PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

DÉFINITIONS, NOTATIONS ET RAPPELS

1° Dans tout le problème $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ désignent respectivement les ensembles des entiers naturels, des entiers relatifs, des rationnels, des réels et des complexes. Si n est un entier ($n \geqslant 1$), $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uples de réels. Si $(x_i\,,\ i \in \mathrm{I})$ désigne une famille de nombres réels, on note $\sup\limits_{i \in \mathrm{I}} x_i$ leur borne supérieure et $\inf\limits_{i \in \mathrm{I}} x_i$ leur borne inférieure.

$$\mathbb{R}_+ = \{ x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0 \} \ ; \qquad \mathbb{R}_+^* = \{ x \in \mathbb{R},\ x > 0 \} \ ; \qquad \overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{ +\infty \}.$$

2° Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé. On dit que V est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ si V est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n)$ où $\mathcal{R}^n$ désigne la tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$. Lorsque $n = 1$ on dit que V est une variable aléatoire réelle. On note $\mathrm{P_V}$ la loi de V, c'est-à-dire la probabilité sur $\mathcal{R}^n$ image de P par V. Par abus de langage, V désigne aussi la classe de P-équivalence de l'application V. Pour tout A de $\mathcal{R}^n$, on note

$$\{ \mathrm{X} \in \mathrm{A} \} = \mathrm{X}^{-1}(\mathrm{A}) .$$

La notion de variable aléatoire complexe est obtenue en identifiant $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$.

On note 1_A la fonction indicatrice d'un ensemble $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire la variable aléatoire réelle qui vaut 1 sur A, et 0 sur le complémentaire de A.

3° Si $(\mathrm{V}_i\,,\ i \in \mathrm{I})$ est une famille de variables aléatoires (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) on note $\sigma(\mathrm{V}_i\,,\ i \in \mathrm{I})$ la plus petite sous-tribu de $\mathcal{A}$ rendant mesurables les applications V_i de Ω dans $\mathbb{R}^n$ pour tout $i \in \mathrm{I}$. Une application mesurable de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n)$ dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{R}^d)$ est dite borélienne.

4° Un processus ξ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est la donnée d'une famille $(\xi_t\,,\ t \in \mathbb{R}_+)$ de variables aléatoires d-dimensionnelles. On dit que ξ est *(presque sûrement) continu* s'il existe $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, de probabilité 1 tel que : pour tout ω de A, l'application $t \in \mathbb{R}_+ \to \xi_t(\omega) \in \mathbb{R}^d$ est continue.

On dit que deux processus *continus* ξ et ξ' à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ *ont même loi* si : pour toute suite finie $t_0, t_1, \ldots, t_n$ de réels positifs, les lois de $(\xi_{t_0}, \xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n})$ et $(\xi'_{t_0}, \xi'_{t_1}, \ldots, \xi'_{t_n})$ coïncident.

5° On note $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ l'espace vectoriel des classes de P-équivalence de variables (réelles ou complexes) sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ dont le module est de carré intégrable, muni de la norme $\|\,.\,\|_2$. Si V est une variable aléatoire, on note $\mathrm{V} \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ par l'abus de langage précisé au 2°.

6° Soient $\mathcal{F}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et V une variable aléatoire intégrable. $\mathrm{E}[\mathrm{V} \mid \mathcal{F}]$ désigne l'espérance conditionnelle de V par rapport à $\mathcal{F}$: $\mathrm{E}[\mathrm{V} \mid \mathcal{F}]$ est $\mathcal{F}$-mesurable et vérifie $\mathrm{E}[\mathrm{V}\,1_\mathrm{F}] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[\mathrm{V} \mid \mathcal{F}]\,1_\mathrm{F}]$ pour tout ensemble $\mathcal{F}$-mesurable F.

Si V est de la forme 1_A $(\mathrm{A} \in \mathcal{A})$ on notera aussi $\mathrm{E}[1_\mathrm{A} \mid \mathcal{F}]$ sous la forme $\mathrm{P}[\mathrm{A} \mid \mathcal{F}]$; si $\mathcal{F}$ est la tribu $\sigma(\mathrm{M})$ engendrée par la variable aléatoire M, on abrégera $\mathrm{E}[\,.\mid \mathcal{F}]$ par $\mathrm{E}[\,.\mid \mathrm{M}]$.

7° Une variable aléatoire V (respectivement un processus ξ) est dit indépendant d'une sous-tribu $\mathcal{H}$ de $\mathcal{A}$ si les tribus σ (V) et $\mathcal{H}$ (respectivement $\sigma(\xi_t, t \in \mathbb{R}_+)$ et $\mathcal{H}$) sont indépendantes.

Soient $(N_i, i \in I)$ et $(M_k, k \in K)$ deux familles de variables (à valeurs dans $\mathbb{R}^d$). On rappelle que les tribus $\sigma(N_i, i \in I)$ et $\sigma(M_k, k \in K)$ qu'elles engendrent sont indépendantes dès que : pour toute famille finie f_1, $f_2, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m$ de fonctions boréliennes bornées (ou seulement continues bornées) sur $\mathbb{R}^d$ et pour tout $(i_1, \dots, i_n) \in I^n$, pour tout $(k_1, \dots, k_m) \in K^m$,

$$E[f_1(N_{i_1}) \dots f_n(N_{i_n}) \, g_1(M_{k_1}) \dots g_m(M_{k_m})] = E[f_1(N_{i_1}) \dots f_n(N_{i_n})] \, . \, E[g_1(M_{k_1}) \dots g_m(M_{k_m})] .$$

8° On dit de même que des éléments aléatoires (ensembles, variables, tribus, processus, ...) sont *indépendants conditionnellement à un événement* A de $\mathcal{A}$ s'ils sont indépendants lorsque l'on munit $(\Omega, \mathcal{A})$ de la probabilité conditionnelle $P[\, . \,|A] = \dfrac{P[\, . \cap A]}{P[A]}$.

9° Soient $\mathcal{F}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$, M une variable aléatoire $\mathcal{F}$-mesurable (à valeurs dans $\mathbb{R}^m$) et N une variable aléatoire (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) indépendante de $\mathcal{F}$. Si φ est borélienne bornée sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$,

$$E[\varphi(M, N) \mid \mathcal{F}] = \int \varphi(M, x) \, P_N(dx) .$$

10° Une écriture du type : $\int_a^b f(t)\, dt$ $\left(\text{resp. } \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx\right)$ indique que l'on intègre la fonction (borélienne) f (resp. g) par rapport à la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{R}^n$).

11° Tous les éléments aléatoires introduits dans la suite sont supposés définis sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

PREMIÈRE PARTIE

1° Soit $(V_n, n \geqslant 1)$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, ayant un moment d'ordre 2 et centrées $(E[V_n] = 0)$. On note :

$$b_n = E[V_n^2] \quad \text{et pour } t \in [-1, +1], \quad S_n(t) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} V_k \exp(ik\pi t)$$

On suppose qu'il existe $\delta > 0$ avec

$$\sum_{k \geqslant 1} k^{\delta + 1/2} \, b_k < +\infty .$$

a. Montrer que, pour tout $t \in [-1, +1]$, la suite $(S_n(t), n \geqslant 1)$ converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vers une variable aléatoire complexe W_t.

b. Établir les majorations suivantes :

i) $$|S_n(t) - S_m(t)|^2 \leqslant \left(\sum_{m < k \leqslant n} V_k^2\right) + 2 \sum_{1 \leqslant j < n - m} \left| \sum_{m < k \leqslant n - j} V_k V_{k+j} \right| \quad (1 \leqslant m < n).$$

ii) $$E\left[\left| \sum_{m < k \leqslant n - j} V_k V_{k+j} \right|\right] \leqslant \left\{ \sum_{m < k \leqslant n - j} b_k b_{k+j} \right\}^{1/2} \quad (1 \leqslant m, n, j \; ; \; m + j \leqslant n).$$

iii) $$E\left[\left\{ \sup_{t \in [-1, +1]} |S_n(t) - S_m(t)| \right\}^2\right] \leqslant \left(1 + \sqrt{2(n - m)}\right) \sum_{m < k \leqslant n} b_k \quad (1 \leqslant m < n).$$

c. Montrer que pour toute suite $(c_n, n \geqslant 1)$ de réels on a :

$$\sum_{n \geqslant 1} |c_n| 2^{n/4} \leqslant (2^\delta - 1)^{-1/2} \cdot \left(\sum_{n \geqslant 1} c_n^2 \, 2^{n(\delta + 1/2)} \right)^{1/2}.$$

En déduire :

$$\sum_{n \geqslant 1} 2^{n/4} \left(\sum_{2^n < k \leqslant 2^{n+1}} b_k \right)^{1/2} \leqslant (2^\delta - 1)^{-1/2} \left(\sum_{k \geqslant 1} k^{1/2+\delta} \, b_k \right)^{1/2}.$$

d. Soit, pour n entier non nul, $M_n = \sup_{t \in [-1, +1]} | S_{2^{n+1}}(t) - S_{2^n}(t) |$.

Montrer que $\sum_{n \geqslant 1} E[M_n]$ est fini. En déduire : $P\left[\sum_{n \geqslant 1} M_n < +\infty \right] = 1$.

Montrer que, pour presque tout ω de Ω, la suite de fonctions :

$$t \longrightarrow \sum_{1 \leqslant k \leqslant 2^n} V_k(\omega) \exp(ik\pi t) \qquad (n \geqslant 0, \ t \in [-1, +1])$$

converge uniformément sur $[-1, +1]$. En conclure que l'on peut supposer (*et c'est ce que l'on fera dans la suite*) que W est presque sûrement continu.

2° *a.* Soit $f \in L^2([-1, +1], du)$ et pour $k \in \mathbb{Z}$:

$$a_k = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(t) \exp(-ik\pi t) \, dt.$$

On rappelle : $f(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \exp(ik\pi u)$ dans $L^2([-1, +1], du)$.

Montrer que si f est paire, $a_k = a_{-k}$ pour tout entier k.

b. Soit $g \in L^2([0, 1], du)$. Montrer qu'il existe des coefficients $(\gamma_n, n \in \mathbb{N})$ tels que :

$$g(u) = \sum_{n \geqslant 0} \gamma_n \cos n\pi u \quad \text{dans} \quad L^2([0, 1], du).$$

c. En déduire :

i) pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, $1_{[0,t]}(u) - t = \dfrac{2}{\pi} \sum_{k \geqslant 1} \dfrac{\sin k\pi t}{k} \cos k\pi u$ dans $L^2([0, 1], du)$.

ii) pour $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1$, $t(1 - s) = \dfrac{2}{\pi^2} \sum_{k \geqslant 1} \dfrac{\sin k\pi t \ \sin k\pi s}{k^2}$.

3° On suppose *dorénavant* que $\pi^2 n^2 b_n = 2 \ (n \geqslant 1)$; C_t désigne, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, la partie imaginaire de W_t.

a. Montrer que pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, C_t est une variable aléatoire centrée, de variance $t(1 - t)$. Calculer $E[C_t C_s]$ pour $0 \leqslant s, t \leqslant 1$.

b. Soit pour t réel positif, $B_t = (1 + t) C_{\frac{t}{1+t}}$. Montrer que pour s et t positifs, $E[B_t B_s] = \inf(t, s)$.

4° On suppose *désormais de plus* que chaque variable V_n suit une loi de Laplace-Gauss.

a. Montrer que les suites de réels $(\lambda_k, k \geqslant 1)$ telles que la suite $\left(\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \lambda_k V_k, n \geqslant 1 \right)$ converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sont exactement les suites vérifiant $\sum_{k \geqslant 1} \frac{\lambda_k^2}{k^2} < +\infty$, et montrer que dans ce cas la limite dans L^2 est une variable aléatoire gaussienne, centrée, de variance $\frac{2}{\pi^2} \sum_{k \geqslant 1} \frac{\lambda_k^2}{k^2}$.

b. Soient $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ des réels et $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$;

Montrer que la variable aléatoire $\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} u_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})$ est centrée, a pour variance $\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} u_j^2 (t_j - t_{j-1})$, et est gaussienne.

En déduire que les variables $(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}, 1 \leqslant j \leqslant n)$ sont indépendantes.

c. Montrer que $E[B_1^4] = 3$. En déduire que, pour tout $t \geqslant 0$, la suite

$\left(\sum_{0 < k \leqslant n} \left(B_{\frac{k}{n}t} - B_{\frac{k-1}{n}t} \right)^2, n \geqslant 1 \right)$ converge vers t dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

DEUXIÈME PARTIE

On suppose définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ trois copies indépendantes X, Y et Z du processus B (*i.e.* X, Y, Z sont presque sûrement continus, ont même loi que B et les tribus $\sigma(X_t, t \geqslant 0)$, $\sigma(Y_t, t \geqslant 0)$ et $\sigma(Z_t, t \geqslant 0)$ sont indépendantes. U désigne le processus (à valeurs dans $\mathbb{R}^3$) (X, Y, Z).

Pour $t \geqslant 0$, $\mathcal{F}_t$ désigne la tribu $\sigma(U_s, 0 \leqslant s \leqslant t)$; $\mathcal{F}_\infty = \sigma(U_s, s \geqslant 0)$.

Une variable T à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est un temps d'arrêt si $\{\omega \mid T(\omega) \leqslant t\}$ est dans $\mathcal{F}_t$ pour tout réel positif t.

$$\mathcal{F}_T = \{ A \in \mathcal{F}_\infty ,\ A \cap \{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t \qquad \forall\, t \geqslant 0 \}.$$

1° Soient S et T des temps d'arrêt.

a. Montrer que $\mathcal{F}_S$ est une tribu et que S est $\mathcal{F}_S$ - mesurable.

b. Si S est inférieur à T, montrer que $\mathcal{F}_S$ est contenue dans $\mathcal{F}_T$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 1)$, soit T_n la variable définie par :

$$T_n = (k+1)\,2^{-n} \text{ sur } \{k\,2^{-n} \leqslant T < (k+1)\,2^{-n}\},\ T_n = +\infty \text{ sur } \{T = +\infty\}.$$

Montrer que $(T_n, n \geqslant 1)$ est une suite de temps d'arrêt, décroissant vers T. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{F}_{T_n}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $A \cap \left\{ T_n = \dfrac{k+1}{2^n} \right\}$ appartient à $\mathcal{F}_{(k+1)2^{-n}}$.

2° *a.* Soit $r \geqslant 0$; montrer que le processus $t \longrightarrow U_{t+r} - U_r$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_r$ et a même loi que U.

b. Soit T un temps d'arrêt; montrer que, conditionnellement à $\{T < +\infty\}$, le processus $t \longrightarrow U_{T_n + t} - U_{T_n}$ est indépendant de $\mathcal{F}_{T_n}$ et a même loi que U. En déduire que, conditionnellement à $\{T < +\infty\}$, le processus $t \longrightarrow U_{T+t} - U_T$ est indépendant de $\mathcal{F}_T$, de même loi que U.

c. Montrer que pour φ fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}^3$, $t \geqslant 0$ et $h > 0$, on a :

$$E[\varphi(U_{t+h}) \mid \mathcal{F}_t] = \frac{1}{(2\pi h)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} dv\, \varphi(v) \exp - \left(\frac{\|v - U_t\|^2}{2h} \right)$$

où $\|u\| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ est la norme euclidienne du vecteur $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$.

TROISIÈME PARTIE

Q et G désignent les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\begin{cases} Q(h, a, r) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi h}} \dfrac{r}{a} \operatorname{sh}\left(\dfrac{ar}{h}\right) \exp\left(-\dfrac{a^2+r^2}{2h}\right) & (a > 0) \\ Q(h, 0, r) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi h^3}} r^2 \exp\left(-\dfrac{r^2}{2h}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} G(p, a, r) = \dfrac{1}{\sqrt{2p}} \dfrac{r}{a} \left(\exp\left(-\sqrt{2p}\,|r-a|\right) - \exp\left(-\sqrt{2p}\,(r+a)\right)\right) \cdot & (a > 0) \\ G(p, 0, r) = 2r \exp\left(-\sqrt{2p}\, r\right) \end{cases}$$

On admettra l'égalité pour $p > 0$ et $b \geqslant 0$:

$$\sqrt{2p} \int_0^\infty \exp\left(-\left(pt + \frac{b^2}{2t}\right)\right) \frac{dt}{\sqrt{2\pi t}} = \exp\left(-b\sqrt{2p}\right).$$

On pourra aussi admettre le résultat suivant : soit f une fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}_+$; si $\int_0^\infty f(t) \exp(-pt)\, dt$ est nulle pour tout $p > 0$, alors f est nulle presque sûrement (pour la mesure de Lebesgue).

U étant le processus (à valeurs dans $\mathbb{R}^3$) défini dans la deuxième partie, si $u \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}_+$, R_t^u est le réel $\| u + U_t \|$; pour simplifier l'écriture on remplacera R_t^0 par R_t.

1° Soit f une fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}_+$.

a. Soit w un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$, h un réel $(h > 0)$; montrer l'égalité :

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\|x\|) \exp\left(-\frac{\|x-w\|^2}{2h}\right) \frac{dx}{(2\pi h)^{3/2}} = \int_0^\infty f(r)\, Q(h, \|w\|, r)\, dr.$$

(On pourra faire un changement de repère orthonormé tel que $\dfrac{w}{\|w\|}$ soit l'un des vecteurs de base, puis intégrer en coordonnées sphériques.)

b. Établir l'égalité suivante $(t \geqslant 0, h > 0)$:

$$E\left[f(R_{t+h}^u) \mid \mathcal{F}_t\right] = \int_0^\infty f(r)\, Q(h, R_t^u, r)\, dr \qquad (u \in \mathbb{R}^3).$$

Quelle est la loi de R_t ?

c. Montrer que si p est strictement positif, on a :

$$E\left[\int_0^\infty f(R_{t+h}^u) \exp(-ph)\, dh \mid \mathcal{F}_t\right] = \int_0^\infty f(r)\, G(p, R_t^u, r)\, dr \qquad (u \in \mathbb{R}^3).$$

2° *a.* Soient $0 < t_1 < t_2 \dots < t_n$ des réels et $u \in \mathbb{R}^3$; calculer la densité de la loi du vecteur aléatoire $(\mathrm{R}^u_{t_1}, \mathrm{R}^u_{t_2}, \dots, \mathrm{R}^u_{t_n})$. Montrer que les processus $t \longrightarrow \mathrm{R}^u_t$ et $t \longrightarrow \mathrm{R}^v_t$ ont la même loi si $\| u \| = \| v \|$.

b. Soient en outre $t \geqslant 0$ et $f_1, f_2, \dots, f_n$ des fonctions boréliennes bornées sur $\mathbb{R}_+$; soit Φ la fonction définie pour $r \in \mathbb{R}_+$ par :

$$\Phi(r) = \mathrm{E}\left[f_1(\mathrm{R}^{r\alpha}_{t_1}) \dots f_n(\mathrm{R}^{r\alpha}_{t_n})\right] \qquad (\alpha \in \mathbb{R}^3, \|\alpha\| = 1).$$

Montrer que Φ est borélienne et que :

$$\mathrm{E}\left[f_1(\mathrm{R}^u_{t+t_1}) \dots f_n(\mathrm{R}^u_{t+t_n}) \mid \mathcal{F}_t\right] = \Phi(\mathrm{R}^u_t) = \mathrm{E}\left[f_1(\mathrm{R}^u_{t+t_1}) \dots f_n(\mathrm{R}^u_{t+t_n}) \mid \mathrm{R}^u_t\right].$$

3° Soient $u \in \mathbb{R}^3$ et $a > 0$; on abrégera dans cette question R^u_t par ρ_t.

On définit sur Ω une variable τ (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}_+}$) en posant :

$$\tau(\omega) = +\infty \text{ si, pour tout } t \geqslant 0,\ \rho_t(\omega) \text{ est différent de } a ;$$

$$\tau(\omega) = \inf(t \geqslant 0,\ \rho_t(\omega) = a) \quad \text{sinon}.$$

a. Montrer que, pour tout réel positif s, on a :

$$\{ s < \tau \} = \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geqslant 1}} \bigcap_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q \leqslant s}} \left\{ |\rho_q - a| \geqslant \frac{1}{n} \right\}.$$

En déduire que τ est un temps d'arrêt.

b. Soient f une fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $p > 0$.

Montrer que, pour tout $s \geqslant 0$, $\int_0^s f(\rho_t) \exp(-pt)\, dt$ est $\mathcal{F}_s$ - mesurable.

Montrer :

$$\int_0^\tau f(\rho_t) \exp(-pt)\, dt = \lim_n \sum_{k \geqslant 0} 1_{\left\{\frac{k}{n} \leqslant \tau < \frac{k+1}{n}\right\}} \int_0^{\frac{k}{n}} f(\rho_t) \exp(-pt)\, dt$$

En déduire que $\int_0^\tau f(\rho_t) \exp(-pt)\, dt$ est $\mathcal{F}_\tau$ - mesurable. Établir en outre l'égalité :

$$\int_0^\infty f(\rho_t) \exp(-pt)\, dt$$
$$= \int_0^\tau f(\rho_t) \exp(-pt)\, dt + 1_{\{\tau < +\infty\}} \exp(-p\tau) \int_0^\infty f(\rho_{t+\tau}) \exp(-pt)\, dt.$$

c. Montrer que, conditionnellement à $\{\tau < +\infty\}$, le processus $t \longrightarrow \rho_{t+\tau}$ est indépendant de $\mathcal{F}_\tau$ et a même loi que $\mathrm{R}^{a\alpha}$ dès que $\|\alpha\| = 1$. En déduire, pour f fonction borélienne bornée, l'égalité :

$$\mathrm{E}\left[\int_0^\infty f(\rho_t) \exp(-pt)\, dt\right]$$
$$= \mathrm{E}\left[\int_0^\tau f(\rho_t) \exp(-pt)\, dt\right] + \mathrm{E}\left[1_{\{\tau < +\infty\}} \exp(-p\tau)\right] \int_0^\infty f(r)\, \mathrm{G}(p, a, r)\, dr.$$

d. En utilisant les fonctions $f_1 = 1_{]0,a[}$ ou $f_2 = 1_{]a,+\infty[}$, établir :

$$E\left[1_{\{\tau<+\infty\}} \exp(-p\tau)\right] = \frac{a}{\|u\|} \exp\left(-\sqrt{2p}\,(\|u\| - a)\right) \qquad \text{si} \quad \|u\| \geqslant a,$$

$$= \frac{a}{\|u\|} \frac{\operatorname{sh}(\|u\|\sqrt{2p})}{\operatorname{sh}(a\sqrt{2p})} \qquad \text{si} \quad 0 < \|u\| < a,$$

$$= \frac{a\sqrt{2p}}{\operatorname{sh}(a\sqrt{2p})} \qquad \text{si} \quad 0 = \|u\|.$$

En déduire : $P[\tau < +\infty] = \inf\left(1, \frac{a}{\|u\|}\right)$. Montrer que l'ensemble $\{\exists\, t \geqslant 0,\ \rho_t = 0\}$ est $\mathcal{F}_\infty$ - mesurable et qu'il est de probabilité nulle lorsque $\|u\|$ est non nul.

e. On suppose $\|u\| > a$. Soit f borélienne bornée sur $\mathbb{R}_+$; montrer pour $p > 0$ l'égalité :

$$E\left[\int_0^\tau f(\rho_t)\exp(-pt)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_a^\infty \frac{r}{\|u\|} f(r) \left(\exp\left(-\sqrt{2p}\,\big|r - \|u\|\big|\right) - \exp\left(-\sqrt{2p}\,(\|u\| + r - 2a)\right)\right) dr.$$

En déduire :

$$E\left[f(\rho_h)\, 1_{\{h<\tau\}}\right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi h}} \int_a^\infty \frac{r}{\|u\|} \left(\operatorname{sh} \frac{(r-a)(\|u\| - a)}{h}\right) \left(\exp - \frac{(r-a)^2 + (\|u\| - a)^2}{2h}\right) f(r)\, dr$$

(h réel, $h > 0$).

4° *a.* Soit pour n entier, $n \geqslant 1$, $A_n = \left\{\exists\, t \geqslant 0,\ R_{\frac{1}{n}+t} = 0\right\}$.

Montrer que A_n est $\mathcal{F}_\infty$ - mesurable ; calculer $P[A_n \mid R_{1/n}]$. En déduire que $\{\omega \mid t \longrightarrow U_t(\omega)$ ne retourne pas en $0\}$ est un événement de probabilité 1.

b. Soient pour a et b réels strictement positifs :

$$\tau_a = \inf(t \geqslant 0,\ R_t = a) \quad (\inf \varnothing = +\infty \text{ par convention}) ;$$

$$\sigma_b = \sup(t \geqslant 0,\ R_t < b).$$

Montrer que τ_a est presque sûrement fini ; $a \longrightarrow \tau_a$ est croissante et tend vers $+\infty$ avec a. Montrer que l'on a presque sûrement :

$$\{\tau_a < \sigma_b\} = \{\exists\, u \in \mathbb{Q},\ u > 0,\ R_{u+\tau_a} < b\}.$$

En déduire :

$$P[\tau_a < \sigma_b] = \inf\left(1, \frac{b}{a}\right) \quad \text{et} \quad P[\sigma_b < +\infty] = 1.$$

Montrer que R_t tend presque sûrement vers $+\infty$ avec t.

5° Soient pour $t \geqslant 0$ et $h > 0$, $J_t = \inf_{u \geqslant t} R_u$, $I_{t,h} = \inf_{t \leqslant u \leqslant t+h} R_u$.

a. Montrer que le processus J est presque sûrement continu et que $J_t = \inf(J_{t+h}, I_{t,h})$.

b. Montrer que pour $t \geqslant 0$, $b > 0$, $\{J_t < b\} = \{\exists\, \varepsilon \in \mathbb{Q},\ \varepsilon \geqslant 0,\ R_{\varepsilon + t} < b\}$.

En déduire les égalités :

$$P[J_t \geqslant b \mid \mathcal{F}_t] = \sup\left(0,\ 1 - \frac{b}{R_t}\right) = P[J_t > b \mid \mathcal{F}_t] \quad (t > 0);$$

$$E[f(J_t) \mid \mathcal{F}_t] = \frac{1}{R_t}\int_0^{R_t} f(j)\, dj \ (t > 0, f \text{ borélienne bornée});$$

$$E[g(R_t, J_t) \mid \mathcal{F}_t] = \frac{1}{R_t}\int_0^{R_t} g(R_t, j)\, dj \ (t > 0,\ g \text{ borélienne bornée sur } \mathbb{R}_+^2).$$

c. Soient g borélienne bornée sur $\mathbb{R}_+^2$ et $a > 0$.

i) Démontrer l'égalité :

$$E[g(R_{t+h}, J_{t+h})\, 1_{\{J_t > a\}} \mid \mathcal{F}_t] = E\left[\frac{1}{R_{t+h}}\int_a^{R_{t+h}} g(R_{t+h}, j)\, dj\ 1_{\{a < R_{t+h},\ a < I_{t,h}\}} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

ii) Soit $\tau_{t,a} = \inf(s \geqslant 0,\ R_{t+s} \leqslant a)$. Déduire de l'égalité :

$\{\tau_{t,a} > h\} = \{a < I_{t,h}\}$ la relation :

$$E[g(R_{t+h}, J_{t+h})\, 1_{\{a < J_t\}} \mid \mathcal{F}_t]$$

$$= 1_{\{a < R_t\}} \frac{1}{R_t}\sqrt{\frac{2}{\pi h}}\int_a^{\infty}\left(\operatorname{sh}\frac{(R_t - a)(r - a)}{h}\right)\left(\exp - \frac{(r-a)^2 + (R_t - a)^2}{2h}\right)\int_a^{r} g(r, j)\, dj\, dr$$

d. Montrer que pour f borélienne bornée sur $\mathbb{R}$ et $a > 0$, on a :

$$E[f(2J_{t+h} - R_{t+h})\, 1_{\{a < J_t\}} \mid \mathcal{F}_t]$$

$$= 1_{\{a < R_t\}} \frac{1}{R_t}\int_a^{R_t} \frac{1}{\sqrt{2\pi h}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x) \exp\left(-\frac{(x - 2y + R_t)^2}{2h}\right) dx\right) dy.$$

Notons $\beta_t = 2J_t - R_t$ et $\mathcal{H}_t$ la tribu engendrée par $\mathcal{F}_t$ et J_t.

Montrer que :

$$E[f(\beta_{t+h}) \mid \mathcal{H}_t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}}\int_{\mathbb{R}} f(x) \exp\left(-\frac{(x - \beta_t)^2}{2h}\right) dx.$$

Montrer enfin que β a même loi que B.

RAPPORT SUR L'EPREUVE DE PROBABILITES ET STATISTIQUES

Le but du problème était d'établir quelques propriétés de la norme euclidienne Z du mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. La première partie donne une construction du brownien réel ; la deuxième traite de la propriété de Markov forte du brownien tridimensionnel. Dans la partie III on étudie les lois des premiers et derniers temps de passage de Z et le théorème de Pitman : si J est le processus des minima futurs de Z, 2J-Z est un mouvement brownien réel.

Dans la première partie, on attendait des candidats qu'ils connaissent et sachent manipuler dans des situations "concrètes" : inégalité de Schwarz et convergence dans L^2 et l^2, variables aléatoires indépendantes, variables et vecteurs gaussiens, calculs de moments. Les deuxième et troisième parties étaient plutôt centrées sur les notions de tribus, de mesurabilité, d'espérances et de lois conditionnelles, notions que l'on voulait faire mettre en pratique dans quelques calculs explicites.

Quelques candidats ont abordé la deuxième partie, très peu la troisième (l'énoncé était long mais jamais conçu pour arrêter les candidats). Le niveau d'ensemble est faible, malgré un barême large et de nombreuses questions faciles parsemant le problème.

Corrigé résumé du problème

Première partie

1) Pour $1 \leqq m < n$, $|S_n(t)-S_m(t)|^2 = \sum_{m<h,k\leqq n} V_k V_h \exp i\,\bar{a}(k-h)t$

$$= \sum_{m<k\leqq n} V_k^2 + 2 \sum_{1\leqq j<n-m} \cos(\bar{a}jt) \left(\sum_{m<k\leqq n-j} V_k V_{k+j} \right) ;$$

Les $(V_k,\ k\geqq 1)$ sont indépendantes, centrées ; par suite :

$$E\left[|S_n(t)-S_m(t)|^2\right] = \sum_{m<k\leqq n} E\left[V_k^2\right] \leqq \sum_{m<k\leqq n} k^{S+\frac{1}{2}} b_k ;$$

La suite $(S_n(t), n\geqq 1)$, de Cauchy dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, a, P)$, converge vers une variable aléatoire W_t.

b-i) résulte de : $|\cos x| \leqq 1$ $(x \in R)$.

L'inégalité de Schwarz dans $L^2(\Omega,a,P)$ donne :

$$(E[|\sum_{m<k\leq n-j} V_k V_{k+j}|])^2 \leq E[(\sum_{m<k\leq n-j} V_k V_{k+j})^2] = \sum_{m<k\leq n-j} b_k b_{k+j}$$

(indépendance et centrage des V_k et $j\geq 1$). b-i) donne une majoration uniforme en t et b-iii) résulte alors de b-ii) et de l'inégalité de Schwarz dans l^2 ; il en est de même pour c). Comme pour tout n, $[E\ M_n] \leq (E[M_n^2])^{1/2}$, les majorations établies en c) montrent que $\sum_{n\geq 1}[E\ M_n]$ $(=E[\sum_{n\geq 1} M_n]$ par convergence monotone) est fini ; $\sum_{n\geq 1} M_n$ est intégrable, donc presque sûrement fini.

Si $\sum_{n\geq 1} M_n(\omega)$ est fini, la série de terme général $\sup_t |\sum_{2^n<k\leq 2^{n+1}} V_k(\omega) \exp i\, k\pi t|$ est convergente, ce qui implique la convergence uniforme de $t \to \sum_{k=1}^{2^n} V_k(\omega) \exp i\, k\pi t$;

la limite donne une <u>version continue</u> de $t \to W_t$, la suite $(S_{2^n}, n\geq 1)$ étant extraite de la suite $(S_k, k\geq 1)$.

2) a) est trivial (changer t en $-t$ dans l'intégrale définissant a_k). Pour b), on prolonge par parité g en une fonction de $L^2([-1,+1],du)$ que l'on développe en série de Fourier ; en se restreignant à $[0,1]$, on a :

$$g(u) = \sum_{n\geq 0} \gamma_n \cos n\pi u \quad \text{dans} \quad L^2([0,1],du), \quad \text{où} \quad \gamma_0 = \int_0^1 g(u)\,du \ ;$$

$$\gamma_n = 2\int_0^1 g(u) \cos n\pi u\, du \quad (n \geq 1).$$

Si $g = 1_{[0,t]} - t$, b) donne :

$$1_{[0,t]} - t = \frac{2}{\pi} \sum_{n\geq 1} \frac{\sin n\pi t}{n} \cos n\pi u \quad \text{dans} \quad L^2([0,1],du), \text{ donc}$$

aussi dans $L^1([0,1],du)$, d'où ii) en intégrant terme à terme.

3) $C_t = \sum_{k\geq 1} V_k \sin k\pi t$ dans $L^2(\Omega,a,P)$; les $(V_k, k\geq 1)$ sont centrées, il en est de même de C_t et :

$$E\left[C_t C_s\right] = \sum_{k\geq 1}\left[E\, V_k^2\right](\sin k\pi s)(\sin k\pi t) = t\wedge s(1-t\vee s)$$

d'après 2) (en particulier $E\left[C_t^2\right] = t(1-t)$).

4) a) Dire que la suite $\left(\sum_{1\leq k\leq n} \lambda_k V_k, n\geq 1\right)$ converge dans

$L^2(\Omega,a,P)$, c'est dire qu'elle y est de Cauchy ; les $(V_k, k\geq 1)$ étant indépendantes et centrées, c'est aussi dire :

$\sum_{k\geq 1} \lambda_k^2 E\left[V_k^2\right] < +\infty$; si on ajoute que les $(V_k, k\geq 1)$ sont gaussiennes,

Le passage par les fonctions caractéristiques montre que la limite est gaussienne (centrée, de variance $\sum_{k\geq 1} \lambda_k^2 E\left[V_k^2\right]$).

b) $\sum_{1\leq j\leq n} u_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})$ est limite dans $L^2(\Omega,a,P)$ de $\sum_{1\leq k\leq n} \lambda_k V_k$,

où $\lambda_k = \sum_{i\leq j\leq n} u_j \left((1+t_j)\left(\sin \frac{k\pi t_j}{1+t_j}\right) - (1+t_{j-1})\left(\sin \frac{k\pi t_{j-1}}{1+t_{j-1}}\right)\right)$;

c'est donc, d'après a) une variable gaussienne centrée ; le calcul direct, à l'aide de 3), montre que sa variance est $\sum_{1\leq j\leq n} u_j^2 (t_j - t_{j-1})$; la matrice de covariance du vecteur gaussien $(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}, 1\leq j\leq n)$ est diagonale ; c'est dire que les composantes sont indépendantes.

c) B_1 est gaussienne centrée, de variance 1 et

$E\left[B_1^4\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^4 \exp -\frac{x^2}{2}\, dx$ se calcule par intégration par parties.

Enfin $E\left[\left(t - \sum_{0<k\leq n} \left(B_{\frac{k}{n}t} - B_{\frac{k-1}{n}t}\right)^2\right)^2\right] = 2\,\frac{t^2}{n}$.

Deuxième partie

1) S étant un temps d'arrêt, on vérifie sans peine : $\Omega\ \mathcal{F}_S$; $\mathcal{F}_S$ est stable par union dénombrable et par complémentation.

$({}^cA \cap \{S\leq t\} = {}^c(A \cap \{S\leq t\}) \cap \{S\leq t\})$; $\mathcal{F}_S$ est bien une tribu.

Pour montrer que S est $\mathcal{F}_S$-mesurable, il suffit d'établir :

$\{S \leqq a\}$ appartient à $\mathcal{F}_S$ pour tout a $\mathbb{R}_+$; or, pour $t \geqq 0$, $\{S \leqq a\} \cap \{S \leqq t\} = \{S \leqq a \wedge t\} \in \mathcal{F}_{a\wedge t} \subset \mathcal{F}_t$.

En outre, si T est un temps d'arrêt supérieur à S et $A \in \mathcal{F}_S$, pour tout $t \geqq 0$, $A \cap \{T \leqq t\}$ appartient à $\mathcal{F}_t$, comme intersection des deux ensembles (de $\mathcal{F}_t$) $A \cap \{S \leqq t\}$ et $\{T \leqq t\}$; on a alors $A \in \mathcal{F}_Y$ et $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$. Le point c) est facile si l'on remarque que pour T temps d'arrêt et $t>0$, $\{T<t\} = \bigcup_{n \geqq 1} \{T \leqq t - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_t$.

2) a) D'après I4) les accroissements de U sont indépendants, stationnaires. En utilisant le rappel 7 on montre facilement que le processus $t \to U_{t+r} - U_t$ a même loi que U et est indépendant de $\mathcal{F}_r$.

b) Soit $A \in \mathcal{F}_{T_n}$, k $\mathbb{N}^*$, $f_1, f_2, \ldots, f_k$ des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}^3$, $0 \leqq t_1, \ldots, t_k$;

$$E\left[f_1(U_{T_n+t_1} - U_{T_n}) \ldots f_k(U_{T_n+t_k} - U_{T_n}) 1_A 1_{\{T_n<+\infty\}}\right]$$

$$\sum E\left[f_1(U_{t_1+\frac{m+1}{2^n}} - U_{\frac{m+1}{2^n}}) \ldots f_k(U_{t_k+\frac{m+1}{2^n}} - U_{\frac{m+1}{2^n}}) 1_{A\cap\{T_n = \frac{m+1}{2^n}\}}\right] ;$$

puisque $A \cap \{T_n = \frac{m+1}{2^n}\} \in \mathcal{F}_{\frac{m+1}{2^n}}$ (cf II 1)), on peut appliquer II 2)a) au terme générique de la série, qui vaut donc :

$$E\left[f_1(U_{t_1}) \ldots f_k(U_{t_k})\right] P\left[A \cap \{T_n = \frac{m+1}{2^n}\}\right] ;$$

par sommation (en m) :

$$E\left[f_1(U_{T_n+t_1} - U_{T_n}) \ldots f_k(U_{T_n+t_k} - U_{T_n}) 1_A 1_{\{T_n<+\infty\}}\right] =$$

$$E\left[f_1(U_{t_1}) \ldots f_k(U_{t_k})\right] P\left[A \ \{T_n<+\infty\}\right] \quad (*)$$

(d'où l'indépendance annoncée et le fait que $t \to U_{T_n+t} - U_{T_n}$ a même loi que U, conditionnellement à $\{T_n<+\infty\}$).

Le passage de T_n à T se fait par convergence dominée dans (*), en se limitant à $A \in \mathcal{F}_T$ ($\subset \mathcal{F}_{T_n}$, cf II 1)) ($\{T<+\infty\} = \{T_n<+\infty\}$).

c) U_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable et $U_{t+h} - U_t$ est un vecteur gaussien centré, de matrice de covariance h Id, indépendant de $\mathcal{F}_t$ (voir II 2-a).

Le rappel 9 et l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation donnent la formule indiquée.

Troisième partie

1) a) On fait le changement de repère indiqué (qui laisse la mesure de Lebesgue invariante) puis on passe en coordonnées sphériques :

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(||x||)\exp - \frac{||x-w||^2}{2h} \frac{dx}{(2\pi h)^{3/2}} =$$

$$\int_0^\infty f(r) r^2 dr \exp - \frac{r^2+||w||^2}{2h} \frac{1}{(2\pi h)^{3/2}} \int_0^\pi \exp-(\frac{r||w||}{h}\cos\Theta)\sin\Theta d\Theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$\int_0^\infty f(r) Q(h,||w||,r)dr, \quad \text{par définition de } Q.$$

La formule reste valable pour w = 0.

b) R^u_{t+h} est la norme euclidienne de $u+U_{t+h} = u+U_t+U_{t+h}-U_t$; d'après II 2) et III 1) a),

$$E[f(R^u_{t+h}) \mid \mathcal{F}_t] = \int_0^\infty f(r)Q(h,R^u_t,r)dr.$$

R_h a pour densité $Q(h,0,r)1_{\{r>0\}}$.

c) se déduit de b) grâce au théorème de Fubini.

2) a) En utilisant III 1)b) et le théorème de Fubini, on montre par récurrence sur n, que si $f_1,\ldots f_n$ sont boréliennes bornées sur $\mathbb{R}_+$,

$$E[f_1(R^u_{t_1})\ldots f_v(R^u_{t_n})] =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} dr_1\ldots dr_n \, f_1(r_1)\ldots f_n(r_n) Q(t_1,||u||,r_1)Q(t_2-t_1,r_1,r_2)\ldots$$

$$\ldots Q(t_n-t_{n-1},r_{n-1},r_n) ;$$

La densité de la loi de $(R^u_{t_1}, \dots R^u_{t_n})$ ne dépend que de $||u||$;

les processus $t \to R^u_t$ et $t \to R^v_t$ ont donc même loi (rappel 4)

si $||u|| = ||v||$.

b) Le caractère borélien de Φ est obtenu par classe monotone. Si Y est le processus $U_{.+t}-U_t$, on a :

$$E\left[f_1(R^u_{t+t_1})\dots f_n(R^u_{t+t_n})\,|\mathcal{F}_t\right] =$$

$$E\left[f_1(||u+U_t+Y_{t_1}||)\dots f_n(||u+U_t+Y_{t_n}||)|\mathcal{F}_t\right] = \text{(II 2) et rappel 9)}$$

$$\int f_1(||u+U_t+y_1||)\dots f_n(||u+U_t+y_n||)P_{(Y_{t_1},\dots,Y_{t_n})}(dy_1,\dots,dy_n)$$

$= \text{(II 2) et III 2)a))}\ \Phi(R^u_t)$;

comme R^u_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable, on a aussi

$$\Phi(R^u_t) = E\left[f_1(R^u_{t+t_1})\dots f_n(R^u_{t+t_n})\,|R^u_t\right]$$

3) a) L'égalité des deux ensembles résulte de la définition de τ et de la continuité de $t \to f_t$; f_q est $\mathcal{F}_q$-mesurable pour tout q ; on en déduit $\{s<\tau\}$ est dans $\mathcal{F}_s$ pour tout s, i.e. est un temps d'arrêt.

b) $(\omega,t)\in\Omega\,[0,s] \to f(f_t(\omega))\exp\text{-}pt$ est $\mathcal{F}_s\otimes\mathbb{R}_+$-mesurable ; par suite $\int_0^s f(f_t)\exp\text{-}pt\ dt$ est $\mathcal{F}_s$-mesurable ; considérée comme fonction de $s(\in\bar{\mathbb{R}}_+)$ elle est continue, d'où :

$$1_{\{\tau<+\infty\}}\int_0^\tau f(f_t)\exp\text{-}pt\ dt = \operatorname{Lim}_n \sum_{k\geq 0} 1_{\{\frac{k}{n}\leq\tau<\frac{k+1}{n}\}}\int_0^{k/n} f(f_t)\exp\text{-}pt\ dt$$

est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable (de même que $1_{\{\tau=+\infty\}}\int_0^\infty f(f_t)\exp\text{-}pt\ dt$) ; en effet si $b>a\geq 0$ et F est $\mathcal{F}_a$-mesurable, $F1_{\{a\leq\tau<b\}}$ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable.

c) D'après II 2), conditionnellement à $\{\tau<+\infty\}$, $t \to U_{t+\tau} - U_\tau$ est indépendant de $\mathcal{F}_\tau$ et a même loi que $t \to U_t$; U_τ est $\mathcal{F}_\tau$ -mesurable sur $\{\tau<+\infty\}$ et de norme a ; l'indépendance (conditionnellement à $\{\tau<+\infty\}$) de $\mathcal{F}_\tau$ et $t \to f_{t+\tau}$ (ainsi que la loi de $f_{.+\tau}$) résulte alors de III 2). La dernière égalité est conséquence de III 3)b) et III 1)c) :

$$E\left[1_{\{\tau<+\infty\}}(\exp -p\tau) \int_0^\infty f(f_{t+\tau}) \exp -pt \, dt \,\middle|\, \mathcal{F}_\tau\right] =$$

$$1_{\{\tau<+\infty\}} \exp -p\tau \; E\left[\int_0^\infty f(R_t^{a\alpha}) \exp -pt \, dt\right] \quad (||\alpha|| = 1).$$

d) Si $||u|| < a$, $\displaystyle\int_a^\infty G(p,||u||,r)\,dr = E\left[\int_0^\infty f_2(\ _t) \exp -pt \, dt\right]$

(cf. III 1) c))

$$= E\left[\exp -p\tau \; 1_{\{\tau<+\infty\}}\right] \int_a^\infty G(p,a,r)\,dr \quad \text{(III 3)c))} \;;$$

si $||u||>a$, on a de même :

$$\int_0^a G(p,||u||,r)\,dr = E\left[\exp -p \; 1_{\{\tau<\infty\}}\right] \int_0^a G(p,a,r)\,dr \;;$$

on en déduit l'expression de $\left[E \exp -p\tau \; 1_{\{\tau<+\infty\}}\right]$. Quand p tend vers 0, $E\left[\exp -p \; 1_{\{\tau<+\infty\}}\right]$ tend vers $P[\tau<+\infty]$, qui vaut donc, par passage à la limite dans les expressions précédentes : $\inf(1, \frac{a}{||u||})$. Par continuité de :

$$t \to \ _t, \quad \{t \geq 0, \ \ _t = 0\} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{\substack{q\in\mathbb{Q} \\ 0\leq q\leq m}} \{_q \leq \tfrac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_\infty \;;$$

pour $||u|| > 0$, quand $a \to 0$, $P[\tau<+\infty]$ tend vers $P[\exists\, t\geq 0, \ \ _t = 0]$ (= 0).

e) On reprend l'égalité démontrée en III 3)c), dans laquelle on remplace $E\left[\exp -p\tau \; 1_{\{\tau<+\infty\}}\right]$ par son expression calculée en III 3)d). On inverse la transformation de Laplace grâce à la formule donnée en préambule à la partie III ; on obtient ainsi une égalité dh presque sûre ; si f est continue bornée sur $\mathbb{R}_+$, les deux expressions données sont des fonctions continues à gauche de h ; il y a donc égalité pour tout h de $\mathbb{R}_+^*$; les deux expressions étant des mesures en f, le résultat reste vrai pour h borélienne.

4) Comme $R_{1/n}$ est p.s. différent de 0, III 2)b) et III 3)d) donnent :

$$P\left[A_n \middle| R_{1/n}\right] = P\left[\exists t \geq 0,\ R_t^u = 0\right]\Big|_{||u|| = R_{1/n}} = 0 \text{ p.s.}$$

La probabilité de retour en 0 est $\underset{n}{\mathrm{Lim}}\, P[A_n]$, i.e. 0. D'après III 3)d), τ_a est p.s. fini ; la continuité de $t \to f_t$ (propriété des valeurs intermédiaires) implique que $a \to \tau_a$ est croissante et $\sup_a \tau_a = +\infty$; pour la même raison $\{\tau_a < \sigma_b\} = \{t \; \mathbb{Q}_+,\ R_{\tau_a + u} < b\}$, d'où :

$$P\left[\tau_a < \sigma_b\right] = \inf(1, \tfrac{b}{a}) \quad \text{(voir III 3)c) et III 3)d)).}$$

Quand a tend vers $+\infty$, on obtient $P[\sigma_b = +\infty] = 0$; $t \to R_t$ ne repasse p.s. plus en b après le temps fini σ_b ; R_t tend donc vers l'infini avec t.

5) a) On peut supposer R continu, tendant vers l'infini avec t ; on montre facilement pour $s \geq t$: $|J_t - J_s| \leq \sup_{s \leq x \leq t} |R_t - R_x|$.

b) En écrivant $\{J_t < b\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}^+} \{R_{\varepsilon + t} < b\}$ on déduit de III 2) :

$P\left[J_t \geq b \middle| \mathcal{F}_t\right] = \sup(0, 1 - \frac{b}{R_t})$; la loi de J_t, conditionnellement à $\mathcal{F}_t$ est la loi uniforme sur l'intervalle $(0, R_t)$; d'où les autres formules.

c) Pour c-i), on écrit $1_{\{J_t < a\}} = 1_{\{J_{t+h} < a\}} 1_{\{I_{t,h} < a\}}$, on conditionne d'abord par $\mathcal{F}_{t+h} (\supset \mathcal{F}_t)$ et on utilise III 5)b).

c-ii) résulte alors de la formule établie en III 3)e) et de III 2) (conditionnellement à $\mathcal{F}_t$, la loi de $R_{t+.}$ est celle de $R_{.}^{\alpha R_t}$, $||\alpha|| = 1$).

d) On prend $g(r,j) = f(2j-r)$ et on applique III 5)c) ; on fait le changement de variables $x = 2j-r$, $y = j$, d'où :

$$E\left[f(2j_{t+h} - R_{t+h})1_{\{a<J_t\}}|\mathcal{F}_t\right] =$$

$$1_{\{a<R_t\}} \frac{1}{R_t}\sqrt{\frac{2}{\pi h}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \int_{avx}^{\infty} \exp \frac{(R_t-a)^2+(2y-x-a)^2}{2h}$$

$$\operatorname{sh} \frac{(R_t-a)(2y-x-a)}{h}\,dy =$$

$$1_{\{a<R_t\}} \frac{1}{R_t}\sqrt{\frac{2}{\pi h}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{1}{2}\left(\int_a^{R_t} \exp - \frac{(x-2y+R_t)^2}{2h}\,dy\right)dx$$

$$\left(= E\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{R} f(x)\exp - \frac{(x-2J_t+R_t)^2}{dh}\,dx\ 1_{\{a<J_t\}}|\mathcal{F}_t\right], \text{voir III 5)b)}\right) ;$$

par suite :

$$E\left[f(2J_{t+h}-R_{t+h})\,|\sigma(\mathcal{F}_t,J_t)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\exp- \frac{(x-(2J_t-R_t))^2}{2h}\,dx.$$

Enfin, puisque $J_t = \inf(J_{t+h},I_{t,h})$ et que $I_{t,h}$ est $\mathcal{F}_{t+h}$-mesurable, on voit que la famille de tribus $(\mathcal{H}_t, t\geqq 0)$ est croissante, que $\beta_t = 2J_t-R_t$ est $\mathcal{H}_t$-mesurable et $\mathcal{H}_t \supset \sigma(\beta_s, s\leqq t)$.

De $E\left[f(\beta_{t+h})\,|\sigma(\beta_s,s\leqq t)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\exp - \frac{(x-\beta_t)^2}{2h}\,dx$,

on déduit aisément que β a même loi que (le brownien) B.

La répartition des notes des 313 copies de l'épreuve de probabilités et statistique est :

0 à 4	:	118 copies	20 à 24	:	21 copies
5 à 9	:	48 "	25 à 29	:	15 "
10 à 14	:	53 "	30 à 34	:	10 "
15 à 19	:	36 "	35 à 40	:	12 "