# MÉCANIQUE GÉNÉRALE

Le problème proposé a pour but l'établissement d'une méthode générale pour la mise en équations d'un système d'un nombre quelconque de solides, reliés entre eux par des articulations. Elle est utilisée dans les applications pratiques, notamment en robotique, où la principale difficulté rencontrée par le mécanicien provient du grand nombre de solides et d'articulations du système. Dans de telles applications, il est essentiel de présenter les trop nombreuses équations sous une forme condensée simple, permettant un traitement informatique (la solution générale n'étant en général pas envisageable). Deux méthodes sont possibles : celle de Lagrange, ou l'application des théorèmes généraux. C'est la seconde qui est développée dans ce problème. On proposera notamment une généralisation, aux systèmes de solides articulés, de l'équation bien connue d'Euler (relative au théorème du moment cinétique pour le mouvement d'un corps solide unique).

L'étude proposée se décompose en deux parties : dans la partie I le système mécanique est relié à un solide $S_0$ fixe, ou de mouvement connu en fonction du temps, appelé organe porteur.

Dans la partie II, le système mécanique, bien que soumis à des actions extérieures est *libre de toute action de liaison extérieure.* (L'organe porteur n'existe plus.)

Ces deux études seront illustrées par des exemples précis (I.B, II.B) que le candidat pourra chercher à traiter en admettant éventuellement les résultats généraux des I.A, II.A.

*Dans la partie* II.B, *les questions* 1° *et* 2° *relatives au cas particulier d'un seul solide peuvent être traitées indépendamment du reste du problème.*

## I

I.A. Nous considérons un système de $n$ solides $S_1 \ldots S_n$. Dans cette partie ce système, noté $\Sigma$, est relié à un organe porteur $S_0$. Les $(n+1)$ solides $S_0, S_1, \ldots S_n$ sont reliés entre eux par $p$ liaisons $L_1 \ldots L_p$. Chaque liaison est une liaison entre *deux* de ces solides. Au système $\Sigma$ nous associons un *graphe* : ensemble de $(n+1)$ points $s_0, s_1 \ldots s_n$ appelés *sommets* et représentant les solides $S_0, S_1 \ldots S_n$, et de $p$ *arcs* $l_1 \ldots l_p$ représentant les liaisons $L_1 \ldots L_p$. « L'arc $l_j$ relie les sommets $s_i$ et $s_k$ » exprime que « La liaison $L_j$ relie les solides $S_i$ et $S_k$ ». On appelle chaîne du graphe toute suite non vide d'arcs adjacents $\{ l_{j_1}, l_{j_2}, \ldots, l_{j_m} \}$ d'extrémités respectives $s_{i_1} s_{i_2}, s_{i_2} s_{i_3}, \ldots s_{i_m} s_{i_{m+1}}$. Une chaîne est dite fermée si $s_{i_1} = s_{i_{m+1}}$. Nous écartons le cas des systèmes $\Sigma$ dont le graphe présente une chaîne fermée : on dit qu'on travaille en chaîne ouverte.

Nous supposons donc que le graphe ne présente pas de chaîne fermée et qu'il est de plus *connexe* : c'est-à-dire que deux sommets quelconques sont reliés entre eux par une chaîne (unique du fait de la non-existence de chaîne fermée) : par exemple et en particulier tout sommet $s_i$ est relié au sommet $s_0$ par une chaîne unique.

Afin d'associer à une liaison $L_j$ un torseur $\mathcal{T}_j$ des actions de $L_j$ on donne une orientation arbitraire à l'arc $l_j$ correspondant dans le graphe : si $l_j$ est un arc orienté d'origine $s_i$ et d'extrémité $s_k$, $\mathcal{T}_j$ désigne le torseur des actions de $S_k$ sur $S_i$ et par conséquent $-\mathcal{T}_j$ désigne le torseur des actions de $S_i$ sur $S_k$.

*On suppose qu'un seul solide, noté* $S_1$, *est relié à l'organe porteur* $S_0$. *On admettra que le graphe étant connexe et sans chaîne fermée, on a nécessairement* $p = n$.

1° *On suppose que* $S_0$ *est fixe, que toute liaison* $L_j$ *entre* $S_i$ *et* $S_k$ *ne permet qu'une rotation de* $S_k$ *relativement à* $S_i$, *autour d'un point* $O_j$ *lié à* $S_i$ *et à* $S_k$ *appelé centre de la liaison* $L_j$.

Soit $S_1$ le solide unique relié à $S_0$ ; on désigne par $L_1$ la liaison entre $S_0$ et $S_1$, de rotation autour du point fixe $O_1$. On pose $O = O_1$.

On désigne par $S = (s_{ij})$ la matrice d'éléments $s_{ij}$ :

$i \in \{1, \ldots, n\}$ est l'indice de ligne ;

$j \in \{1, \ldots, p = n\}$ est l'indice de colonne ;

$$\begin{cases} s_{ij} = 1 & \text{si } l_j \text{ est un arc d'origine } s_i\,; \\ s_{ij} = -1 & \text{si } l_j \text{ est un arc d'extrémité } s_i\,; \\ s_{ij} = 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Soit $G_i$ le centre d'inertie du solide $S_i$, $m_i$ sa masse; on pose :

$$\vec{r}_i = \overrightarrow{OG_i}\,;$$

$$\begin{cases} \vec{\gamma}_{ij} = \overrightarrow{G_i O_j} & \text{si } L_j \text{ est une liaison agissant sur } S_i\,; \\ \vec{\gamma}_{ij} = \vec{0} & \text{dans les autres cas}\,; \end{cases}$$

$$\vec{c}_{ij} = s_{ij}\,\vec{\gamma}_{ij}\,.$$

Pour des commodités de présentation, on utilisera des matrices dont les coefficients pourront être scalaires ou vectoriels. Le produit de deux matrices se fera suivant les règles usuelles. Lorsque deux matrices considérées, par exemple C et X, sont à coefficients vectoriels on notera $C \wedge X$ le produit matriciel effectué en faisant le produit vectoriel pour composer entre eux les éléments de C et de X. Si A est une matrice, on notera ${}^tA$ sa transposée (les éléments de ${}^tA$ étant de même nature que ceux de A).

On pose :

$$C = (\vec{c}_{ij}), \qquad r = \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{r}_n \end{pmatrix}, \qquad m = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & m_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & m_n \end{pmatrix}, \qquad \sigma = \begin{pmatrix} \vec{\sigma}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{\sigma}_n \end{pmatrix},$$

où $\vec{\sigma}_i$ est le moment cinétique de $S_i$ en $G_i$.

On désigne par $(\vec{X}_j, \vec{Y}_j)$ les éléments de réduction en $O_j$ de $\mathcal{C}_j$, par $(\vec{F}_i, \vec{M}_i)$ les éléments de réduction en $G_i$ du torseur des actions extérieures appliquées à $S_i$, autres que les actions des liaisons avec les autres solides ou l'organe porteur $S_0$, par X, Y, F, M les matrices :

$$X = \begin{pmatrix} \vec{X}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{X}_n \end{pmatrix}; \qquad Y = \begin{pmatrix} \vec{Y}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{Y}_n \end{pmatrix}; \qquad F = \begin{pmatrix} \vec{F}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{F}_n \end{pmatrix}; \qquad M = \begin{pmatrix} \vec{M}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{M}_n \end{pmatrix}.$$

Montrer que les théorèmes généraux appliqués à chaque solide $S_i$ aboutissent aux équations (1) :

$$(1) \qquad \begin{cases} m\ddot{r} = F + SX; \\ \dot{\sigma} = M + SY + C \wedge X. \end{cases}$$

2° Soit T la matrice $(t_{ji})$ ($j \in \{1, \ldots, p = n\}$ est l'indice de ligne, $i \in \{1, \ldots n\}$ est l'indice de colonne) définie par :

$$\begin{cases} t_{ji} = 1 & \text{si l'arc } l_j \text{ appartient à la chaîne reliant } s_0 \text{ à } s_i \text{ et sur cette chaîne est orienté vers } s_0\,; \\ t_{ji} = -1 & \text{si l'arc } l_j \text{ appartient à la chaîne reliant } s_0 \text{ à } s_i \text{ et sur cette chaîne est orienté vers } s_i\,; \\ t_{ji} = 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

2° *a*. Montrer que T et S sont inverses l'une de l'autre.

On pourra montrer au préalable que si $l_m$ a pour origine $s_i$ et pour extrémité $s_k$ :

$$(TS)_{jm} = t_{ji} - t_{jk}.$$

2° *b.* En déduire les équations (2) :

$$(2) \quad \begin{cases} X = T(m\ddot{r} - F); \\ \dot{\sigma} = M + SY + CT \wedge (m\ddot{r} - F). \end{cases}$$

3° *a.* Montrer que si $L_j$ est une liaison entre $S_i$ et $S_k$ :

$$\vec{r_i} + \vec{\gamma_{ij}} = \vec{r_k} + \vec{\gamma_{kj}}.$$

3° *b.* En déduire la relation :

$$r = -\,{}^t(CT)\,1_n, \qquad \text{où} \qquad 1_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On pourra montrer que :

$${}^tS\,r + {}^tC\,1_n = 0$$

3° *c.* Posant $B = -\,CT$, montrer le théorème du moment cinétique généralisé à un système $\Sigma$ :

$$(3) \quad \dot{\sigma} = M + SY + B \wedge (-\,m\,{}^t\ddot{B}\,1_n + F).$$

Commenter.

I.B. $\Sigma$ est un système de 3 barres $O_1 O_2$, $O_2 O_3$, $O_3 O_4$, identiques, de longueur $2\,l$, de masses $m$, mobiles dans un plan vertical fixe $O\vec{x}\vec{y}$ ; $\vec{x}$ est la verticale descendante. Ces barres sont articulées au point $O_1 = O$ fixe, et entre elles aux points $O_2$ et $O_3$. Les liaisons sont toutes supposées parfaites. Les seules actions extérieures non de liaison, sont dues à l'accélération de la pesanteur $g\vec{x}$. On pose $\overrightarrow{O_1 O_2} = 2\,l\,\vec{u_1}$, $\overrightarrow{O_2 O_3} = 2\,l\,\vec{u_2}$, $\overrightarrow{O_3 O_4} = 2\,l\,\vec{u_3}$.

1° Tracer le graphe de $\Sigma$. On orientera $l_j$ de $s_i$ vers $s_k$ si $i < k$. Déterminer S et T. Vérifier que S et T sont inverses. Déterminer $C$, $B$, $r = {}^tB\,1_n$.

Faire une vérification directe de ce dernier résultat.

2° En déduire l'expression de l'équation (3) au moyen des vecteurs $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_3}$, des rotations instantanées des barres $\vec{\omega_1}$, $\vec{\omega_2}$, $\vec{\omega_3}$, et de l'accélération de la pesanteur.

3° On étudie les petits mouvements du système autour de la verticale descendante $\overrightarrow{Ox}$ et on pose :

$$(\vec{x}, \vec{u_i}) = \varphi_i \qquad (\varphi_i \ll 1).$$

Exprimer sous forme matricielle les équations linéarisées des petits mouvements.

I.C. *On propose deux généralisations :*

1° L'organe porteur $S_0$ n'est plus fixe. Le mouvement du point $O_1$, centre de la liaison de $S_1$ sur $S_0$, est décrit par $\overrightarrow{OO_1} = \vec{f}(t)$, O étant un point fixe et $\vec{f}(t)$ une fonction vectorielle supposée connue du temps $t$.

1° *a.* Montrer que $r = \vec{f}(t)\,1_n + {}^tB\,1_n$.

1° *b.* En déduire que l'équation (3) doit être remplacée dans le cas présent par :

$$\dot{\sigma} = M + SY + B \wedge (-\,m\,{}^t\ddot{B}\,1_n + F) - B \wedge (m\,\ddot{\vec{f}}\,1_n).$$

J. 1155

2° Les liaisons $L_j$ entre les solides de $\Sigma$ ne sont plus nécessairement des articulations de rotation relative. Si $L_j$ est une liaison entre deux solides $S_i$ et $S_k$, elle permet au solide $S_k$ de se mouvoir par rapport à $S_i$ par translation le long d'une droite $\Delta_j$ de $S_i$ et par rotation autour de cette droite. Le centre de liaison $O_j$ est alors un point lié à $\Delta_j$, fixe dans $S_i$, mobile dans $S_k$.

Préciser comment ce cas peut se traiter à partir de I.A.

## II

II.A. Nous considérons désormais le cas d'un système $\Sigma$ de $n$ solides $S_1 \ldots S_n$, libre de toute liaison extérieure (l'organe porteur $S_0$ est supprimé). Le système est alors constitué des $n$ solides $S_1 \ldots S_n$ et de $p$ liaisons $L_1 \ldots L_p$ entre ces solides. Il est encore représenté par un graphe, ensemble de $n$ sommets $s_1 \ldots s_n$ représentant les solides et de $p$ arcs $l_1 \ldots l_p$ représentant les liaisons.

Les liaisons sont encore des liaisons de rotation comme au début de la première partie. *On suppose encore le graphe connexe, sans chaîne fermée et orienté. On admettra que le graphe étant connexe et sans chaîne fermée,* $p = n - 1$, dans le cas présent d'un système sans organe porteur.

1° On définit la matrice *rectangulaire* S de $n$ lignes et $p = n - 1$ colonnes, par :

$$S = (s_{ij}) : \left\{ \begin{array}{ll} s_{ij} = & 1 \text{ si } l_j \text{ est un arc d'origine } s_i\,; \\ s_{ij} = & -1 \text{ si } l_j \text{ est un arc d'extrémité } s_i\,; \\ s_{ij} = & 0 \text{ dans les autres cas.} \end{array} \right.$$

O est un point fixe. On définit de la même façon que dans la première partie $\vec{r_i}$, $\vec{\gamma_{ij}}$, $\vec{c_{ij}}$ ....

Démontrer les équations (1) :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} m\ddot{r} = F + SX\,; \\ \dot{\sigma} = M + SY + C \wedge X. \end{array} \right.$$

2° Soit T la matrice $(t_{ji})$ de $p = n - 1$ lignes et $n$ colonnes, définie par :

$$T = (t_{ji}) : \left\{ \begin{array}{ll} t_{j1} = & 0\,; \\ t_{ji} = & 1 \text{ si } l_j \text{ appartient à la chaîne reliant } s_1 \text{ à } s_i \text{ et est orienté vers } s_1 \text{ dans cette chaîne}\,; \\ t_{ji} = & -1 \text{ si } l_j \text{ appartient à la chaîne reliant } s_1 \text{ à } s_i \text{ et est orienté vers } s_i \text{ dans cette chaîne}\,; \\ t_{ji} = & 0 \text{ dans les autres cas.} \end{array} \right.$$

2° *a.* Montrer que $TS = I_{n-1}$, où $I_{n-1}$ est la matrice unité de $\mathbb{R}^{n-1}$.

2° *b.* En déduire les équations (2) :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} X = T(m\ddot{r} - F)\,; \\ \dot{\sigma} = M + SY + CT \wedge (m\ddot{r} - F). \end{array} \right.$$

3° Soit G le centre d'inertie du système $\Sigma$. On pose $\vec{r_G} = \overrightarrow{OG}$.

3° *a.* Montrer que $\Sigma\, m_i \ddot{\vec{r_G}} = \Sigma\, \vec{F_i}$.

3° *b.* On pose $\vec{R_i} = \vec{r_i} - \vec{r_G}$, et $R = \begin{pmatrix} \vec{R_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{R_n} \end{pmatrix}$

On définit la matrice carrée $\mu$ à $n$ lignes et $n$ colonnes par :

$$\mu = (\mu_{ik}), \quad \text{avec} \quad \mu_{ik} = \delta_{ik} - \frac{m_i}{\sum_{q=1}^{n} m_q} ;$$

$$\delta_{ik} = 1 \quad \text{si} \quad i = k, \qquad \delta_{ik} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq k .$$

Montrer que $m\ddot{\mathrm{R}} = \mu\,\mathrm{F} + \mathrm{SX}$.

En déduire que $\mathrm{X} = \mathrm{T}(m\ddot{\mathrm{R}} - \mu\,\mathrm{F})$.

Montrer l'équation (3') :

$$\dot{\sigma} = \mathrm{M} + \mathrm{SY} + \mathrm{CT} \wedge (m\ddot{\mathrm{R}} - \mu\,\mathrm{F}). \tag{3'}$$

3° *c*. Établir la relation exprimant R en fonction de C :

$$\mathrm{R} = -\,{}^t(\mathrm{CT}\,\mu)\,1_n$$

Pour cela on pourra montrer les relations suivantes :

$${}^t\mathrm{S}(\mathrm{R} - \overrightarrow{\mathrm{R}_1}\,1_n) + {}^t\mathrm{C}\,1_n = 0 ;$$

$$\mathrm{R} - \overrightarrow{\mathrm{R}_1}\,1_n = -\,{}^t(\mathrm{CT})\,1_n ;$$

$${}^t\mu\,\mathrm{R} = \mathrm{R} ;$$

$${}^t\mu\,1_n = 0 .$$

On pose $\mathrm{B} = -\,\mathrm{CT}\,\mu$. Montrer que (3') s'écrit alors :

$$\dot{\sigma} = \mathrm{M} + \mathrm{SY} + \mathrm{CT} \wedge (m\,{}^t\ddot{\mathrm{B}}\,1_n - \mu\,\mathrm{F}). \tag{3''}$$

4° *a*. Montrer que $\mu = \mathrm{I}_n - \dfrac{1}{\sum_{q=1}^{n} m_q}(m\,1_n\,{}^t1_n)$.

En déduire que $\mu\,m\,{}^t\mu = m\,{}^t\mu$.

4° *b*. Montrer la forme finale de l'équation (3) :

$$\dot{\sigma} = \mathrm{M} + \mathrm{SY} + \mathrm{B} \wedge (-\,m\,{}^t\ddot{\mathrm{B}}\,1_n + \mathrm{F}). \tag{3}$$

II. B. Un satellite de la Terre est constitué de $n$ solides articulés entre eux. Dans les questions 1° et 2° on considère le cas particulier d'un seul solide.

1° Le satellite est un solide S de centre d'inertie G soumis à l'attraction newtonienne de la Terre, supposée sphérique, donc assimilée à un point matériel T considéré comme fixe. Le mouvement de G est supposé circulaire uniforme autour de T, de vitesse angulaire $\overrightarrow{\omega_0}$. On désigne par $\vec{e}_1$ le vecteur tangent à la trajectoire de G et dans le sens du mouvement, par $\vec{e}_3$ le vecteur unitaire colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{TG}}$ et de même sens, par $\vec{e}_2$ le vecteur tel que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ soit une base orthonormée directe. On a donc $\overrightarrow{\omega_0} = \omega_0\,\vec{e}_2$, avec $\omega_0 > 0$.

On désigne par $\mathcal{R}$ le repère d'origine G et d'axes $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Les actions de T sur S sont approchées par le torseur $\mathcal{T}$ d'éléments de réduction en G :

$$\begin{cases} \text{résultante} : \vec{\mathrm{F}} = -\,\omega_0^2\,m\,\overrightarrow{\mathrm{TG}} ; \\ \text{moment résultant en G} : \vec{\mathrm{M}} = 3\,\omega_0^2\,\vec{e}_3 \wedge \mathcal{J}\,\vec{e}_3 . \end{cases}$$

$\mathcal{J}$ est le tenseur d'inertie de S en G.

1° *a*. Montrer que S est en équilibre relatif dans le repère $\mathcal{R}$ si et seulement si l'équation (*a*) est vérifiée :

$$\vec{e}_2 \wedge \mathfrak{J}\,\vec{e}_2 - 3\,\vec{e}_3 \wedge \mathfrak{J}\,\vec{e}_3 = 0\,. \tag{a}$$

1° *b*. En déduire que $\mathcal{R}$ est alors un repère principal d'inertie.

2° On munit le satellite d'un gyroscope, ce qui revient à ajouter au moment cinétique de S en G un vecteur $\vec{h}$ *fixe dans* S. Montrer que l'équation (*a*) est alors remplacée par :

$$\vec{e}_2 \wedge \frac{\vec{h}}{\omega_0} + \vec{e}_2 \wedge \mathfrak{J}\,\vec{e}_2 - 3\,\vec{e}_3 \wedge \mathfrak{J}\,\vec{e}_3 = 0\,.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ n'est plus nécessairement principal d'inertie. Préciser les relations que doivent vérifier les composantes dans le repère $(G, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ du tenseur d'inertie du solide et du vecteur $\vec{h}$.

3° Le satellite est un système $\Sigma$ de deux solides $S_1$ et $S_2$. G est le centre d'inertie de $\Sigma$. On suppose encore que G est animé d'un mouvement circulaire autour de T ; le repère $\mathcal{R}$ est choisi comme précédemment.

Les actions de la Terre sur chaque solide sont approchées par les torseurs d'éléments de réduction en $G_i$ $(i = 1, 2)$ :

$$\begin{cases} \vec{F}_i = -\,\omega_0^2\, m_i\left(\overrightarrow{TG_i} - 3\,\vec{e}_3\,(\overrightarrow{GG_i}\cdot\vec{e}_3)\right); \\ \vec{M}_i = 3\,\omega_0^2\,\vec{e}_3 \wedge \mathfrak{J}_i\,\vec{e}_3\,. \end{cases}$$

$\mathfrak{J}_i$ est le tenseur d'inertie de $S_i$ en $G_i$.

La liaison $L_1$ entre $S_1$ et $S_2$ est supposée de rotation relative autour d'un point, et *parfaite*. Le satellite est encore supposé en équilibre relatif par rapport à $\mathcal{R}$. Dans les questions 3° *a*, 3° *b*, les solides ne sont pas munis de gyroscopes.

3° *a*. Montrer que les éléments de la matrice B sont fixes dans $\mathcal{R}$.

3° *b*. Calculer successivement S, T, $\mu$, B, R.

On posera $C = \begin{pmatrix} \vec{c}_1 \\ \vec{c}_2 \end{pmatrix}$.

Montrer que l'équation (*a*) est alors remplacée par :

$$\vec{e}_2 \wedge \mathcal{L}_i\,\vec{e}_2 - 3\,\vec{e}_3 \wedge \mathcal{L}_i\,\vec{e}_3 = 0, \qquad \text{avec} \qquad i = 1, 2, \tag{b}$$

où $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont deux opérateurs linéaires que l'on précisera.

3° *c*. Les solides sont munis de gyroscopes, de couples gyroscopiques respectifs $\vec{h}_1$ fixe dans $S_1$, $\vec{h}_2$ fixe dans $S_2$. Montrer que l'équation (*b*) est alors remplacée par :

$$\vec{e}_2 \wedge \frac{\vec{h}_i}{\omega_0} + \vec{e}_2 \wedge \mathcal{L}_i\,\vec{e}_2 - 3\,\vec{e}_3 \wedge \mathcal{L}_i\,\vec{e}_3 = 0, \qquad \text{avec} \qquad i = 1, 2. \tag{c}$$

RAPPORT SUR L'EPREUVE DE MECANIQUE GENERALE

Le problème posé cette année concernait la mise en équations par les théorèmes généraux d'un système articulé de plusieurs solides. C'est un sujet important à l'heure actuelle à cause de la modélisation dynamique des robots constitués bien souvent d'au moins 6 solides articulés entre eux par des liaisons souvent à 1 degré de liverté (prismatique : translation relative ; rotoîde : rotation relative). Bien qu'il semble qu'à l'heure actuelle la mise en équations par la méthode de Lagrange soit plus performante en robotique, la mise en équations par les théorèmes généraux exposée par le Professeur J. Wittemburg dans son livre "Dynamics of Systems of Rigid Bodies" (Teubner, Stuttgart 1977) est un formalisme concis permettant le traitement d'un mécanisme en chaîne ouverte.

Dans la partie IA on adapte au problème considéré des éléments très simples de théorie des graphes ; chaque solide est représenté par le sommet d'un graphe, chaque liaison représente un arc de ce graphe. On met en évidence deux matrices S et T associées au graphe, carrées dans le cas d'un système mécanique articulé (S.M.A.) relié à un organe porteur. De ce fait, ce cas est algébriquement plus simple : c'est le cas de la 1ère partie I. On obtient alors d'une part les équations (1) traduisant la mise en équations par les théorèmes généraux, d'autre part l'équation (3) qui ressemble au théorème du moment cinétique d'un seul solide en son centre d'inertie. Le paragraphe IB est la considération d'un cas très concret, avec la technique usuelle aux mécaniciens ; ce paragraphe pouvait être traité après avoir admis les résultats énoncés au départ.

IC proposait deux extensions : tout d'abord au cas où l'organe porteur était mobile (le terme complémentaire s'interprète comme associé aux forces d'inertie d'entraînement), puis au cas de liaisons plus délicates pour lesquels le centre de liaison n'est plus fixe dans les solides associés (ce qui amène à des difficultés pour le calcul de la matrice $\ddot{B}$). La deuxième partie traite du cas où l'organe porteur n'existe pas ; apparemment il n'y a pas grandes différences mais ici les matrices S et T associées au graphe du S.M.A. ne sont plus rectangulaires : on a encore $TS = I_{n-1}$, par contre contrairement à ce qui a été très souvent affirmé $ST \neq I_n$. Compte-tenu de calculs algébriques plus délicats on aboutit à une mise en équation tout à fait analogue.

IIB concerne une application à la mécanique spatiale : il s'agit d'un satellite (muni d'antennes par exemple) qui se présente sous forme d'un S.M.A. et qui, pour des raisons concrètes importantes (mesures faites depuis ce satellite), doit avoir relativement à la Terre la même orientation dans un repère lié au mouvement de rotation de son centre d'inertie. La question IIV 1° est indépendante du reste du problème, elle se généralise ensuite au cas de 2 solides articulés, le cas très général est traité dans la référence citée.

La résolution de ce problème nécessitait des connaissances élémentaires de mécanique (théorèmes généraux, cinétique...) et de calcul matriciel.

## Commentaire des résultats

Il y a eu assez peu de copies blanches. La première partie (IA) a été très généralement abordée et parfois traitée assez complètement. Ceux qui ont traité avec succès le IA ont abordé assez souvent le IIA.

Les parties plus techniques IB, IIB ont eu peut-être un peu moins de succès. Quelques copies ont assez bien abordé une partie importante du problème. L'énoncé articulé par des applications et des parties indépendantes permettait une approche du travail.

## Répartition des notes

Cette année, 102 candidats ont effectivement composé en Option Mécanique générale. Ce chiffre est encore en augmentation (81 candidats en 1983, 89 en 1984) malgré la création d'une nouvelle option (Informatique). La moyenne générale des notes est de 15,07 sur 40 avec la répartition ci-dessous :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 à 4 | 27 copies | 20 à 24 | 23 copies |
| 5 à 9 | 9 " | 25 à 29 | 11 " |
| 10 à 14 | 12 " | 30 à 34 | 3 " |
| 15 à 19 | 12 " | 35 à 40 | 5 " |

## Corrigé succinct

IA -

1/ Appliquons au solide $S_i$ les théorèmes généraux. Les actions de la liaison $L_j$ sur $S_i$ sont représentées par le torseur d'éléments de réduction en $O_j$ : $(s_{ij}\vec{X}_j,\ s_{ij}\vec{Y}_j)$.

Théorème du Centre d'Inertie :

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_j s_{ij} \vec{X}_j$$

Théorème du Moment Cinétique en $G_i$ :

$$\dot{\vec{\sigma}}_i = \vec{M}_i + \sum_j s_{ij} \vec{Y}_j + \sum_j \vec{\gamma}_{ij} \wedge s_{ij} \vec{X}_j$$

Nous avons appliqué la formule du transport en $G_i$ du torseur $\mathcal{T}_j$ donné en $O_j$.

Mais $\vec{\gamma}_{ij} \wedge s_{ij} \vec{X}_j = \vec{\gamma}_{ij} s_{ij} \wedge \vec{X}_j = \vec{C}_{ij} \wedge \vec{X}_j$

On obtient donc sous forme matricielle :

$$(1) \begin{cases} m\ \ddot{r} = F+SX \\ \dot{\sigma} = M+SY+C \wedge X \end{cases}$$

2a/ Montrons que $(TS)_{jm} = \sum_i t_{ji} s_{im}$.

$s_{im} = 0$ sauf si $\ell_m$ part de $s_i$ $(s_{im} = 1)$ on arrive en $s_i$ $(s_{im} = -1)$.

Par conséquent si $\ell_m$ part de $s_i$ vers $s_k$ :

$$(TS)_{jm} = t_{ji} - t_{jk}$$

Si $j = m$ :

* si la chaîne allant de $s_o$ à $s_i$ passe par $s_k$ alors

$$t_{ji} = 1, \quad t_{jk} = 0$$

* si la chaîne allant de $s_o$ à $s_i$ ne passe pas par $s_k$ alors $t_{ji} = 0$ $t_{jk} = -1$.

Dans les 2 cas $(TS)_{jj} = t_{ji} - t_{jk} = 1$.

Si $j \neq m$ : la considération des différents cas possibles donne :

si $t_{ji} = 1$ alors $t_{jk} = 1$

si $t_{ji} = -1$ alors $t_{jk} = -1$

si $t_{ji} = 0$ $(j \neq m)$ alors $t_{jm} = 0$

Dans tous les cas $(TS)_{jm} = t_{ji} - t_{jm} = 0$ pour $j \neq m$.

T et S sont donc deux matrices inverses.

2b/ $m\ddot{r} = F+SX$ entraîne $X = T(m\ddot{r}-F)$

Donc de $\dot{\sigma} = M+SY+C \wedge X$ on déduit $\dot{\sigma} = M+SY+C \wedge (T(m\ddot{r}-F))$.

On peut vérifier directement que $C \wedge (Tm\ddot{r}-F) = CT \wedge (m\ddot{r}-F)$. Donc on obtient :

$$(2) \quad \begin{cases} X = T(m\ddot{r}-F) \\ \dot{\sigma} = M+SY+CT \wedge (m\ddot{r}-F) \end{cases}$$

3a/ $\vec{r}_i + \vec{\gamma}_{ij} = \vec{r}_k + \vec{\gamma}_{Rj}$ traduit la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{OG_i} + \overrightarrow{G_iO_j} = \overrightarrow{OG_k} + \overrightarrow{G_kO_j} = \overrightarrow{OO_j}$$

3b/ Montrons au préalable que ${}^tSr + {}^tC1_n = 0$.

La $j^{\text{ième}}$ composante de ${}^tC1_n$ est $\sum_i \vec{C}_{ij} = \sum_i s_{ij}\vec{\gamma}_{ij}$ or

$\sum_i s_{ij}(\vec{r}_i + \vec{\gamma}_{ij}) = (\vec{r}_i + \vec{\gamma}_{ij}) - (\vec{r}_k + \vec{\gamma}_{kj}) = 0$ si $\ell_j$ a $s_i$ pour origine et $s_k$ pour extrémité, et par application de 3a. Donc $\sum_i s_{ij}\vec{r}_i + \sum_i \vec{C}_{ij} = 0$

Par conséquent $r = -({}^tS)^{-1}\, {}^tC1_n = -{}^tT\,{}^tC1_n = -{}^t(CT)1_n$.

3c/ Nous venons d'obtenir $r = -{}^tB1_n$ donc $\ddot{r} = -{}^t\ddot{B}\,1_n$, reportant dans (2) on obtient :

$$(3) \quad \dot{\sigma} = M+SY-B \wedge (m\,{}^t\ddot{B}\,1_n + F).$$

**Commentaire** : Par hypothèse chaque liaison $L_j$ entre $S_i$ et $S_k$ est une liaison de rotation relative de ces deux solides.

Par conséquent, le système $\sum$ est repéré par $n$ rotations. Par conséquent l'équation (3) est l'équation différentielle permettant d'étudier les $n$ rotations, donc le mouvement de $\sum$. Les éléments de $B$ sont des vecteurs combinaisons linéaires de vecteurs $\vec{\gamma}_{ij} = \overrightarrow{G_iO_j}$ liés au solide de $S_i$. Si les liaisons $L_j$ sont parfaites $Y = 0$, on obtient une équation qui généralise l'équation d'Euler d'un seul solide.

IB

1/ Graphe de $\sum$ : $\underset{s_o}{*} \xrightarrow{\ell_1} \underset{s_1}{*} \xrightarrow{\ell_2} \underset{s_2}{*} \xrightarrow{\ell_3} \underset{s_3}{*}$

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On vérifie directement $ST = I$

$$\gamma = \begin{pmatrix} -\ell\vec{u}_1 & \ell\vec{u}_1 & 0 \\ 0 & -\ell\vec{u}_2 & \ell\vec{u}_2 \\ 0 & 0 & -\ell\vec{u}_3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \ell\vec{u}_1 & \ell\vec{u}_1 & 0 \\ 0 & \ell\vec{u}_2 & \ell\vec{u}_2 \\ 0 & 0 & \ell\vec{u}_3 \end{pmatrix}$$

$$B = -CT = \begin{pmatrix} \ell\vec{u}_1 & 2\ell\vec{u}_1 & 2\ell\vec{u}_1 \\ 0 & \ell\vec{u}_2 & 2\ell\vec{u}_2 \\ 0 & 0 & \ell\vec{u}_3 \end{pmatrix}$$

$$r = {}^tB1_n = \begin{pmatrix} \ell\vec{u}_1 \\ 2\ell\vec{u}_1+\vec{u}_2 \\ 2\ell\vec{u}_1+2\ell\vec{u}_2+\ell\vec{u}_3 \end{pmatrix}$$ se vérifie directement

2/ $\dot{\sigma} = B \wedge (-m\ddot{r} + F)$

$$\frac{m\ell^2}{3}\begin{pmatrix}\dot{\vec{\omega}}_1\\ \dot{\vec{\omega}}_2\\ \dot{\vec{\omega}}_3\end{pmatrix} = m\ell\begin{pmatrix}\vec{u}_1 & 2\vec{u}_1 & 2\vec{u}_1\\ 0 & \vec{u}_2 & 2\vec{u}_2\\ 0 & 0 & \vec{u}_3\end{pmatrix} \wedge \left[-\ell\begin{pmatrix}\ddot{\vec{u}}_1\\ 2\ddot{\vec{u}}_1+\ddot{\vec{u}}_2\\ 2\ddot{\vec{u}}_1+2\ddot{\vec{u}}_2+\ddot{\vec{u}}_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}g\vec{x}\\ g\vec{x}\\ g\vec{x}\end{pmatrix}\right]$$

avec $\dot{\vec{u}}_i = \vec{\omega}_i \wedge \vec{u}_i$

$$\ddot{\vec{u}}_i = \dot{\vec{\omega}}_i \wedge \vec{u}_i + \vec{\omega}_i \wedge (\vec{\omega}_i \wedge \vec{u}_i)$$

Soit $\phi_i$ l'angle polaire de $\vec{u}_i$: $\vec{\omega}_i = \dot{\phi}_i\vec{z}$ et (3) est bien une équation différentielle du second ordre pour $\phi = \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{pmatrix}$.

3/
$$\frac{m\ell^2}{3}\begin{pmatrix}\dot{\vec{\omega}}_1\\ \dot{\vec{\omega}}_2\\ \dot{\vec{\omega}}_3\end{pmatrix} = m\ell\left[-\ell\begin{pmatrix}\vec{u}_1 \wedge (9\ddot{\vec{u}}_1 + 6\ddot{\vec{u}}_2 + 2\ddot{\vec{u}}_3)\\ \vec{u}_2 \wedge (6\ddot{\vec{u}}_1 + 5\ddot{\vec{u}}_2 + 2\ddot{\vec{u}}_3)\\ \vec{u}_3 \wedge (2\ddot{\vec{u}}_1 + 2\ddot{\vec{u}}_2 + \ddot{\vec{u}}_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\vec{u}_1\\ 3\vec{u}_2\\ \vec{u}_3\end{pmatrix} \wedge g\vec{x}\right]$$

$\vec{u}_i \sim \vec{x}$ $\qquad \dot{\vec{u}}_i \sim \dot{\phi}_i\vec{y}$ $\qquad \ddot{\vec{u}}_i \sim \ddot{\phi}_i\vec{y}$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\ddot{\phi}_1\\ \ddot{\phi}_2\\ \ddot{\phi}_3\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}9\ddot{\phi}_1 + 6\ddot{\phi}_2 + 2\ddot{\phi}_3\\ 6\ddot{\phi}_1 + 5\ddot{\phi}_2 + 2\ddot{\phi}_3\\ 2\ddot{\phi}_1 + 2\ddot{\phi}_2 + \ddot{\phi}_3\end{pmatrix} + \frac{g}{\ell}\begin{pmatrix}5\phi_1\\ 3\phi_2\\ \phi_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{28}{3} & 6 & 2 \\ 6 & \frac{16}{3} & 2 \\ 2 & 2 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \\ \ddot{\phi}_3 \end{pmatrix} = \frac{g}{\ell} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$$

## IC

1a/ On a toujours $\begin{pmatrix} \overrightarrow{O_1G_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{O_1G_n} \end{pmatrix} = {}^tB1_n$, car ceci a été établi par des considérations géométriques, indépendamment du mouvement de $O_1$. Or $\overrightarrow{OG_i} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{OG_i}$ donc $r = \vec{f}1_n + {}^tB1_n$.

1b/ Partons de la 2ème équation de (2) :

$$\dot{\sigma} = M+SY+CT \wedge (m\ddot{r} - F) = M+SY+B_n(-m\ddot{r} + F)$$

$$= M+SY+B \wedge (-m\ddot{f}\, 1_n - m\, {}^t\ddot{B}\, 1_n + F)$$

Il est plus simple d'établir cette équation en écrivant la loi fondamentale dans le repère mobile en translation d'origine $O_1$. Il suffit d'ajouter à $F$ la force d'inertie d'entraînement $-m\ddot{f}1_n$.

2/ Les équations (2) et (3) sont encore valables. Mais le mouvement de $S_i$ par rapport à $S_k$ par l'intermédiaire de $L_j$ n'est plus seulement de rotation. Dans le cas présent les vecteurs $\vec{\gamma}_{ij}$ ne sont plus liés aux solides $S_i$, il faudra donc être très prudent dans la dérivation vectorielle des vecteurs composant B.

## IIA

1/ Idem que IA 1.

2a/ Comme au I, si $\ell_m$ part de $s_i$ vers $s_k$

$$(TS)_{jm} = t_{ji} - t_{jk}$$

Le reste de la démonstration reste valable.

2b/ Les matrices $T$ et $S$ sont dans le cas présent rectangulaires. Mais de $TS = I_{n-1}$ on peut déduire par multiplication à gauche par $T$ de la 1ère équation de (1)

$$X = T(m\ddot{r} - F)$$

(2) est alors immédiate.

3a/ C'est le théorème du centre d'inertie par $\sum$.

3b/ Reportons $\vec{r}_i = \vec{R}_i + \vec{r}_G$ dans (1) :

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_j s_{ij}\vec{X}_j \Longrightarrow m_i(\ddot{\vec{R}}_i + \ddot{\vec{r}}_G) = \vec{F}_i + \sum_j s_{ij}\vec{X}_j$$

or $\ddot{\vec{r}}_G = \frac{1}{\Sigma m_i}\sum \vec{F}_i$ . Donc

$$m_i\ddot{\vec{R}}_i = \sum_{i'} \mu_{ii'}\vec{F}_{i'} + \sum_j s_{ij}\vec{X}_j$$

et finalement

$$m\ddot{R} = \mu F + SX$$

Par multiplication à gauche par $T$ : $X = T(m\ddot{R} - \mu F)$. De $\dot{\sigma} = M + C \wedge X + S \wedge Y$, il vient :

$$\dot{\sigma} = M + \underbrace{C \wedge (T(m\ddot{R} - \mu F))}_{CT \wedge (m\ddot{R} - \mu F)} + SY \qquad (3')$$

3c/ Comme au I4b on a encore $^t Sr + ^t C1_n = 0$ quelle que soit l'origine.

Prenons l'origine en G :

$$^t S(R - R_1 1_n) + ^t C1_n = 0$$

$S = \binom{X}{\overline{S}}$ $T = (0\ \overline{T})$, $\overline{S}\ \overline{T}$ sont des matrices $(n-1)\times(n-1)$.

$TS = I_{n-1}$ prouve que $\overline{S}$ et $\overline{T}$ sont inverses. Donc :

$$ST = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & I_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right)$$

Il est alors immédiat que $^t(ST)(R-R_1 1_n) = R-R_1 1_n$. Or $^t S(R-R_1 1_n) + ^t C1_n = 0$

Donc $\quad {}^t T\, {}^t S(R-R_1 1_n) + {}^t T\, {}^t C1_n = 0$

$$R - R_1 1_n = -{}^t(CT)1_n$$

$$\begin{cases} R - R_1 1_n = -{}^t(CT)1_n \\ m_1R_1 + \ldots + m_nR_n = 0 \end{cases}$$

$$t\mu = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{m_1}{\Sigma m_i} & -\dfrac{m_2}{\Sigma m_i} & \ldots \\ -\dfrac{m_1}{\Sigma m_i} & 1-\dfrac{m_2}{\Sigma m_i} & \ldots \\ -\dfrac{m_1}{\Sigma m_i} & -\dfrac{m_2}{\Sigma m_i} & \ldots \end{pmatrix}$$

On a immédiatement $^t\mu R = R$, $^t\mu 1_n = 0$.

Multiplions à gauche $R-R_1 1_n = -{}^t(CT)1_n$ par $^t\mu$ :

$$R = -{}^t(CT\mu)1_n = {}^t B1_n$$

L'équation (3') s'écrit alors (3")

4a/ $m 1_n {}^t 1_n = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ldots 1) = \begin{pmatrix} m_1 \cdots\cdots m_1 \\ \\ m_n \cdots\cdots m_n \end{pmatrix}$

donc $\mu = I - \frac{1}{\Sigma m_i} m\, 1_n {}^t 1_n$

4b/ De 4a on déduit :

$$CT\mu \wedge (m\,{}^t\ddot{B}\, 1_n) = CT \wedge (m\,{}^t\ddot{B}\, 1_n)$$

Donc (3") devient

$$\dot{\sigma} = M + SY - B \wedge (m\,{}^t\ddot{B}\, 1_n) - CT \wedge \mu F$$

$$= M + SY + B \wedge (-m\,{}^t\ddot{B}\, 1_n + F) \quad \text{qui est (3)}$$

IIB

1a/ Appliquons le théorème du moment cinétique en G à S, le mouvement de S étant supposé d'équilibre relatif dans $\mathfrak{R}$.

$$\vec{\sigma} = \mathcal{J}\vec{\omega}_o \qquad \vec{\omega}_o \wedge \mathcal{J}\vec{\omega}_o = M$$

$$\omega_o^2\, \vec{e}_2 \wedge \mathcal{J}\vec{e}_2 = 3\omega_o^2\, \vec{e}_3 \wedge \mathcal{J}\vec{e}_3$$

Donc $\vec{e}_2 \wedge \mathcal{J}\vec{e}_2 = 3\vec{e}_3 \wedge \mathcal{J}\vec{e}_3$

1b/ Soit $\mathcal{J}_{\mathfrak{R}} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}$ le tenseur d'inertie du solide dans $\mathfrak{R}$.

$$\begin{pmatrix} D \\ 0 \\ F \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} D \\ -E \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad D = E = F = 0$$

$\mathfrak{R}$ est donc principal d'inertie.

2/ $\vec{\sigma} = J\vec{\omega}_o + \vec{h}$

$\vec{\omega}_o \wedge (J\vec{\omega}_o + \vec{h}) = \vec{M}$ dans le cas d'équilibre relatif.

Donc $\vec{e}_2 \wedge \dfrac{\vec{h}}{\omega_o} + \vec{e}_2 \wedge J\vec{e}_2 = 3\vec{e}_3 \wedge J\vec{e}_3$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \omega_o \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\omega_o F + h_1 \\ -\omega_o B + h_2 \\ -\omega_o D + h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\omega_o^2 D \\ -3\omega_o^2 E \\ 0 \end{pmatrix}$$

$4\omega_o D = h_3 \qquad E = 0 \qquad \omega_o F = h_1$

Seule condition sur $\mathcal{R}$ : $E = 0$, conditions sur $\vec{h}$ : $h_1 = \omega_o F$, $h_3 = 4\omega_o D$.

3a/ En équilibre relatif tous les $\vec{\gamma}_{ij}$ sont fixés dans $\mathcal{R}$ donc les éléments de $B$ sont fixes dans $\mathcal{R}$.

3b/ $s_1 \xrightarrow{\ell_1} s_2$

$S = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad T = (0 \quad -1) \qquad C = \begin{pmatrix} \vec{C}_1 \\ \vec{C}_2 \end{pmatrix} \qquad \mu = \dfrac{1}{m_1+m_2} \begin{pmatrix} m_2 & -m_1 \\ -m_2 & m_1 \end{pmatrix}$

$$B = -CT\mu = \frac{1}{m_1+m_2} \begin{pmatrix} -m_2\vec{C}_1 & m_1\vec{C}_1 \\ -m_2\vec{C}_2 & m_1\vec{C}_2 \end{pmatrix}$$

$$R = {}^tB 1_n = \frac{\vec{C}_1+\vec{C}_2}{m_1+m_2} \begin{pmatrix} -m_2 \\ m_1 \end{pmatrix}$$

Appliquons (3) $(Y = 0)$

$$\dot{\sigma} = M+B \wedge (-m\,{}^t\ddot{B}\;1_n+F)$$

$$\begin{pmatrix} \vec{\omega}_o \wedge \mathcal{J}_1\vec{\omega}_o - 3\omega_o^2\vec{e}_3 \wedge \mathcal{J}_1\vec{e}_3 \\ \vec{\omega}_o \wedge \mathcal{J}_2\vec{\omega}_o - 3\omega_o^2\vec{e}_3 \wedge \mathcal{J}_2\vec{e}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{m_1+m_2}\begin{pmatrix} -m_2\vec{C}_1 & m_1\vec{C}_1 \\ -m_2\vec{C}_2 & m_1\vec{C}_2 \end{pmatrix} (-m\ddot{B}\;1_n+F)$$

$$F = \begin{pmatrix} -\omega_o^2 m_1(\vec{r}_G+\vec{R}_1-3\vec{e}_3\vec{R}_1.\vec{e}_3) \\ -\omega_o^2 m_2(\vec{r}_G+\vec{R}_2-3\vec{e}_3\vec{R}_2.\vec{e}_3) \end{pmatrix}$$

On vérifie que la contribution de $\vec{r}_G$ est nulle et on obtient :

$$\omega_o^2\begin{pmatrix} \vec{e}_2 \wedge \mathcal{J}_1\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \wedge \mathcal{J}_1\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \wedge \mathcal{J}_2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \wedge \mathcal{J}_2\vec{e}_3 \end{pmatrix} = \frac{m_1m_2\omega_o^2}{m_1+m_2}\begin{pmatrix} \vec{e}_2 \wedge (\vec{e}_2.(\vec{R}_2-\vec{R}_1)\vec{C}_1) - 3\vec{e}_3 \wedge [\vec{e}_3.(\vec{R}_2-\vec{R}_1)\vec{C}_1] \\ \vec{e}_2 \wedge (\vec{e}_2.(\vec{R}_2-\vec{R}_1)\vec{C}_2) - 3\vec{e}_3 \wedge [\vec{e}_3.(\vec{R}_2-\vec{R}_1)\vec{C}_2] \end{pmatrix}$$

Donc $\mathcal{L}_1\vec{e}_2 = \mathcal{J}_1\vec{e}_2 + \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}[(\vec{R}_1-\vec{R}_2).\vec{e}_2]\vec{C}_1$

$$\mathcal{L}_2\vec{e}_2 = \mathcal{J}_2\vec{e}_2 + \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}[(\vec{R}_1-\vec{R}_2).\vec{e}_2]\vec{C}_2$$

3c/ Immédiate. Idem que le passage de 1 à 2.