PARTIE

1° Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^{3*}$ appartenant à $L^2(\mathbf{R}^3)$, montrer que les projections orthogonales de f sur les $\mathbf{H}_{l,m}$ sont encore de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^{3*}$.

2° Soit M le point de S de coordonnées sphériques $(1, \theta, \varphi)$.

On notera $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ la valeur de $Y_{l,m}$ au point M.

Montrer que $Y_{l,m}$ vérifie la relation :

$$\frac{\partial^2 Y_{l,m}}{\partial \theta^2} - \operatorname{tg}\theta \, \frac{\partial Y_{l,m}}{\partial \theta} + \frac{1}{\cos^2\theta}\,\frac{\partial^2 Y_{l,m}}{\partial \varphi^2} + K\,Y_{l,m} = 0$$

où K est une constante qu'on déterminera.

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^{3*}$ appartenant à $\mathbf{H}_{l,m}$, calculer Δf en un point de coordonnées sphériques (r, θ, φ) $(r > 0)$.

3° Pour une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^{3*}$ on définit $H(f) = -\Delta f - \dfrac{1}{r} f$.

Montrer que si f est dans $L^2(\mathbf{R}^3)$ et vérifie $H(f) = Ef$ $(E \in \mathbf{R})$ toutes ses projections $f_{l,m}$ sur les $\mathbf{H}_{l,m}$ vérifient des relations similaires :

$$H(f_{l,m}) = E f_{l,m}$$

Si on note $a_{l,m}(r)\,Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ la projection de f sur $\mathbf{H}_{l,m}$, quelle relation doit alors vérifier la fonction $a_{l,m}$?

On définit la fonction $b_{l,m}$ sur $\mathbf{R}^{+*}$ par $b_{l,m}(r) = r\,a_{l,m}(r)$.

Comment se traduisent pour $b_{l,m}$ les propriétés démontrées antérieurement pour $a_{l,m}$ (propriétés de type différentiel et propriétés de type intégral) ?

QUATRIÈME PARTIE

Soit l un entier strictement positif. L'objet de cette partie est de déterminer pour quelles valeurs du paramètre ω réel, strictement positif, il existe des solutions u de l'équation différentielle (E_ω) :

$$u''(x) - \left(\frac{l(l+1)}{x^2} - \frac{1}{x} + \omega^2\right) u(x) = 0$$

de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^{+*}$, et appartenant à $L^2(\mathbf{R}^+)$.

1° On met les solutions sous la forme $u(x) = v(x)\exp(-\omega x)$.

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par v.

Déterminer les solutions v de cette équation différentielle développables en série de Laurent. (Ne pas chercher à les exprimer à l'aide de fonctions élémentaires.)

Discuter la dimension de l'espace vectoriel des solutions ainsi obtenues.

2° Pour quelles valeurs de ω existe-t-il des solutions v polynomiales ? Montrer que les fonctions u associées sont dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)$.

Montrer que, parmi les solutions v déterminées à la question précédente (quatrième partie, 1°), seules les fonctions v polynomiales définissent des solutions u non nulles de (E_ω) dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)$.

3° Montrer que l'équation (E_ω) n'a pas d'autres solutions non nulles dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)$ que celles qui ont été déterminées à la question précédente.

4° l étant fixé, montrer que les solutions obtenues pour deux valeurs distinctes de ω sont orthogonales dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)$.

CINQUIÈME PARTIE

Soit l un entier positif ou nul, ω un réel strictement positif.

On étudie dans cette partie les solutions de l'équation différentielle :

$$u''(x) + \left(\omega^2 + \frac{1}{x} - \frac{l(l+1)}{x^2}\right) u(x) = 0 \qquad (E'_\omega)$$

où u est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^{+*}$. On pose $h(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{l(l+1)}{x^2}$.

À toute solution u de (E'_ω) on associe la fonction F définie par :

$$F(x) = (\omega^2 + h(x))\, u^2(x) + u'^2(x)$$

1° En s'inspirant de la méthode utilisée aux 2° et 3° de la quatrième partie pour (E_ω), étudier le comportement au voisinage de zéro des solutions de (E'_ω).

2° Montrer que si une solution u de (E'_ω) est dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)$ et si $l > 0$

$$\int_0^{+\infty} u(x)\, u''(x)\, dx = -\int_0^{+\infty} u'^2(x)\, dx$$

Que devient cette formule pour $l = 0$?

3° On suppose toujours que u, solution de (E'_ω), est dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^+)$. Montrer que la fonction F associée à u est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que, si u n'est pas la fonction nulle, $F(x)$ est strictement positif pour tout x assez grand.

Établir une inéquation différentielle vérifiée par F et en déduire que u est la fonction nulle.

4° Montrer que toute solution u de (E'_ω) sur $\mathbf{R}^{+*}$ est bornée sur toute demi-droite $[X, +\infty[$ où $X > 0$.

(On pourra utiliser la fonction F associée ou montrer que pour tout $A > 0$ il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout x supérieur à A, on ait :

$$u^2(x)(\omega^2 - |h(x)|) \leqslant \int_A^x |h'(t)|\, u^2(t)\, dt + C)$$

RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE.

Le problème porte sur l'étude du spectre discret de l'équation de Schrödinger pour l'atome d'hydrogène, dans un modèle simplifié ne tenant compte ni du spin, ni des champs extérieurs.

La question, venue au jour vers 1925-1927 dans les débuts de la mécanique quantique a été résolue immédiatement en ce qui concerne les valeurs propres négatives (partie IV du problème). En 1929 un contre exemple de Von-Neumann et Wigner a montré que l'absence de valeurs propres positives, considérée comme intuitive par les physiciens, n'allait pas de soi. La réponse n'est venue qu'en 1966 dans un article de Weidmann (on the continuous spectrum of Shrödinger operators, Comm. Pure. Appl. Math 19-1966, p. 107-110) dont la partie V est une adaptation très simplifiée.

Pour en savoir plus, on peut consulter le traité classique de Reed-Simon : Methods of Modern Mathematical Physics (Volume 4 en particulier) et les monographies plus spécialisée de Berthier (Pitnam Pub n°71) et de Eastham et Kalf (Pitman Pub n°65).

Pour maintenir le problème dans un cadre relativement élémentaire on n'a pas introduit d'espaces de Sobolev, ce qui n'a pas permis de faire figurer le terme "valeur propre " dans l'énoncé. On peut montrer que s'il existait des solutions faibles (ou au sens distributions) elles seraient en fait des solutions classiques (lemme de Weyl).

Dans le même but, on n'a pas cherché à étudier le spectre continu, et on a préféré laisser de côté le cas $l = 0$ au IV ainsi que le cas $E = 0$ (c'est à dire $\omega = 0$ en IV ou V).

Le problème est assez long mais avait été rédigé comme le signalait le préambule, de façon que les cadidats puissent, selon leurs connaissances, faire porter l'esentiel de leur effort soit sur les parties II et III , soit sur les parties IV et V qui faisaient appel à des domaines largement disjoints de l'analyse.

En fait, beaucoup de copies sont très fragmentaires et montrent plutôt une tendance au grappillage de questions faciles qu'une tentative d'approfondissement. Une telle attitude a ses avantages : accumuler les points des questions faciles, et ses inconvénients : ne pas aborder les questions plus délicates, qui sont aussi les mieux rémunérées par le barème de correction.

Notons enfin que de nombreuses copies sont rédigées de façon inacceptable chez de futurs enseignants. Les candidats doivent savoir que, même si la rédaction et la présentation ne sont pas cotées explicitement dans le barème, elles influent sensiblement sur la note finale : le correcteur ne fait pas l'exégèse des copies qui lui sont soumises, il note ce qui est écrit : si un raisonnement est trop confus ou insuffisamment justifié, il est considéré comme faux. Dans des cas extrêmes, il peut en aller de même pour des passages illisibles.

Remarquons sur quelques questions du problème :

I- 2) Beaucoup de candidats ont calculé, au lieu de l'intégrale de surface sur la sphère, une intégrale triple sur la boule. Beaucoup d'autres ont écrit une intégrale triple en coordonnées cartésiennes, fait le changement en coordonnées sphériques en calculant le jacobien tridimensionnel, puis escamoté sans explications la variable r pour obtenir une intégrale en θ et ϕ. Le résultat obtenu est alors exact (on pourrait justifier un raisonnement de ce type mais aucun candidat n'a tenté de le faire). Quelques condidats ont trouvé, sans s'en étonner, un résultat négatif.

3) La question, pourtant élémentaire, a été peu abordée. Les quelques candidats qui s'y sont attaqué n'ont en général pas vu qu'il suffisait d'étudier l'ordre de multiplicité des racines ± 1 dans le polynôme $(1 - z^2)^m$ et ses dérivées et ont fait des calculs assez lourds à l'aide de la formule de Leibniz.

4) Le calcul formel a en général été bien fait , mais le rayon de convergence très mal étudié, voir pas étudié du tout. Lorsque les solutions n'étaient pas polynomiales on trouvait facilement la limite de $|a_{n+2}/a_n|$. On ne peut obtenir ainsi , en principe, que le carré du rayon de convergence (ici, la limite étant 1, la confusion n'était pas visible sur le résultat).
Il suffisait pour conclure exactement de se demander si le terme général de la série est borné (lemme d'Abel).

Dans la recherche des solutions polynomiales, presque personne n'a remarqué que l'équation $n(n+1) = \lambda(\lambda+1)$ admet des racines $n = \lambda$ si λ est entier positif, mais aussi $n = -\lambda-1$ si λ est entier négatif (une erreur similaire se retrouve au IV). Le rôle de la parité a rarement été précisé.

5) Les candidats qui ont abordé cette question l'ont en général correctement traitée. Certains se sont limités au cas beaucoup plus simple où $a < 1$. Notons quand même quelques divisions d'inégalités par un nombre négatif et quelques surprenantes fautes de logique dans la négation de la propriété "f est bornée". On pouvait appeler $G(x)$ le second membre de l'inégalité, et remarquer que $x^2 G'(x) \leq a\, G(x)$. En intégrant l'inéquation différentielle on obtenait $G(x) \leq A \exp(-a/x)$ ce qui prouve le résultat.

II- 1) Presque personne n'a vu que pour utiliser la décomposition proposée $P(X,Y) + Z\, Q(X,Y)$ il fallait en prouver l'unicité (cela pouvait se faire en étudiant, pour X et Y fixés, avec $X^2+Y^2 < 1$, la fonction affine $Z \to P(X,Y) + Z\, Q(X,Y)$ et en remarquant qu'une fonction affine nulle en deux points distincts est identiquement nulle.

Quelques candidats multiplient les dimensions de deux sous-espaces supplémentaires pour obtenir la dimension de l'espace !.

2-3 Assez mal traitées dans l'ensemble, peu d'allusions au théorème de Fubini, encore moins d'explications précises de son utilisation (qui était très différente dans les deux questions).

4) Parmi les candidats qui abordent cette question, certains oublient la conjugaison dans le produit scalaire hermitien, d'autres ne traitent pas tous les cas. Au total presque personne n'écrit correctement l'intégrale qui définit le produit scalaire, ce qui ôte toute valeur aux références plus ou moins vagues au I 3).

A part de rares exceptions, II 5) et III n'ont pas été abordées, ou seulement par de vagues allusions à la densité des polynômes, ou à des séries de Fourier, ou encore des distributions pour III, presque toujours en négligeant les vraies difficultés.

Donnons quelques indications :

La fin de II 5) utilise le théorème de Stone Weierstrass, en remarquant que le calcul de dimneison du II 1) montre que les Y_{lm} engendrent l'algèbre des fonctions polynomiales sur S, et que $Y_{lm} = Y_{l,-m}$: l'algèbre est autoconjuguée.
La projection orthogonale sur H_{lm} est définie par

$$H_{l,m}(r) = \iint_S f(r\,M)\, \overline{Y}_{l,m}(M)\, d\sigma(M).$$

Au III, 1) résulte du théorème de dérivation sous le signe intégrale appliqué à la projection orthogonale. Un calcul, assez délicat, montre au 2) que $K = l(l+1)$. Le reste résulte d'intégrations par parties en coordonnées sphériques.

IV En général seul le calcul formel a été abordé, mais la relation de récurrence entre les coefficients n'a pas été exploitée de façon méthodique : trois valeurs de n jouent un rôle exceptionnel $n_1=1$; $n_2=-1-1$ et éventuellement $n_0 = 1/2\omega$. Faute de voir que $a_n=0$ si $n < -1-1$, on ne peut pas prouver la convergence de la série (beaucoup de candidats ont cru que la limite de a_{n+1}/a_n s'interprête de la même façon en $-\infty$ qu'en $+\infty$). L'étude de la dimension et des solutions polynomiales dépend de l'existence de n_0 et de sa position par rapport à n_2.

La fin du IV se traite par un développement asymptotique en 0 d'une solution obtenue par variation de la constante à partir d'une série entière. L'orthogonalité résulte, là encore, d'intégrations par parties.

V n'a pratiquement pas été abordée.

Répartition des notes :

0 à 4	5 à 9	10 à 14	15 à 19	20 à 24	25 à 29
182	155	95	125	69	50

30 à 34	35 à 39	40 à 44	45 à 49	50 à 54	55 à 60
27	38	24	11	7	7