ANALYSE NUMÉRIQUE

Les candidats sont priés de respecter les notations de l'énoncé et la numérotation des questions. Dans la correction des copies il sera tenu compte de la clarté des démonstrations ainsi que du soin apporté à leur rédaction.

L'épreuve est consacrée à l'étude de certains problèmes en optimisation. Dans la première partie on étudie une condition d'optimalité pour le problème max $\{f(x) \mid x \in A \subset \mathbb{R}^n\}$.

La deuxième partie traite de particularisations de la condition énoncée en I.

La troisième partie constitue une étude d'un algorithme permettant de résoudre le problème particulier max $\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n_+\}$.

Enfin, dans la quatrième partie, il s'agit d'étudier des propriétés et un algorithme pour résoudre le problème max $\{f(x) \mid x \in A\}$.

Notations et définitions générales

$\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels $\{0, 1, ..., ...\}$.

$\mathbb{R}$ le corps des réels, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, $\mathbb{R}^+_* = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^*$.

$\mathbb{R}^n$ l'espace vectoriel euclidien à n dimensions ;

Si $x \in \mathbb{R}^n$, les composantes de x seront notées x_i, $i = 1, ..., n$.

$< x, y >$ le produit scalaire de $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$.

$| x |$ la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall\ i \in \{1, ..., n\}, x_i \geqslant 0\}$

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ on note :

$\mathring{A}$ l'intérieur de A, $\overline{A}$ l'adhérence de A, Fr (A) la frontière de A.

co (A) l'enveloppe convexe de A.

$\overline{co}$ (A) l'enveloppe convexe fermée de A.

$\mathfrak{P}$ (A) l'ensemble des parties de A.

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ on appelle cône tangent à A en $x \in A$ l'ensemble :

$$T(A, x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall\ k \in \mathbb{N},\ \exists\ x_k \in A,\ \exists\ \lambda_k \in \mathbb{R}^+,\ x_k \xrightarrow[k \to \infty]{} x,\ \lambda_k(x_k - x) \xrightarrow[k \to \infty]{} y\}$$

Si K est un cône de $\mathbb{R}^n$ on définit son cône polaire négatif par l'ensemble :

$$\Gamma(K) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall z \in K, < y, z > \leqslant 0\}$$

Étant donné $X \subset \mathbb{R}^n$, on dit qu'une application A de X dans les parties de $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire une application multivoque de X dans $\mathbb{R}^n$) est :

- ouverte en $\bar{x} \in X$ si et seulement si pour tout $y \in A(\bar{x})$ et toute suite $(x_k)_{\mathbb{N}}$ de X convergeant vers $\bar{x}$ il existe une suite $(y_k)_{\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ convergeant vers y et il existe k_0 tels que $\forall k \geqslant k_0$, $y_k \in A(x_k)$;
- fermée en $\bar{x} \in X$ si et seulement si pour toute suite $(x_k)_{\mathbb{N}}$ de X convergeant vers $\bar{x}$ et pour toute suite $(y_k)_{\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ convergeant vers $\bar{y}$ et vérifiant $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $y_k \in A(x_k)$ on a $\bar{y} \in A(\bar{x})$.

Si $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ on note $\mathbf{V}(\bar{x})$ l'ensemble des voisinages de $\bar{x}$ et pour $\varepsilon > 0$

$B(\bar{x}, \varepsilon)$ la boule ouverte de centre $\bar{x}$ et de rayon ε.

Si f est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ alors :

- on note $\nabla f(x)$ le gradient (Frechet) de f au point $x \in \mathbb{R}^n$, s'il existe.
- pour $d \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ on dit que f possède une dérivée directionnelle le long de d en x si $\lim\limits_{\theta \to 0+} \left\{ \dfrac{f(x + \theta d) - f(x)}{\theta} \right\}$ existe et on note $f'(x\,;\,d)$ cette limite.
- f est par définition concave si $-f$ est convexe.

Pour tout $(x, d) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on note :

$$D^+(x\,;\,d) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, \theta \in \mathbb{R}^+,\ y = x + \theta d \}$$

$$[x, d] = \{ z \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, \lambda \in [0, 1],\ z = \lambda x + (1 - \lambda) d \}$$

$$[x, d[= \{ z \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, \lambda \in]0, 1],\ z = \lambda x + (1 - \lambda) d \}$$

On considérera dans cette épreuve, des problèmes d'optimisation. Ils seront notés soit $\max \{ f(x) \mid x \in A \}$ soit sous une forme plus détaillée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max f(x) \\ x \in A \end{array} \right.$$

Pour un problème d'optimisation $\max \{ f(x) \mid x \in A \}$ on dira que :

- A est le domaine réalisable.
- $\bar{x}$ est une solution locale si et seulement si $\exists\, V \in \mathbf{V}(\bar{x}),\ \forall x \in A \cap V,\ f(x) \leqslant f(\bar{x})$.
- $\bar{x}$ est une solution locale stricte si et seulement si $\exists\, V \in \mathbf{V}(\bar{x}),\ \forall x \in A \cap V,\ x \neq \bar{x},\ f(x) < f(\bar{x})$.
- $\bar{x}$ est une solution optimale si et seulement si $\forall x \in A,\ f(x) \leqslant f(\bar{x})$.

Préliminaire

Q.1. Soient X une partie de $\mathbb{R}^n$, Y une partie de $\mathbb{R}^m$, A une application de Y dans $\mathfrak{P}(X)$, f une application de $X \times Y$ dans $\mathbb{R}$.

On considère le problème d'optimisation paramétré par $y \in Y$ suivant :

$$\mathbf{P}(y) \left\{ \begin{array}{l} \max f(x, y) \\ x \in A(y) \end{array} \right.$$

et on note $v(y)$ la valeur optimale de $\mathbf{P}(y)$

$S(y)$ l'ensemble des solutions optimales de $\mathbf{P}(y)$ que l'on suppose non vide quel que soit y dans Y.

Montrer que :

a. Si X est compact, A fermée en y_0, f semi-continue supérieurement en tout point de $A(y_0) \times \{y_0\}$ alors v est semi-continue supérieurement en y_0.

b. Si A est ouverte en y_0, si f est semi-continue inférieurement en tout point de $A(y_0) \times \{y_0\}$ alors v est semi-continue inférieurement en y_0.

c. Si A est ouverte et fermée en y_0, si f est continue en tout point de $A(y_0) \times \{y_0\}$ alors l'application S est fermée en y_0.

Première Partie

Q.2. Dans cette partie, A représente une partie de $\mathbb{R}^n$ et $\bar{x}$ un point de A.

a. Montrer que le cône tangent à A en $\bar{x}$ est fermé.

b. Si A est convexe montrer que $T(A, \bar{x})$ est convexe et montrer que :

$$T(A, \bar{x}) = \overline{\{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}^+, \ \exists x \in A : y = \lambda (x - \bar{x})\}}$$

Q.3. Soient m applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, notées g_i $(i = 1, ..., m)$.
On suppose que $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, ..., m\}, \ g_i(x) \geqslant 0\}$ et que les g_i $(i = 1, ..., m)$ sont différentiables en $\bar{x}$.

On note $E(\bar{x})$ l'ensemble des indices i de $\{1, ..., m\}$ tels que $g_i(\bar{x}) = 0$ et $K'(A, \bar{x})$ l'ensemble des y de $\mathbb{R}^n$ tels que $\forall i \in E(\bar{x}), \ < \nabla g_i(\bar{x}), y > \ \geqslant 0$.

a. Montrer que $T(A, \bar{x}) \subset K'(A, \bar{x})$.

b. Montrer que si les g_i $(i = 1, ..., m)$ sont affines (c'est-à-dire si A est un polyèdre) alors $T(A, \bar{x}) = K'(A, \bar{x})$.

c. Montrer que s'il existe $d \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall i \in E(\bar{x}), \ < \nabla g_i(\bar{x}), d > \ > 0$ alors $T(A, \bar{x}) = K'(A, \bar{x})$.

Q.4. Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On considère le problème d'optimisation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max f(x) \\ x \in A \end{array} \right.$$

Montrer que si f est différentiable en $\bar{x}$ et si $\bar{x}$ maximise localement f sur A alors $\nabla f(\bar{x}) \in \Gamma(T(A, \bar{x}))$.

On dira, dans la suite du problème, qu'un point $\bar{x}$ est stationnaire pour le problème $\max \{f(x) \mid x \in A\}$ si $\bar{x} \in A$ et si $\bar{x}$ vérifie la condition nécessaire énoncée en Q.4., c'est-à-dire $\nabla f(\bar{x}) \in \Gamma\left(T(A, \bar{x})\right)$.

Deuxième partie

L'objet de cette partie est de donner des conditions suffisantes permettant de caractériser, dans certains cas, le cône polaire d'un cône tangent et d'expliciter la condition nécessaire d'optimalité trouvée à la question Q.4.

Q.5. Soit A un convexe de $\mathbb{R}^n$ et soient x et y deux points de $\mathbb{R}^n$ tels que $x \in \mathring{A}$ et $y \notin \mathring{A}$.
Montrer que $[x, y] \cap \mathrm{Fr}(A)$ est un ensemble réduit à un élément, noté z, et que $[x, z[\ \subset \mathring{A}$.

Q.6. Si A et B sont deux convexes de $\mathbb{R}^n$ tels que $\mathring{A} \cap B \neq \varnothing$, montrer que $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cap B}$.

Q.7. Soient K un cône de $\mathbb{R}^n$, C_1 et C_2 deux cônes fermés de $\mathbb{R}^n$ et K_1 et K_2 deux cônes convexes fermés de $\mathbb{R}^n$.

Démontrer successivement que :

a. $\Gamma(\Gamma(K)) = \overline{c\sigma}(K)$

b. $\Gamma(K) = \Gamma(\overline{c\sigma}(K))$

c. $C_1 \cup C_2 \subset C_1 + C_2 \subset c\sigma(C_1 \cup C_2)$

d. $\Gamma(C_1) \cup \Gamma(C_2) \subset \Gamma(C_1 \cap C_2)$

e. $\Gamma(C_1 + C_2) = \Gamma(C_1) \cap \Gamma(C_2)$

f. $\Gamma(K_1 \cap K_2) = \overline{\Gamma(K_1) + \Gamma(K_2)}$

Q.8. Si K est un cône polyédrique de $\mathbb{R}^n$ ($K = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid By \geqslant 0 \}$ où B est une matrice de m lignes et n colonnes) montrer que

$$\Gamma(K) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \exists\ u \in \mathbb{R}^m_+ \ :\ y = -B^t u \}$$

(la notation B^t signifie « *transposée de la matrice* B »).

Q.9. On se donne le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \max f(x) \\ x \in A \cap B \end{cases}$$

et on suppose que : $\bar{x} \in A \cap B$, B est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$, g_j ($j = 1, \dots, m$) sont m applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ différentiables en $\bar{x}$ et $A = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \forall\ j \in \{1, \dots, m\},\ g_j(x) \geqslant 0 \}$.

On note

$$\begin{cases} E(\bar{x}) = \{ j \in \{1, \dots, m\} \mid g_j(\bar{x}) = 0 \} \\ K'(A, \bar{x}) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \forall\ j \in E(\bar{x}),\ < \nabla g_j(\bar{x}), y > \ \geqslant 0 \}. \end{cases}$$

Montrer que si

$$\begin{cases} \overline{c\sigma}\,(T(A \cap B, \bar{x})) = K'(A, \bar{x}) \cap \overline{c\sigma}\,(T(B, \bar{x})) \\ \Gamma(K'(A, \bar{x})) + \Gamma(T(B, \bar{x})) \text{ est fermé} \end{cases}$$

alors si $\bar{x}$ maximise localement f sur $A \cap B$ et si f est différentiable en $\bar{x}$ il existe $u \in \mathbb{R}^m_+$ tel que :

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(\bar{x}) \in \Gamma(T(B, \bar{x})) \\ \text{(ii)} \quad \forall\ i \in \{1, \dots, m\},\ u_i g_i(\bar{x}) = 0. \end{cases}$$

Q.10. Les notations de la question Q.9 sont reprises.

On suppose que B est donné par $B = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \forall\ i \in \{1, \dots, p\},\ h_i(x) = 0 \}$ où les h_i ($i = 1, \dots, p$) sont p applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ différentiables en $\bar{x}$.

On suppose que les vecteurs $\nabla h_i(\bar{x})$ ($i = 1, \dots, p$) sont linéairement indépendants et qu'il existe $d \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\begin{cases} \forall\ i \in \{1, \dots, p\},\ < \nabla h_i(\bar{x}), d > \ = 0 \\ \forall\ j \in E(\bar{x}),\ < \nabla g_j(\bar{x}), d > \ > 0. \end{cases}$$

Démontrer que si f est différentiable en $\bar{x}$ et si $\bar{x}$ maximise localement f sur $A \cap B$ alors il existe $u \in \mathbb{R}^m_+$, $v \in \mathbb{R}^p$ vérifiant :

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{p} v_i \nabla h_i(\bar{x}) = 0 \\ \text{(ii)} \quad \forall\ i \in \{1, \dots, m\},\ u_i g_i(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

TROISIÈME PARTIE

Dans cette partie on étudie des conditions suffisantes sur la construction d'un algorithme « *convergent* » pour résoudre le problème d'optimisation $(\mathbf{P}_3)$: $\max \{ f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n_+ \}$ où f est une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

L'algorithme dont il sera question peut être abstraitement formulé par la donnée de deux procédures R_1 et R_2.

R_1 permet de choisir en un point $x \in \mathbb{R}^n_+$ non stationnaire pour $(\mathbf{P}_3)$ une direction réalisable de pente, notée d, c'est-à-dire une direction telle que $D^+(x\,;d) \cap \mathbb{R}^n_+ \neq \{x\}$ et $< \nabla f(x), d > \; > 0$.

R_2 permet de choisir sur la partie réalisable de $D^+(x\,;d)$, pour $x \in \mathbb{R}^n_+$ et d associée à x par la procédure R_1, un point $x' \in \mathbb{R}^n_+$ tel que $f(x') > f(x)$. L'algorithme se formule alors de la manière suivante :

> $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$ un point de départ
>
> *itération* k $(k \geqslant 0)$ $x_k \in \mathbb{R}^n_+$ est donné.
>
> si x_k est stationnaire pour $(\mathbf{P}_3)$ alors stop sinon :
>
> — choisir d_k par R_1
>
> — choisir le successeur x_{k+1} de x_k par R_2
>
> *fin itération* k.

On dit que l'algorithme converge si on obtient un point stationnaire à une itération $\bar{k}$ ou si les points d'accumulation de la suite $(x_k)_{\mathbb{N}}$ construite sont stationnaires.

A la question Q.11 on montre sur un exemple qu'un mauvais choix pour R_1 peut conduire à un algorithme non convergent. Dans les questions suivantes on étudie des procédures R_1 et R_2 particulières et on démontre la convergence de l'algorithme dans les questions Q.15 et Q.16.

Q.11. On suppose que l'application f du problème $(\mathbf{P}_3)$ est définie en $x \in \mathbb{R}^3$ par $f(x) = -\frac{4}{3}(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2)^{\frac{3}{4}} + x_3$.

La procédure R_1 utilisée détermine, pour $x \in \mathbb{R}^3_+$, la direction d par :

$$\forall j \in \{1, 2, 3\}, \quad \begin{cases} d_j = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) & \text{si } \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) \geqslant 0 \text{ ou si } x_j > 0 \\ \quad = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

La procédure R_2 utilisée détermine, pour $x \in \mathbb{R}^3_+$ et d associée à x par R_1, un point $x' \in D^+(x; d) \cap \mathbb{R}^3_+$ vérifiant :

$$\forall y \in D^+(x; d) \cap \mathbb{R}^3_+, \quad f(x') \geqslant f(y).$$

a. Montrer que l'application f est concave et est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$.

b. Montrer que la direction d associée à $x \in \mathbb{R}^3_+$ par R_1, est la projection de $\nabla f(x)$ sur le cône $T(\mathbb{R}^3_+, x)$ et que si $d \neq 0$ et si x' est construit par R_2 alors $f(x') > f(x)$.

c. Le point de départ de l'algorithme est choisi de la forme $x_0 = (0, a, b)$ avec $b \geqslant 0$ et $0 < a < 2^{-3/2}$. Calculer le terme général de la suite construite par l'algorithme.

d. En déduire que la suite construite converge vers un point $\bar{x}$ qui n'est pas stationnaire pour le problème $(\mathbf{P}_3)$.

Dans la suite de cette partie on considérera la procédure R_1 suivante, associée à une valeur fixée $\varepsilon \in]0, 1] \subset \mathbb{R}$.

A $x \in \mathbb{R}^n_+$ on associe $\alpha(x) = \max \left\{ \max_{j=1,\dots,n} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right\}, \left| \min_{j=1,\dots,n} \left\{ x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right\} \right| \right\}$ et on construit la direction $d(x)$ par :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad \begin{cases} d_j(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) & \text{si} \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad \left| x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| \geqslant \varepsilon\, \alpha(x) \\ \quad = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Q.12. *a.* Montrer que si $\alpha(x) = 0$ alors x est stationnaire pour le problème $(\mathbf{P}_3)$.

b. En notant, pour $x \in \mathbb{R}^n_+$, $L(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \forall k \in \mathbb{N}, \exists x_k \in \mathbb{R}^n_+, x_k \xrightarrow[k \to \infty]{} x \text{ et } d(x_k) \xrightarrow[k \to \infty]{} y \}$, montrer que si $\bar{x}$ n'est pas stationnaire pour $(\mathbf{P}_3)$ alors

(i) $L(\bar{x})$ est un ensemble de cardinal fini et $0 \notin L(\bar{x})$

(ii) $\exists \gamma > 0, \exists V \in \mathbf{V}(\bar{x}), \forall x \in V \cap \mathbb{R}^n_+, < \nabla f(x), d(x) > \; \geqslant \gamma$.

On considère la fonction φ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(\theta, x, d) = f(x + \theta d) - f(x) - \frac{\theta}{2} < \nabla f(x), d > .$$

On note $\Delta = \{ \theta \mid \exists \; j \in \mathbb{N}, \; \theta = 2^{-j} \}$ et en tout point $(x, d) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ on considère :

$$F(x, d) = \{ \theta \in \Delta \mid \varphi(\theta, x, d) \geqslant 0 \}$$
$$R(x, d) = \{ \theta \in \mathbb{R}^+_* \mid \varphi(\theta, x, d) = 0 \}$$

et on définit les applications t et r par :

$$\forall (x, d) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad t(x, d) = \sup \{ F(x, d) \}$$
$$\forall (x, d) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad r(x, d) = \inf \{ R(x, d) \}.$$

Q.13. On suppose que f est bornée supérieurement sur $\mathbb{R}^n$ et qu'au point $(\bar{x}, \bar{d}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ on a $< \nabla f(\bar{x}), \bar{d} > \; > 0$.

Montrer que :

a. $\exists V \in \mathbf{V}((\bar{x}, \bar{d})), \forall (x, d) \in V, \; F(x, d) \neq \varnothing$ et $R(x, d) \neq \varnothing$.

b. La fonction t n'est pas obligatoirement semi-continue inférieurement au point $(\bar{x}, \bar{d})$. (On donnera un exemple où f est une fonction d'une seule variable).

c. La fonction r est semi-continue inférieurement au point $(\bar{x}, \bar{d})$.

Q.14. On suppose que f est bornée supérieurement sur $\mathbb{R}^n$. On considère une suite $((x_k, d_k))_{\mathbb{N}}$ convergeant vers $(\bar{x}, \bar{d})$ avec :

$$\forall \; k \in \mathbb{N}, \quad < \nabla f(x_k), d_k > \; > 0 \quad \text{et} \quad < \nabla f(\bar{x}), \bar{d} > \; > 0.$$

Montrer que $\bar{x}$ n'est pas point d'accumulation de la suite $(y_k)_{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall \; k \in \mathbb{N}, \quad y_k = x_k + t(x_k, d_k)\, d_k.$$

Pour le problème $(\mathbf{P}_3)$ la procédure R_2, en un point non stationnaire $x \in \mathbb{R}^n_+$ et d associée à x par R_1, est définie par le choix d'un point $x' \in \mathbb{R}^n_+$ tel que :

$$x' = x + \lambda d \quad \text{avec} \quad \lambda = \sup \{ \theta \in \Delta \mid \theta \leqslant \theta', \varphi(\theta, x, d) \geqslant 0 \}$$

$$\text{où} \quad \theta' = \sup \{ \theta \geqslant 0 \mid x + \theta d \in \mathbb{R}^n_+ \}.$$

Q.15. On envisage une suite $(x_k)_{\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n_+$ convergeant vers $\bar{x}$. On suppose que $\bar{x}$ et x_k pour tout k ne sont pas stationnaires pour le problème $(\mathbf{P}_3)$. A cette suite on associe la suite $(y_k)_{\mathbb{N}}$ construite par la procédure R_2.

Montrer que $\bar{x}$ n'est pas un point d'accumulation de la suite $(y_k)_{\mathbb{N}}$.

Q.16. La résolution du problème $(\mathbf{P}_3)$ est conduite au moyen des procédures R_1 et R_2. Montrer que si le point de départ x_0 est tel que $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geqslant f(x_0) \}$ soit compact, alors les points d'accumulation de la suite construite par l'algorithme sont stationnaires pour le problème $(\mathbf{P}_3)$.

Quatrième partie

On s'intéresse dans cette partie au problème général $(\mathbf{P}_4)$:

$$(\mathbf{P}_4) \quad \begin{cases} \max f(x) \\ h_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, p \\ g_j(x) \geqslant 0 \quad j = 1, \dots, m \\ x \in D = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid By \geqslant b \}. \end{cases}$$

On supposera dans cette partie que les fonctionnelles f, h_i $(i = 1, \dots, p)$, g_j $(j = 1, \dots, m)$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$, que le domaine réalisable de $(\mathbf{P}_4)$, noté $\mathbf{D}_4$, est non vide et que B est une matrice à q lignes et n colonnes.

On note χ l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\chi(x) = -\left(\sum_{i=1}^{p} | h_i(x) | + \sum_{j=1}^{m} \max \{ 0, -g_j(x) \} \right)$$

et on définit l'application p de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+_*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$p(x, \alpha) = f(x) + \alpha \chi(x).$$

On notera également en tout $x \in \mathbf{D}_4$ l'ensemble des indices des contraintes en inégalités de $(\mathbf{P}_4)$ actives en x par $E(x) = E_1(x) \cup E_2(x)$ avec

$$E_1(x) = \{ j \in \{1, \dots, m\} \mid g_j(x) = 0 \}$$

et

$$E_2(x) = \{ l \in \{1, \dots, q\} \mid B_l x = b_l \}, \text{ avec } B_l \text{ la } l^{\text{ème}} \text{ ligne de B.}$$

On pourra, dans certaines questions, faire en $x \in \mathbf{D}_4$ l'hypothèse $(\mathbf{H}_4)$ suivante :

$(\mathbf{H}_4)$ $(\mathbf{H}_4)$ est vraie en $x \in \mathbf{D}_4$ si et seulement si

i) $\nabla h_i(x)$ $i = 1, \dots, p$ sont linéairement indépendants

ii) $\exists\, d \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \ \langle \nabla h_i(x), d \rangle = 0$$
$$\forall i \in E_1(x), \ \langle \nabla g_i(x), d \rangle > 0$$
$$\forall i \in E_2(x), \ B_i d > 0$$

Q.17. Montrer que pour tout $(x, d, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times \mathbb{R}^+_*$ la fonction φ_α (définie par $\varphi_\alpha(t) = p(t, \alpha)$) de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ possède une dérivée directionnelle le long de d en x.

Exprimer simplement cette dérivée en fonction des gradients de f, h_i $(i = 1, \dots, p)$ et g_j $(j = 1, \dots, m)$ calculés en x.

Q.18. On considère un point $\bar{x} \in \mathbf{D}_4$. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

i) $(\mathbf{H}_4)$ est vraie en $\bar{x}$

ii) $\exists\, V \in \mathbf{V}(\bar{x})$ tel que pour toute fonction bornée c de V dans $\mathbb{R}^p$ il existe une fonction bornée d de V dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant pour tout $x \in V$:

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, p\}, < \nabla h_i(x), d(x) > \; = c_i(x) \\ \forall j \in E_1(\bar{x}), \; < \nabla g_j(x), d(x) > \; \geqslant +1 \\ \forall j \in E_2(\bar{x}), \; B_j\, d(x) \geqslant +1 \end{cases}$$

L'objet des questions qui suivent est de montrer que la résolution de $(\mathbf{P}_4)$ est liée, dans certains cas, à la résolution du problème $\max\{p(x, \alpha) \mid x \in D\}$ pour α assez grand.

Q.19. Montrer que l'existence de $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^+$, $\bar{x} \in D$ et $V \in \mathbf{V}(\bar{x})$ vérifiant

i) $V \cap \mathbf{D}_4 \neq \varnothing$

ii) $\forall \alpha \geqslant \bar{\alpha}, \; \forall x \in V \cap D, \; p(x, \alpha) \leqslant p(\bar{x}, \alpha)$

implique que $\bar{x}$ est une solution locale de $(\mathbf{P}_4)$.

Q.20. On suppose que $\bar{x}$ est une solution locale stricte de $(\mathbf{P}_4)$.

Démontrer que pour tout ε $(\varepsilon > 0)$ fixé, il existe un triplet $(\delta, \gamma, \alpha) \in \mathbb{R}^3_+$ vérifiant :

i) $0 < \delta < \varepsilon, \quad \gamma > 0, \quad \alpha > 0$

ii) $\forall \gamma' \; (0 < \gamma' \leqslant \gamma), \quad \forall y \in D \cap \mathrm{Fr}(B(\bar{x}, \delta)), \quad \chi(y) \leqslant -\gamma'$ ou $f(\bar{x}) - f(y) \geqslant \gamma'$

iii) $\alpha\gamma \geqslant \gamma + 1$ et $\forall \alpha' \geqslant \alpha, \quad \forall y \in D \cap \mathrm{Fr}(B(\bar{x}, \delta)), \quad p(y, \alpha') < p(\bar{x}, \alpha')$
$(B(\bar{x}, \delta)$ est la boule ouverte de centre $\bar{x}$ et de rayon $\delta)$.

Q.21. L'hypothèse de la question Q.20 étant vérifiée, à tout $\varepsilon > 0$ on associe l'ensemble $U(\varepsilon)$ des triplets vérifiant i) à iii) de Q.20. A tout $t \in \mathbb{R}^+_*$ on associe l'ensemble $\mathbf{W}(t)$ des $\varepsilon > 0$ tels qu'il existe un triplet $(\delta, \gamma, \alpha) \in U(\varepsilon)$ vérifiant $\alpha \leqslant t$.

Montrer que :

a. $\exists\, t_0 > 0, \quad \forall t \geqslant t_0, \quad \mathbf{W}(t) \neq \varnothing$

b. $\forall t \geqslant t_0, \quad e(t) = \inf\{\varepsilon \mid \varepsilon \in \mathbf{W}(t)\} > 0$

c. $\lim\limits_{t \to +\infty} e(t) = 0$.

Q.22. Déduire de la question Q.21 la proposition suivante :

Si $\bar{x}$ est une solution locale stricte de $(\mathbf{P}_4)$ alors il existe $\bar{\alpha} > 0$ et deux fonctions δ et x $(\delta : [\bar{\alpha}, +\infty[\to \mathbb{R}^+_*$, $x : [\bar{\alpha}, +\infty[\to \mathbb{R}^n)$ tels que pour tout $\alpha \geqslant \bar{\alpha}$ on ait :

a. $x(\alpha) \in D \cap B(\bar{x}, \delta(\alpha))$

b. $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \delta(\alpha) = 0$

c. $\forall t \in D \cap B(\bar{x}, \delta(\alpha)), \quad p(t, \alpha) \leqslant p(x(\alpha), \alpha)$.

Q.23. Montrer que si $\bar{x} \in \mathbf{D}_4$ est une solution locale stricte de $(\mathbf{P}_4)$ et si $(\mathbf{H}_4)$ est vraie en $\bar{x}$ alors

$$\exists \bar{\alpha} > 0, \quad \exists V \in \mathbf{V}(\bar{x}), \quad \forall \alpha \geqslant \bar{\alpha}, \quad \forall x \in D \cap V, \quad p(x, \alpha) \leqslant p(\bar{x}, \alpha).$$

On suppose dans la suite de cette partie que m, le nombre de contraintes en inégalité, $g_j(x) \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, m)$ est nul. Pour ce problème $(\mathbf{P}_4)$ particularisé $(\max \{f(x) \mid x \in D \cap \{y \mid \forall i = \{1, \ldots, p\},\ h_i(y) = 0\}\})$, on note pour tout $x \in D$, $(\mathbf{P}'_4(x))$ le problème d'optimisation suivant, paramétré par x :

$$(\mathbf{P}'_4(x)) \quad \begin{cases} \max < \nabla f(x), t - x > \\ \forall i \in \{1, \ldots, p\}, h_i(x) + < \nabla h_i(x), \ t - x > = 0 \\ t \in D. \end{cases}$$

On note $\mathbf{D}'_4$ l'application de D dans les parties de D définie en tout x de D par

$$\mathbf{D}'_4(x) = \{t \in D \mid \forall i \in \{1, \ldots, p\}, \ h_i(x) + < \nabla h_i(x), \ t - x > = 0\}$$

et par $\mathbf{S}_4$ l'application de D dans les parties de D qui représente l'ensemble des solutions optimales de $(\mathbf{P}'_4(x))$.

On fera les hypothèses :

i) D est compact

ii) $\forall x \in D$, $\mathbf{D}'_4(x) \neq \varnothing$

iii) $\exists M > 0, \quad \forall x \in D, \quad \forall z \in \mathbf{S}_4(x), \quad \exists u \in \mathbb{R}^p$ vérifiant :

$$\max_{i=1,\ldots,p} \{|u_i|\} \leqslant M \quad \text{et} \quad \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{p} u_i \nabla h_i(x) \in \Gamma(T(D, z))$$

iv) $\forall x \in \mathbf{D}_4$, $(\mathbf{H}_4)$ est vraie en x.

Q.24. Montrer que l'application $\mathbf{D}'_4$ est ouverte et fermée en tout $x \in \mathbf{D}_4$.

Q.25. L'algorithme suivant est appliqué au problème $(\mathbf{P}_4)$.

$x_0 \in D$ point de départ, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ fixé.

itération k.

si $x_k \in \mathbf{S}_4(x_k)$ alors stop sinon

i) choisir $z_k \in \mathbf{S}_4(x_k)$ et poser $d_k = z_k - x_k$

ii) calculer $x_{k+1} = x_k + t(x_k, d_k)\, d_k$

où $t(x_k, d_k) = \sup \left\{ \theta \in \Delta \mid p(x_k + \theta d_k, \alpha) - p(x_k, \alpha) - \frac{\theta}{2} p'(x_k, \alpha; d_k) \geqslant 0 \right\}$

(cf. procédure R_2 de la partie III associée à la fonction p).

Fin itération.

Montrer qu'il existe une valeur $\bar{\alpha} > 0$ telle que pour tout $\alpha \geqslant \bar{\alpha}$ ou bien l'algorithme fournit en un nombre fini d'itérations un point $x_{\bar{k}}$ vérifiant la condition nécessaire d'optimalité pour $(\mathbf{P}_4)$ ou bien l'algorithme construit une suite telle que ses points d'accumulation vérifient la condition nécessaire d'optimalité pour $(\mathbf{P}_4)$. (Cette condition nécessaire d'optimalité est étudiée en Q.10.)

RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE NUMERIQUE

I - Présentation du sujet

Le problème d'analyse numérique de cette année était consacré à l'étude d'algorithmes permettant de déterminer les points stationnaires de problèmes d'optimisation du type max $\{f(x) \mid x \in A\} \subset \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire des points candidats à être des solutions locales (ou globales) du problème.

Dans le préliminaire on présente le théorème du maximum de Berge.

Dans la première partie on introduit la notion de cône tangent $T(A, \bar{x})$ en un point $\bar{x}$ à une partie A de $\mathbb{R}^n$ et on montre que si f est différentiable au point $\bar{x}$, une condition d'optimalité au point $\bar{x}$ pour max $\{f(x) \mid x \in A\}$ est que $\nabla f(\bar{x})$ appartienne au cône polaire de $T(A,\bar{x})$ (on dit alors que $\bar{x}$ est stationnaire).

Dans la deuxième partie on donne des conditions suffisantes pour caractériser le cône polaire d'un cône tangent et on explicite la condition pour que $\bar{x}$ soit stationnaire dans le cas où A est caractérisé par des contraintes unilatérales et des contraintes bilatérales (condition de Kuhn-Tucker).

La troisième partie traite de la construction d'un algorithme convergent pour trouver des points stationnaires lorsque $A = \mathbb{R}^n_+$. L'étude d'un exemple montre qu'une procédure trop simple - quoique naturelle - (adaptation de la méthode de la plus forte pente à un problème avec contraintes) peut conduire à un algorithme non convergent.

Enfin, la quatrième partie traite de la construction d'un algorithme dans le cas où A est caractérisé par des contraintes unilatérales et bilatérales. La méthode utilisée est celle des fonctions pénalisantes qui permet de ramener le problème d'optimisation à une forme plus simple (problème sans contraintes -non linéaires-). L'objet des questions de cette partie (Q_{17} à Q_{23}) était la démonstration d'une condition suffisante d'existence d'une pénalité exacte dans le cas non convexe. Dans les deux dernières questions on traite de la convergence d'un algorithme par linéarisation successive qui est un moyen simple de résoudre des problèmes d'origine concrète.

La résolution de ce problème ne demandait que des connaissances générales sur la topologie de $\mathbb{R}^n$ et la notion de différentiabilité d'une application en un point.

II - Les résultats

Au vu des copies les plus faibles, il apparaît que de trop nombreux candidats ne maîtrisent pas la notion d'application différentiable, ce qui compromet évidemment gravement leurs chances de succès à l'agrégation, particulièrement à l'option d'analyse numérique.

Les meilleures copies ont traité avec plus ou moins de bonheur le préliminaire et les deux premières parties. La troisième a été abordée par certains, mais la question Q.II.a a presque toujours donné lieu à des erreurs consternantes. La quatrième partie, de loin la plus délicate, n'a été qu'effleurée.

Cette année, 402 candidats ont choisi l'option d'analyse numérique. Bien que cette option comporte désormais un programme spécialisé, une certaine proportion de candidats ont visiblement choisi cette option par défaut. S'il est vrai que l'on peut aborder l'épreuve d'analyse numérique avec pour seul bagage les connaissances d'analyse enseignées dans toutes les maîtrises, voire les licences, de mathématiques, encore faut-il posséder ces connaissances et savoir les utiliser.

III - Remarques sur les questions abordées par les candidats

Préliminaire

Q1 a. et b. sans difficulté si l'on sait ce qu'est une application semi-continue.

Q1 c. On ne supposait pas X compact. Il ne fallait donc pas se servir du résultat de a.

Première partie

Q2 a. Si pour tout n on a $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^n = \bar{x}$ on n'a pas (contrairement à une croyance fort répandue) $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^k = \bar{x}$.

b. La convexité de $T(A,\bar{x})$ résultait de l'expression de $T(A,\bar{x})$ comme fermeture de $\{\lambda(x-\bar{x}) \mid x \in A,\ \lambda \in \mathbb{R}^+\}$.

Q3 a. La partie A n'est pas convexe : il ne faut pas utiliser la Q2 b. Par ailleurs, la relation
$\forall k \in \mathbb{N},\ g_i(x_k) = \nabla g_i(\bar{x})(x_k-\bar{x}) + \varepsilon(x_k)\ ||x_k-x|| \geq 0$
n'implique pas que $\nabla g(\bar{x})(x_k-\bar{x}) \geq 0$, même pour "k assez grand". La relation demandée résulte du passage à la limite de :

$$\nabla g_i(\bar{x})\ (\lambda_k(x_k-\bar{x})) + \varepsilon(x_k)\ ||\lambda_k(x_k-\bar{x})|| \geq 0$$

b. On montre que si $y \in T(A,\bar{x})$ alors $x_t = \bar{x}+ty \in A$ pour t assez petit. Il ne fallait pas oublier de regarder le signe de $g_i(x_t)$ pour $i \notin E(\bar{x})$.

Q4. Même remarque que pour Q3 a.

Deuxième partie

Q5. Question classique.

Q6. On ne suppose pas $\overset{\circ}{B} \neq \emptyset$.

Q7. Sans difficulté.

Q8. Il fallait démontrer que $H = \{y \mid \exists\, u \in R_{+}^{n},\ y = -B^{t}u\}$ est fermé afin de pouvoir appliquer $\Gamma\Gamma(H) = H$. Si on note b_i les vecteurs lignes de B, on a $H = \{y \mid \exists\, \lambda_i \geqq 0,\ y = \sum_i \lambda_i b_i\}$: H est le cône tangent en 0 au polyèdre de sommets $\{0\} \cup \{b_i\}_{i=i}^{n}$, donc est fermé (Q2 a).

Q9. On appliquait les résultats précédemment démontrés Q4, Q7b., Q7f., Q8 .

Troisième partie

Q11 a. La fonction $t \mapsto t^{3/4}$ n'est pas convexe ! La concavité de f résulte de la convexité de $t \mapsto t^{3/2}$ et de la convexité de $(x_1, x_2) \to (x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2)^{1/2}$ qui est une norme. Les dérivées partielles de t ne sont pas définies aux points $(0, 0, x_3)$ et il fallait les prolonger par continuité.

Remarques bibliographiques

Partie III - l'exemple de la question Q11 est donné par P. Wolfe, IBM Journal, July 72.

La partie IV est une présentation de certaines parties de l'article de :

Han-Mangasarian "Exact penalty functions in non linear programming"
Mathematical programming 17, pages 251-269 (1979).

Le lecteur pourra également s'intéresser aux livres de :

Laurent "Approximation et optimisation" Hermann (1972)

Luenberger "Introduction to linear and non-linear programming" Wesley, 1973.

Fletcher "Practical methods of Optimization (vol. 1 et 2). John Wiley, 1980-81

par exemple.

IV - Répartition des notes

La moyenne des notes (sur 40) est 9,8. Le détail de la répartition des notes est donné dans le tableau suivant :

0 à 4	157 copies
5 à 9	73 "
10 à 14	54 "
15 à 19	42 "
20 à 24	39 "
25 à 29	22 "
30 à 34	11 "
35 à 39	3 "
40	1 "