MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

Durée : 6 heures

Préambule

L'objet du problème est de déterminer les endomorphismes de l'espace vectoriel des matrices carrées con d'ordre n conservant certaines propriétés de ces matrices. La première partie étudie la conservation du rang 1 de l'inversibilité. Les deuxième et troisième parties, qui sont indépendantes de la première, préparent à effectuée dans la quatrième partie, de la conservation du groupe unitaire et de celle de certaines normes.

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2, $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes, semble des nombres complexes de module 1.

$M_{p,q}(\mathbb{C})$ étant l'espace vectoriel des matrices complexes à p lignes et q colonnes, dont l'élément nul est on pose :

- $\mathcal{E} = M_{n,n}(\mathbb{C})$ (ensemble des matrices carrées d'ordre n);
- $\mathcal{C} = M_{n,1}(\mathbb{C})$ (ensemble des matrices colonnes à n lignes);
- $\mathcal{L} = M_{1,n}(\mathbb{C})$ (ensemble des matrices lignes à n colonnes);
- $\mathcal{C}' = \mathcal{C}\backslash\{0\}$
- $\mathcal{L}' = \mathcal{L}\backslash\{0\}$

Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{C})$, ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{E}$, sera noté $\mathcal{G}$.

Enfin, $\mathcal{R}_1$ désignera l'ensemble des matrices de rang 1 de $\mathcal{E}$ et $\overline{\mathcal{R}}_1$ l'ensemble des matrices de rang ou égal à 1 de $\mathcal{E}$. On a donc $\overline{\mathcal{R}}_1 = \mathcal{R}_1 \cup \{0\}$.

PREMIÈRE PARTIE

Pour P et Q éléments de $\mathcal{G}$, on définit deux endomorphismes $T_{P,Q}$ et $T'_{P,Q}$ de $\mathcal{E}$ par :

$$\forall A \in \mathcal{E} \qquad T_{P,Q}(A) = PAQ \qquad T'_{P,Q}(A) = P\,{}^tAQ \qquad ({}^tA \text{ est la transposée de A})$$

et on désigne par γ (resp. γ') l'ensemble des endomorphismes $T_{P,Q}$ (resp. $T'_{P,Q}$) pour P et Q décrivant $\mathcal{G}$. $\Gamma = \gamma \cup \gamma'$.

γ et Γ sont, de manière immédiate, des sous-groupes du groupe linéaire GL ($\mathcal{E}$). On ne demande démontrer.

A

On se propose d'établir ici que les endomorphismes T de $\mathcal{E}$ tels que $T(\mathcal{R}_1) \subset \mathcal{R}_1$ sont les éléments de Γ.

1° Montrer que si T appartient à Γ alors $T(\mathcal{R}_1) \subset \mathcal{R}_1$.

2° Établir que $\mathcal{R}_1$ est égal à l'ensemble $\mathcal{C}'\,\mathcal{L}'$ des produits XV d'un élément X de $\mathcal{C}'$ par un élément V de $\mathcal{L}'$.

3° Soient alors XV et X'V' deux éléments de $\mathcal{R}_1$. Montrer que si $XV + X'V'$ appartient à $\overline{\mathcal{R}}_1$, alors l'un au moins des deux couples (X, X') et (V, V') est lié.

4° On désigne par Σ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension n de $\mathcal{E}$ inclus dans $\overline{\mathcal{R}}_1$.

Montrer que Σ est exactement constitué des éléments de l'une des deux formes suivantes :

a. $X\mathcal{L}$ (ensemble des produits XV quand V décrit $\mathcal{L}$) avec X dans $\mathcal{C}'$.

b. $\mathcal{C}V$ (ensemble des produits XV quand X décrit $\mathcal{C}$) avec V dans $\mathcal{L}'$.

X et X' étant deux éléments de $\mathcal{C}'$, préciser $X\mathcal{L} \cap X'\mathcal{L}$.
X et V étant respectivement éléments de $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{L}'$, préciser $X\mathcal{L} \cap \mathcal{C}V$.

5° Dans cette question et les deux suivantes, T désigne un endomorphisme de $\mathcal{E}$ tel que $T(\mathcal{R}_1) \subset \mathcal{R}_1$.

Montrer que l'image par T d'un élément de Σ est un élément de Σ.

6° On suppose ici l'existence de deux éléments non colinéaires de $\mathcal{C}'$, X_1 et X_2, tels que $T(X_1\mathcal{L}) = Y_1\mathcal{L}$ et $T(X_2\mathcal{L}) = Y_2\mathcal{L}$ avec Y_1 et Y_2 dans $\mathcal{C}'$.

a. Prouver l'existence d'une matrice Q de $\mathcal{G}$ telle que :

$$\forall V \in \mathcal{L} \qquad T(X_1V) = Y_1VQ.$$

b. En déduire que $T(X_1\mathcal{L}) \neq T(X_2\mathcal{L})$.

c. Montrer que pour tout V appartenant à $\mathcal{L}'$, $T(\mathcal{C}V)$ est de la forme $\mathcal{C}U$ avec U dans $\mathcal{L}'$.
Que peut-on dire de $T(X\mathcal{L})$ pour X appartenant à $\mathcal{C}'$?

d. En déduire, pour tout X dans $\mathcal{C}'$, l'existence d'un élément Y dans $\mathcal{C}'$ tel que :
$\forall V \in \mathcal{L} \qquad T(XV) = YVQ \qquad$ où Q est la matrice obtenue au *a*.

e. Montrer que T appartient à γ.

7° Établir que si l'hypothèse du 6° n'est pas satisfaite, alors T appartient à γ'.

B

On se propose maintenant d'établir que les endomorphismes T de $\mathcal{E}$ tels que $T(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G}$ sont les éléments de Γ.

1° Montrer que si T appartient à Γ alors $T(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G}$.

2° Soit A une matrice non inversible de $\mathcal{E}$ et r son rang.

a. Montrer l'existence d'une matrice M de $\mathcal{G}$ telle que pour tout élément λ de $\mathbb{C}$, $M - \lambda A$ soit inversible.
(On pourra d'abord établir la propriété pour une matrice particulière A de rang r choisie de forme simple.)

b. Montrer de même l'existence d'une matrice N de $\mathcal{G}$ telle que $N - \lambda A$ soit non inversible pour exactement r valeurs distinctes de λ.

3° On considère dans cette question un endomorphisme T de $\mathcal{E}$ tel que $T(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G}$.

Utiliser la question 2° pour établir, pour toute matrice A de $\mathcal{E}$:

a. Si A est non inversible alors T(A) est non inversible.

b. Le rang de T(A) est supérieur ou égal au rang de A.

Prouver alors que T conserve le rang et que T appartient à Γ.

DEUXIÈME PARTIE

On considère un espace hermitien E de dimension n, dont la norme est notée $x \longrightarrow \| x \|$ et le produit scalaire $(x, y) \longrightarrow (x \mid y)$; $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre de ses endomorphismes, $\mathcal{U}(E)$ son groupe unitaire. L'adjoint d'un élément u de $\mathcal{L}(E)$ est noté u^* ; u est dit hermitien si $u = u^*$, et hermitien positif si, de plus, ses valeurs propres sont des réels positifs ou nuls.

A

1° Vérifier que pour tout endomorphisme u de E, $u^* \circ u$ est hermitien positif, et de même rang que u.

Les n valeurs propres (distinctes ou non) de $u^* \circ u$ sont rangées en ordre décroissant $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_n$ et on pose, pour $i = 1, 2, \dots, n$, $\alpha_i = \sqrt{\lambda_i}$.

Ces nombres α_i sont appelés les valeurs singulières de l'endomorphisme u.

2° Montrer l'existence de deux bases orthonormales de E, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ telles que pour tout $i = 1, 2, \dots, n$ $\quad u(e_i) = \alpha_i e'_i$. (On prendra pour (e_i) une base de vecteurs propres de $u^* \circ u$).

En déduire l'existence d'un endomorphisme hermitien h de valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ et d'un endomorphisme unitaire w tels que $u = w \circ h$.

3° Quelles sont les valeurs singulières d'un endomorphisme hermitien?

4° Montrer que deux endomorphismes u et v de E ont les mêmes valeurs singulières si, et seulement si, il existe w et w' unitaires tels que $u = w \circ v \circ w'$.

On dira alors que u et v sont unitairement équivalents.

B

k étant un entier compris entre 1 et n, on définit $\varphi_k : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{R}_+$ en posant, pour tout endomorphisme u de E, $\varphi_k(u) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$ où $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ sont les valeurs singulières de u rangées, on le rappelle, en ordre décroissant.

On définit également $\psi : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{R}_+$ par

$$\psi(u) = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2)^{1/2} = (\mathrm{Tr}\,(u^* \circ u))^{1/2}. \quad \text{(Tr désigne la trace.)}$$

1° Montrer que ψ est une norme hermitienne sur $\mathcal{L}(E)$.

$\mathcal{F}_k$ désignant l'ensemble des familles orthonormales $(x_1, \dots, x_k)$ d'éléments de E, on se propose d'établir, pour tout endomorphisme u de E :

$$\text{(1)} \qquad \varphi_k(u) = \sup_{\substack{(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{F}_k \\ (y_1, \dots, y_k) \in \mathcal{F}_k}} \sum_{i=1}^{k} |(u(x_i) \mid y_i)|$$

2° Soit h hermitien positif et $(x_1, \dots, x_k)$ un élément de $\mathcal{F}_k$.

Établir que $\sum_{i=1}^{k} (h(x_i) \mid x_i) \leqslant \varphi_k(h)$ (on pourra, par exemple, vérifier que le premier membre s'écrit $\mathrm{Tr}(p \circ h)$ où p est la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel engendré par $(x_1, \dots, x_k)$ et exprimer cette trace dans une base convenable).

En déduire que $$\varphi_k(h) = \sup_{(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{F}_k} \sum_{i=1}^{k} (h(x_i) \mid x_i)$$

3° Établir l'égalité (1) pour un endomorphisme hermitien positif, puis pour tout endomorphisme u de E.

4° Montrer que φ_k est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.

C

Soit F un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N, et S la sphère unité de F. Un élément x de F sera dit élément extrémal de S ou S-extrémal si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

i. $x \in S$

ii. $\forall (y, z) \in S^2 \quad x = \frac{1}{2}(y + z) \Rightarrow x = y = z$

Ceci équivaut à

i. $x \in S$

ii. $\forall (y, z) \in S^2, \forall \lambda \in]0, 1[\quad x = \lambda y + (1 - \lambda) z \Rightarrow x = y = z$

(On ne demande pas de vérifier cette équivalence.)

1° Montrer que si x est S-extrémal et si deux éléments y et z de F vérifient

$$x = \frac{1}{2}(y + z) \quad \text{et} \quad N(y) + N(z) = 2, \quad \text{alors} \quad y = N(y)\, x \quad \text{et} \quad z = N(z)\, x.$$

2° Établir que si N est hermitienne, tout élément de S est S-extrémal.

D

S_k désigne la sphère unité de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{L}(E), \varphi_k)$.

1° On écrit u appartenant à $\mathcal{L}(E)$ sous la forme $w \circ h$ obtenue au A 2°.
Montrer l'équivalence : u S_k-extrémal $\Leftrightarrow$ h S_k-extrémal.

2° Soit h un endomorphisme hermitien positif, autre qu'une homothétie, et de valeurs propres $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \dots \geqslant \alpha_n$.

a. En utilisant une base orthonormale dans laquelle la matrice de h est diagonale, montrer que si h est S_k-extrémal alors :

(2) $$k \neq 1 \quad \text{et} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (1, 0, \dots, 0).$$

b. Réciproquement, montrer que si (2) est vérifiée, h est S_k-extrémal. (On pourra d'abord montrer que si $h = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ avec u_1 et u_2 dans S_k, alors $\psi(u_1) = \psi(u_2) = 1$.)

3° On suppose maintenant que h est l'homothétie de rapport $1/k$.

a. Montrer que si h est S_k-extrémal alors $k \neq n$.

b. Réciproquement, établir que si $k \neq n$, h est S_k-extrémal.

4° Quels sont les éléments extrémaux de S_k ?

TROISIÈME PARTIE

On conserve les notations de la deuxième partie; on considère un endomorphisme t de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ (donc t élément de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$), tel que $t(\mathcal{U}(E)) \subset \mathcal{U}(E)$. On rappelle que $\mathcal{U}(E)$ est connexe.

On se propose de prouver que l'image par t d'un endomorphisme de rang 1 est un endomorphisme de rang 1.

1° Soient u et v deux endomorphismes de E tels que, pour tout λ dans U, $\lambda u + v$ soit unitaire.

Montrer que $u^* \circ v = 0$ et que $(u^* \circ u) + (v^* \circ v) = \mathrm{Id}_E$.

2° Soient $u_1, u_2, \ldots, u_p$ $(p \geqslant 2)$ des endomorphismes de E tels que pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathrm{U}^p$, $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p$ soit unitaire.

a. Montrer que pour tout (i, j) avec $i \neq j$ $u_i^* \circ u_j = 0$, et que $\sum_{i=1}^{p} u_i^* \circ u_i = Id_E$.

En déduire que $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{rg}(u_i) = n$. ($\mathrm{rg}(u)$ désigne le rang de u).

b. Montrer que, pour tout endomorphisme unitaire w, $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{rg}(t(u_i \circ w)) = n$.

c. En déduire que, pour i donné, le rang de $t(u_i \circ w)$ reste constant lorsque w décrit $\mathcal{U}(E)$.

d. Montrer que, pour tout endomorphisme u unitairement équivalent à u_i, $\mathrm{rg}(t(u)) = \mathrm{rg}(t(u_i))$.

3° Vérifier que l'on peut trouver un entier p et des endomorphismes $u_1, \ldots, u_p$ de rang 1 tels que l'hypothèse du 2° soit satisfaite.

En déduire que l'image par t d'un endomorphisme de rang 1 est un endomorphisme de rang 1.

QUATRIÈME PARTIE

On reprend les notations de la première partie et on désigne par $\mathcal{U}$ le groupe unitaire d'ordre n, constitué des matrices A de $\mathcal{E}$ telles que $A^*A = I_n$ où A^* est l'adjointe de A.

Pour A dans $\mathcal{E}$ et k entier compris entre 1 et n, on pose :

$$\Phi_k(A) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k,$$

$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$ désignant les racines des valeurs propres, distinctes ou non, de la matrice hermitienne positive A^*A.

D'après la deuxième partie, Φ_k est une norme sur $\mathcal{E}$.

On désigne par γ_0 (resp. γ_0') l'ensemble des endomorphismes $T_{P,Q}$ (resp. $T'_{P,Q}$) obtenus pour P et Q décrivant $\mathcal{U}$; on pose $\Gamma_0 = \gamma_0 \cup \gamma_0'$.

1° Vérifier que si T appartient à Γ_0 alors T possède les propriétés suivantes :

$T(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$

Pour tout entier k compris entre 1 et n et toute matrice A de $\mathcal{E}$, $\Phi_k(T(A)) = \Phi_k(A)$.

2° En utilisant les différents résultats établis dans le problème, démontrer, pour T endomorphisme de $\mathcal{E}$, les réciproques des propriétés établies au 1°. On démontrera successivement :

a. Si $T(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$ alors T appartient à Γ_0 ;

b. Si pour toute matrice A de $\mathcal{E}$, $\Phi_1(T(A)) = \Phi_1(A)$, alors T est dans Γ_0 ;

c. Si pour toute matrice A de $\mathcal{E}$, $\Phi_n(T(A)) = \Phi_n(A)$, alors T est dans Γ_0 ;

d. Si pour toute matrice A de $\mathcal{E}$, $\Phi_k(T(A)) = \Phi_k(A)$ où $k \neq 1$ et $k \neq n$, alors T est dans Γ_0.

RAPPORT SUR L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES GENERALES

Le problème de mathématiques générales étudiait cette année les isométries de l'espace vectoriel des matrices carrées complexes d'ordre n pour certaines normes liées aux valeurs singulières de ces matrices. Les résultats étaient obtenus dans la quatrième partie, mais il était nécessaire de déterminer d'abord les endomorphismes conservant le rang 1 (première partie), puis ceux conservant le groupe unitaire (troisième partie). La seconde partie, quant à elle, définissait et étudiait les premières propriétés des normes envisagées.

Le problème était essentiellement inspiré des articles suivants, dans lesquels on trouvera d'autres approches de la question, ainsi que des références pour l'étude de la conservation d'autres quantités (déterminants, fonctions symétriques des valeurs propres, ...), ou pour certaines généralisations à la dimension infinie :

1) GRONE-MARCUS : Isometries of Matrix Algebras. Journal of Algebra 47 (1977)

2) RUSSO : Trace preserving mappings of matrix algebras Duke Math. Journal 36 (1969)

3) MARCUS : Transforms on tensor product spaces Pacific Journal of Math. (1959)

4) MARCUS : All linear operators leaving unitary group invariant Duke Math. Journal 26 (1959).

L'ensemble était relativement long, mais son niveau ne dépassait pas celui du premier cycle de l'enseignement supérieur, et l'indépendance des parties et un barême assez généreux auraient dû permettre à un candidat moyen d'obtenir une note convenable. Hélas, beaucoup de candidats, dominant mal les notions élémentaires d'algèbre linéaire, sont conduits, soit à des raisonnements inutilement longs, ce qui est un moindre mal, soit à des méthodes tout à fait incorrectes, où l'on procède par affirmations aléatoires.

En fin de compte, de nombreuses copies se résument à un survol des débuts des deux premières parties, avec quelques points obtenus ici ou là dans des questions trés faciles. Il va de soi que cela ne suffit pas.

Rappelons pour terminer ces généralités, que de futurs enseignants se doivent de soigner la présentation de leur copie (qu'exigeront-ilsde leurs élèves ?) et que, s'il faut savoir être concis, les raisonnements doivent être solidement justifiés (l'expression "il est clair que ...", souvent employée pour masquer une insuffisance, n'a jamais constitué une démonstration).

Première partie.

La notion de rang d'une matrice était au coeur de cette partie, et c'est souvent faute de bien la connaître et de bien savoir la traduire, que de nombreux candidats ont échoué dans ces questions. Une bonne compréhension des situations rencontrées est évidemment trés utile : elle évite, dans les cinq premières questions, des calculs aveugles (ainsi $X\mathcal{L}$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{E}$ dont toutes les colonnes sont colinéaires à X) ; elle permet d'adopter à l'occasion un point de vue vectoriel ; elle est indispensable dans la sixième question, la plus difficile de cette partie, dans laquelle de nombreuses interversions de quantificateurs et des calculs sans direction précise ont révélé que les candidats dominaient mal leur raisonnement.

Signalons quelques points :

- Si une matrice est de rang 1, ses vecteurs colonnes sont tous multiples de l'un d'entre eux, mais encore faut-il choisir ce dernier non nul.

- Sur les matrices carrées, il ne faut pas confondre l'équivalence et la similitude.

- Deux matrices de $\mathcal{E}$ sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang : cela permettait de résoudre facilement la question B2°/.

- Le résultat de la partie A est faux sur $\mathbb{R}$: la question 6°/b ne peut pas être traitée sans utiliser que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

<u>Deuxième partie</u>.

Le A de cette partie, qui demandait des démonstrations très classiques, est le mieux traité du problème. Il fallait cependant, au 2°/, commencer par déterminer les e'_i correspondant aux α_i non nuls, s'assurer qu'ils constituaient une famille orthonormale, et enfin compléter en une base orthonormale. On note aussi quelques maladresses pour justifier que h est hermitien : le plus simple était de souligner l'existence d'une base orthonormale dans laquelle sa matrice était diagonale et réelle.

Dans les questions 3°/ et 4°/, le raisonnement est incomplet si l'on ne considère pas la liste complète des n valeurs singulières, répétitions comprises.

La partie B contenait certaines des questions les plus difficiles du problème (les 2°/ et 3°/), mais quelle surprise de constater qu'une majorité de candidats ignore la définition d'une norme hermitienne ! Dans la plupart des copies, on tente de prouver directement qu'il s'agit d'une norme, et l'on bute inévitablement sur l'inégalité triangulaire, faute d'avoir cherché le produit scalaire hermitien associé.

La partie C a permis d'obtenir assez facilement quelques points supplémentaires. Le reste du problème n'a été que rarement abordé, et souvent de manière disparate et confuse.

Mathématiques générales - Répartition des notes

0 à 4	188
5 à 9	167
10 à 14	133
15 à 19	120
20 à 24	85
25 à 29	57
30 à 34	39
35 à 39	24
40 à 44	20
45 à 49	9
50 à 54	6
55 à 60	8