MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

DURÉE : 6 heures

PRÉAMBULE

Ce problème est consacré à l'étude de la question suivante : étant donné deux polygones du plan (resp. : deux polyèdres de l'espace) de même aire (resp. : de même volume), peut-on découper le premier en morceaux et déplacer ces morceaux de façon à reconstituer le second?

La partie I met en place les données et fournit quelques résultats généraux. La partie II est l'étude du problème en dimension 2 et la partie III constitue une première approche de cette étude en dimension 3. La partie IV construit les outils nécessaires à une étude plus approfondie, abordée dans la partie V.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Soit n un entier naturel au moins égal à 2 et soit E un espace affine réel euclidien de dimension n, muni de sa topologie usuelle. On notera comme d'habitude $\overset{\circ}{X}$ et $\overline{X}$ l'intérieur et l'adhérence d'une partie X de E.

On appelle *simplexe* de E toute partie S de E qui est l'enveloppe convexe de $n+1$ points affinement indépendants de E; l'ensemble de ces $n+1$ points est uniquement déterminé par S : c'est l'ensemble des *sommets* du simplexe S.

Soient X et Y des parties de E; on dira qu'elles sont *quasi disjointes* lorsque leurs intérieurs sont disjoints, c'est-à-dire $\overset{\circ}{X} \cap \overset{\circ}{Y} = \varnothing$. Soient $X_1, \ldots, X_k$, X des parties de E; les notations

$$X = \coprod_{i=1}^{k} X_i \quad \text{ou} \quad X = X_1 \coprod X_2 \coprod \ldots \coprod X_k$$

signifient : pour tous i, j tels que $1 \leqslant i < j \leqslant k$ les parties X_i et X_j sont quasi disjointes et la réunion des X_i est X.

On appelle *polyèdre* de E toute partie (éventuellement vide) de E qui est la réunion d'un ensemble fini de simplexes deux à deux quasi disjoints.

On distingue parmi les polyèdres de E les *polytopes* : ce sont les polyèdres convexes non vides de E; on admettra que les polytopes de E sont aussi caractérisés parmi les polyèdres par l'une des propriétés suivantes :

1° Il existe une partie finie génératrice de E dont le polytope est l'enveloppe convexe;

2° Il existe une famille finie de demi-espaces fermés dont le polytope est l'intersection.

On admettra de plus les résultats suivants sur les polytopes : soit P un polytope; alors :

a. Soit k le nombre minimal de points dont P est l'enveloppe convexe. Alors il existe une et une seule partie ayant k éléments dont P est l'enveloppe convexe; c'est l'ensemble des *sommets* de P. Dans le cas particulier des simplexes, on retrouve la même notion de sommet;

b. Soit m le nombre minimal d'éléments d'un ensemble de demi-espaces fermés dont P est l'intersection; alors il existe un et un seul tel ensemble ayant m éléments. Soit $\{F_1, \ldots, F_m\}$ cet ensemble; la frontière H_i de F_i est un *hyperplan facial* de P. La frontière de P est la réunion des $H_i \cap P$, et chaque $H_i \cap P$ est un polytope de H_i, appelé *face* de P.

On admettra sans démonstration que toutes les notions introduites ci-dessus sont invariantes par isométrie (et plus généralement par bijection affine).

On appellera *décomposition* d'un polyèdre P toute famille finie de polytopes deux à deux quasi disjoints dont P est la réunion. Soient $(P_1, \dots, P_s)$ et $(P'_1, \dots, P'_t)$ des décompositions du polyèdre P; on dira que $(P'_1, \dots, P'_t)$ est plus fine que $(P_1, \dots, P_s)$ si tout P'_j est inclus dans au moins un P_i.

Partie I. — LES INVARIANTS DE DÉCOUPAGE

Dans cette partie, n est quelconque.

I.1. Soient $P_1, \dots, P_k$ des polyèdres deux à deux quasi disjoints; montrer que leur réunion est un polyèdre.

I.2. *a.* Montrer que tout polyèdre est l'adhérence de son intérieur. On pourra commencer par le cas des simplexes.

b. Montrer que si P' est un polyèdre quasi disjoint de P, alors $\overset{\circ}{P'} \cap P = \varnothing$.

I.3. Montrer que si $P_1, \dots, P_k$, P sont des polyèdres deux à deux quasi disjoints, alors les polyèdres $P_1 \coprod \dots \coprod P_k$ et P sont quasi disjoints.

I.4. Soit P un polyèdre; soit (P_i) une décomposition de P, et soit (P'_j) une décomposition de P plus fine que (P_i); montrer que chaque P_i admet une décomposition formée de certains P'_j.

I.5. Soit P un polyèdre; soit $(H_1, \dots, H_m)$ une famille finie d'hyperplans de E, contenant les hyperplans faciaux des polytopes d'une décomposition de P; montrer qu'il existe une seule décomposition $(P_1, \dots, P_r)$ de P telle que

$$P \setminus \bigcup_{i=1}^{m} H_i = \bigcup_{j=1}^{r} \overset{\circ}{P}_j$$

(on pourra, pour chaque point de $\overset{\circ}{P}$, considérer l'ensemble des demi-espaces ouverts qui le contiennent et qui ont pour frontière l'un des H_i).

Ce type de décomposition sera appelé *dissection* de P.

I.6. Étant donné deux décompositions (P_i) et (Q_j) d'un polyèdre P, montrer qu'il existe une dissection (R_k) de P telle que chaque P_i et chaque Q_j admette pour dissection une sous-famille de (R_k).

Soit Π (resp. Π_c) l'ensemble des polyèdres (resp. des polytopes) de E. Soit A un groupe commutatif noté additivement; on dit qu'une application f de Π_c dans A est *additive* lorsque pour tout polytope P et toute dissection de P en deux polytopes P_1 et P_2 on a :

$$f(P) = f(P_1) + f(P_2)$$

I.7. Soit f une application additive de Π_c dans un groupe commutatif $\mathcal{A}$.

a. Montrer que pour tout polytope P et toute décomposition (P_i) de P on a :

$$f(P) = \sum_i f(P_i)$$

(on pourra traiter d'abord le cas d'une dissection).

b. Montrer qu'il existe une unique application $\overline{f}$ de Π dans $\mathcal{A}$ qui prolonge f et telle que l'on ait

$$\overline{f}(P \coprod P') = \overline{f}(P) + \overline{f}(P')$$

pour tous polyèdres quasi disjoints P et P'.

Soit G un groupe d'isométries de E. On dira que deux polyèdres P et Q sont G-*équidécomposables* et l'on écrira $P \underset{G}{\approx} Q$, s'il existe des décompositions (P_i) de P, (Q_i) de Q, et des éléments (g_i) de G, $i = 1, 2, \dots, s$, tels que l'on ait $g_i(P_i) = Q_i$ pour tout i.

I.8. Montrer que la relation $P \underset{G}{\approx} Q$ est une relation d'équivalence sur Π.

I.9. Montrer que si deux polyèdres admettent des décompositions (P_i) et (Q_i) telles que P_i et Q_i soient G-équidécomposables pour tout i, alors P et Q sont G-équidécomposables.

I.10. Soit f une application additive de Π_c dans le groupe $\mathcal{A}$ et soit $\overline{f}$ son prolongement à Π.

On suppose que pour tout g de G, et pour tout polytope P, on a $f(g(\mathrm{P})) = f(\mathrm{P})$.

Montrer que l'on a $\overline{f}(\mathrm{P}) = \overline{f}(\mathrm{Q})$ pour tout couple de polyèdres G-équidécomposables (P, Q).

Une telle application $\overline{f}$ sera appelée dans la suite un invariant de G-découpage.

On admettra en particulier que pour $n = 2$ (resp. 3), l'aire (resp. le volume) dans E est un invariant de G-découpage à valeurs réelles pour tout groupe d'isométries G.

Partie II. — ÉQUIDÉCOMPOSABILITÉ DANS LE PLAN

Dans cette partie, on suppose $n = 2$. Selon l'usage, on appellera polygones les polyèdres et polygones convexes les polytopes de E.

Un parallélogramme est l'enveloppe convexe de quatre points non alignés A, B, C, D, tels que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$; on parlera alors du parallélogramme (ou du rectangle, ou du carré) ABCD. Les simplexes de E sont appelés triangles.

On désignera par T le groupe des translations de E et par S le groupe engendré par T et une symétrie par rapport à un point.

II.1. Donner les éléments de S.

II.2. Soient ABCD et A'B'C'D' deux parallélogrammes tels que A = A', B = B' et que C, D, C', D' soient alignés. Montrer que ABCD $\underset{\mathrm{T}}{\approx}$ A'B'C'D'.

II.3. Montrer que tout triangle est S-équidécomposable à un parallélogramme.

II.4. En déduire que tout polygone est S-équidécomposable à une réunion de rectangles d'intérieurs disjoints.

II.5. Soit ABCD un rectangle tel que $||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|| = a$, $||\overrightarrow{\mathrm{AD}}|| = b$, $0 < b < a$.

a. Montrer que ABCD est T-équidécomposable à un carré. On pourra considérer le carré AB'C'D' défini par $\overrightarrow{\mathrm{AB}'} = -(\sqrt{b}/\sqrt{a})\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}'} = -(\sqrt{a}/\sqrt{b})\overrightarrow{\mathrm{AD}}$.

b. Soit H une droite passant par A telle que ABCD soit d'un même côté de H. Soit A'B'C'D' l'image de ABCD par la réflexion de droite H. Montrer que ABCD et A'B'C'D' sont T-équidécomposables.

c. En déduire que deux rectangles d'aires égales sont T-équidécomposables.

II.6. A quelle condition deux polygones sont-ils S-équidécomposables?

II.7. Soit $\mathcal{A}$ le groupe des applications de l'ensemble des vecteurs non nuls du plan E dans $\mathbb{R}$ et soit l'application β de Π_c dans $\mathcal{A}$ définie comme suit : soit P un polygone convexe de sommets consécutifs $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_s, \mathrm{A}_{s+1} = \mathrm{A}_1$, de sorte que les droites faciales de P sont les droites $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$ et M un point intérieur à P. On pose, pour tout vecteur non nul $\vec{v}$,

$$\beta(\mathrm{P})(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{s} \varepsilon_i(\vec{v})\, ||\overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}}||$$

où :

$$\varepsilon_i(\vec{v}) = 0 \text{ si } \vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}} \neq 0$$

$$\varepsilon_i(\vec{v}) = +1 \text{ si } \vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}} = 0 \text{ et } \vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{MA}_i} > 0$$

$$\varepsilon_i(\vec{v}) = -1 \text{ si } \vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}} = 0 \text{ et } \vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{MA}_i} < 0$$

a. L'application β dépend-elle du choix de M?

b. Montrer que β s'étend en un invariant de T-découpage.

c. A quelle condition deux triangles sont-ils T-équidécomposables?

Partie III. — ÉQUIDÉCOMPOSABILITÉ DANS L'ESPACE

On suppose dorénavant $n = 3$. Dans cette partie, on aborde l'étude de l'équidécomposabilité des polyèdres de E, c'est-à-dire de l'équidécomposabilité sous le groupe de toutes les isométries de E. On écrira simplement $P \approx Q$ si les polyèdres P et Q sont équidécomposables.

III.1. Établir que, si P et Q sont deux parallélépipèdes rectangles de même volume, alors $P \approx Q$.

III.2. *a.* Étant donné un polygone B d'un plan P et un vecteur $\vec{v}$ non parallèle à P, montrer que l'ensemble des points $M + t\vec{v}$, où $M \in B$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$, est un polyèdre, qu'on appellera un prisme de base B; ce prisme est dit droit si $\vec{v}$ est orthogonal à P.

b. Tout prisme est-il équidécomposable à un cube? On commencera par étudier le cas des prismes droits.

III.3. On donne dans un repère orthonormé $Oxyz$, le tétraèdre V de sommets les points $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, et $(1, 1, 1)$.

a. Montrer que le cube défini par $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ admet une décomposition en 6 tétraèdres isométriques à V.

b. Pour tout entier $m \geqslant 2$, exhiber une décomposition de V en m^3 tétraèdres semblables à V.

N.B. : Ici, et dans la suite, « P est semblable à Q dans le rapport $t > 0$ » signifie que P se déduit de Q par la composée d'une isométrie et d'une homothétie de rapport t; on ne distingue donc pas les similitudes directes et inverses.

c. Déduire de ce qui précède que V est équidécomposable à un cube.

Partie IV. — L'ESPACE VECTORIEL $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

Une application f d'un ensemble X dans $\mathbb{Z}$ est dite à support fini si l'ensemble des éléments x de X tels que $f(x) \neq 0$ est fini (éventuellement vide). L'ensemble des applications à support fini de X dans $\mathbb{Z}$ est manifestement un groupe abélien pour l'addition des applications (on ne demande pas de le vérifier), noté $\mathbb{Z}^{(X)}$.

On prend désormais pour X le produit cartésien $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ de deux groupes abéliens $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$; si, pour $a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathcal{B}$, $\chi_{(a,b)}$ désigne la fonction qui vaut 1 au point (a, b) et 0 en tout autre point de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, tout élément f de $\mathbb{Z}^{(\mathcal{A} \times \mathcal{B})}$ a l'écriture :

$$f = \sum f(a, b)\, \chi_{(a,b)}$$

où les $f(a, b)$ sont des entiers relatifs tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

On désigne par $\mathcal{R}$ le sous-groupe de $\mathbb{Z}^{(\mathcal{A} \times \mathcal{B})}$ engendré par les éléments de la forme :

$$\chi_{(a,b)} + \chi_{(a',b)} - \chi_{(a+a',b)}$$

et

$$\chi_{(a,b)} + \chi_{(a,b')} - \chi_{(a,b+b')}$$

où a et a' (resp. b et b') varient arbitrairement dans $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$).

On note alors $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ le groupe quotient $\mathbb{Z}^{(\mathcal{A} \times \mathcal{B})}/\mathcal{R}$ et, pour tout (a, b) dans $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, on note $a \otimes b$ la classe de $\chi_{(a,b)}$ modulo $\mathcal{R}$.

Le groupe $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ est dit produit tensoriel de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

IV.1.*a.* Établir que l'ensemble des $a \otimes b$, où (a, b) parcourt $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, est une partie génératrice du groupe $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

b. Une application f de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ dans un groupe abélien $\mathcal{C}$ sera dite biadditive si les applications :

$$a \longmapsto f(a, b) \qquad \text{et} \qquad b \longmapsto f(a, b)$$

de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$ respectivement sont des homomorphismes.

Établir que l'application p de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ dans $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ définie par :

$$(a, b) \longmapsto a \otimes b$$

est biadditive.

c. Le symbole 0 désignant indifféremment les éléments neutres de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, établir :

$$\forall a \in \mathcal{A},\ \forall b \in \mathcal{B}, \qquad 0 \otimes b = a \otimes 0 = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall a \in \mathcal{A},\ \forall b \in \mathcal{B}, \qquad (na) \otimes b = a \otimes (nb) = n\,(a \otimes b)$$

IV.2. Montrer que, si f est une application biadditive de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ dans un groupe abélien $\mathcal{C}$, il existe un unique homomorphisme $\overline{f}$ de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$ tel que $f = \overline{f}.p$.

IV.3. On suppose ici que $\mathcal{A}$ est un espace vectoriel sur le corps commutatif K, et que $\mathcal{B}$ est un groupe abélien quelconque. On définit une action de K sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ par :

$$\forall k \in \mathrm{K},\ \forall a \in \mathcal{A},\ \forall b \in \mathcal{B}, \quad k.(a \otimes b) = (ka) \otimes b$$

Vérifier que cela définit sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ une structure de K-espace vectoriel.

Le seul exemple de produit tensoriel de deux groupes abéliens qui sera utilisé dans la suite sera $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, qui a, d'après ce que l'on vient de voir, une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ telle que, si $\bar{z}$ désigne la classe modulo $\mathbb{Z}$ du réel z (notation qui sera désormais utilisée systématiquement).

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad (xy) \otimes \bar{z} = x\,(y \otimes \bar{z})$$

IV.4. Établir que l'on a dans $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{Q}, \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad x \otimes (\overline{yz}) = (xy) \otimes \bar{z}$$

Dans la suite, on admet la possibilité de compléter toute famille de réels linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ en une base de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Q}$.

IV.5. *a.* Établir l'existence, pour tout nombre irrationnel y, d'un homomorphisme du groupe $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{Q}$ tel que 1 ait pour image 0 et y pour image 1.

b. Soient x et y deux réels, $x \neq 0$; montrer que l'élément $x \otimes \bar{y}$ de $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est nul si et seulement si y est rationnel.

c. Montrer que si une famille (z_j) de réels est libre sur $\mathbb{Q}$ et si 1 n'est pas engendré par cette famille, alors la famille $(1 \otimes \bar{z}_j)$ est libre dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

IV.6. *a.* Établir l'existence d'une suite de polynômes $(\mathrm{T}_n)_{n \in \mathrm{N}}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{T}_n(\cos\theta) = \cos n\theta$$

b. Calculer le terme de plus haut degré de T_n et son terme constant.

c. On donne un réel $\theta = \pi p/q$, où $p/q \in \mathbb{Q}$, tel que $\cos\theta \in \mathbb{Q}$. Donner les différentes valeurs possibles de $\cos\theta$; on commencera par le cas où q est impair : on montrera que $\cos\theta$ est de la forme 2^{-s} ou -2^{-s}, avec $s \in \mathbb{N}$, puis que $s = 0$ ou 1. On étudiera ensuite le cas où q est pair.

d. Soit θ_0 l'angle dièdre intérieur de deux faces d'un tétraèdre régulier. Calculer $\cos\theta_0$. Que peut-on dire de θ_0/π?

Partie V. — L'INVARIANT DE DEHN

On rappelle que $n = 3$. On se propose dans cette dernière partie de définir un invariant de découpage pour les polyèdres de l'espace.

Soit P un polyèdre convexe, c'est-à-dire un polytope de E; les côtés des faces de P sont appelés arêtes de P et constituent un ensemble de segments noté $\mathbf{A}(\mathrm{P})$; à chaque arête a est associée une unique paire $\{\mathrm{H}, \mathrm{H}'\}$ de plans faciaux de P telle que a soit l'intersection de P, H et H'. On désigne par $\theta(a)$ une mesure en radians de l'angle dièdre limité par H et H' qui contient P, et par $\mathrm{l}(a)$ la longueur du segment a. On pose enfin :

$$\Delta(\mathrm{P}) = \sum_{a \in \mathbf{A}(\mathrm{P})} \mathrm{l}(a) \otimes \overline{(\theta(a)/\pi)} \in \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

ce qui définit une application de Π_c dans $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

V.1. Montrer que Δ s'étend en un invariant de découpage, qu'on appelle l'invariant de Dehn.

V.2. *a.* Quel est l'invariant de Dehn du tétraèdre V étudié en III.3? Quel est celui d'un cube? Celui d'un prisme?

b. Quel est l'invariant de Dehn d'un tétraèdre régulier d'arête 1? Un tétraèdre régulier est-il équidécomposable à un cube?

V.3. Soit P un polyèdre tel que $\Delta(\mathrm{P}) \neq 0$.

a. On donne m réels strictement positifs $t_1, t_2, \ldots, t_m$ et m polyèdres $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_m$ d'intérieurs deux à deux disjoints et tels que, pour tout i variant de 1 à m, P_i soit semblable à P dans le rapport t_i; soit Q la réunion des P_i. Calculer le volume $v(\mathrm{Q})$ de Q et $\Delta(\mathrm{Q})$ en fonction de $v(\mathrm{P})$, de $\Delta(\mathrm{P})$ et des nombres t_i.

b. En déduire l'existence, pour tout réel $t \geqslant 1$, d'un polyèdre P_t tel que

$$v(\mathrm{P}_t) = v(\mathrm{P}) \qquad \text{et} \qquad \Delta(\mathrm{P}_t) = t \, . \, \Delta(\mathrm{P})$$

c. Étendre ce résultat au cas $0 < t < 1$.

d. Montrer l'existence d'un polyèdre P' tel que $\Delta(\mathrm{P}') = -\Delta(\mathrm{P})$.

e. Étendre enfin le résultat du *b.* au cas d'un réel t quelconque.

V.4. Montrer que l'ensemble des valeurs de $\Delta(\mathrm{P})$, lorsque P décrit l'ensemble des polyèdres ayant un volume donné non nul v_0, est un sous-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et indépendant de v_0 du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Soit $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de E. On considère l'enveloppe convexe D des 20 points dont les coordonnées dans ce repère sont :

$$(\pm \rho/2, \ \pm \rho/2, \ \pm \rho/2), \qquad (\pm \rho^2/2, \ 0, \ \pm 1/2), \qquad (\pm 1/2, \ \pm \rho^2/2, \ 0), \qquad (0, \ \pm 1/2, \ \pm \rho^2/2)$$

où $\rho = (1 + \sqrt{5})/2$ est la racine positive de l'équation $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 1 = 0$. Le polyèdre D est un dodécaèdre régulier.

V.5. Dessiner la projection de D sur le plan $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$. Soit θ_{D} l'angle dièdre intérieur de deux faces adjacentes de D. Montrer que :

$$\cos \theta_{\mathrm{D}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Calculer $\Delta(\mathrm{D})$ en fonction de θ_{D}.

V.6. En déduire que :

$$\forall m \in \mathbb{Z} - \{0\}, \ \operatorname{tg} m\, \theta_{\mathrm{D}} \in \mathbb{Q}^*$$

V.7. On rappelle que l'enveloppe convexe des centres de gravité des faces de D est un icosaèdre régulier. Soit θ_{I} l'angle dièdre intérieur de deux faces d'un icosaèdre régulier. Montrer que :

$$\forall m \in \mathbb{Z} - \{0\}, \quad \operatorname{tg} m\, \theta_{\mathrm{I}} \in \mathbb{Q}^* . \sqrt{5}$$

V.8. Montrer que les réels π, θ_{D}, θ_{I}, θ_0, où l'on rappelle que θ_0 est l'angle dièdre de deux faces d'un tétraèdre régulier (cf. IV.6.*d.*), sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.

Que peut-on en conclure?

RAPPORT SUR L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES GENERALES

L'épreuve de Mathématiques générales proposait cette année un thème d'étude à la fois très ancien, puisqu'il remonte à Euclide, et toujours très actuel, puisqu'un exposé du Séminaire Bourbaki de juin 1985 lui est consacré ! [C].

Comme il était précisé dans l'introduction, il s'agissait d'étudier si, étant donné deux polyèdres de même volume, on peut découper le premier en morceaux polyédraux et réassembler ces morceaux pour reconstituer le second.

La réponse est affirmative en dimension deux, c'est-à-dire dans le cas des polygones, et était essentiellement connue d'Euclide. La deuxième partie du problème conduisait à un résultat plus fin, dû à Hadwiger : les déplacements autorisés des pièces du "puzzle" doivent au moins contenir les translations et les symétries par rapport à un point. En revanche, en dimension trois (et au-delà) la réponse est négative : pour qu'un polyèdre puisse être découpé en morceaux polyédraux et réassemblé en un cube (c'est-à-dire soit équidécomposable à un cube suivant la terminologie de l'énoncé), il est nécessaire qu'un certain invariant, imaginé par Max Dehn vers 1900, soit nul. L'objet de la quatrième partie était de construire et d'étudier l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans lequel l'invariant de Dehn prend ses valeurs. La cinquième partie définissait cet invariant et abordait l'étude de ses valeurs : on demandait de montrer que l'ensemble des valeurs prises par l'invariant de Dehn sur les polyèdres de volume v_o donné est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, indépendant de v_o, et que les invariants d'un tétraèdre d'un dodécaèdre et d'un icosaèdre réguliers sont linéairement indépendants : le sous-espace en question est donc de dimension au moins trois (en fait on peut montrer que sa dimension a la puissance du continu!).

Signalons qu'on a établi assez récemment (J.P. Sydler, 1965) la réciproque (en dimension trois) : deux polyèdres de même volume sont équidécomposables si et seulement si leurs invariants de Dehn sont égaux : on trouvera dans [J] un exposé très clair et accessible à un candidat à l'agrégation du théorème de Sydler. Pour une bibliographie détaillée du sujet et un survol de ses développements actuels, voir [C].

Beaucoup de candidats n'ont traité que la première partie et le début de la quatrième, c'est-à-dire la partie la plus "ingrate" du problème. En outre, certaines erreurs graves relevées dans la première partie révèlent une perception trop formelle des mathématiques chez beaucoup de candidats, perception qui ne semble pas s'appuyer sur de bonnes images mentales : que penser par exemple des dizaines de copies où l'on lit que l'intérieur d'une réunion est égal à la réunion des intérieurs, alors que tout le problème offrait des contre-exemples à cette assertion !

La première partie était consacrée à des généralités indispensables à une définition mathématique précise du sujet. Beaucoup de candidats ont été gênés par une maîtrise insuffisante des notions de base de topologie générale : en dehors de l'erreur déjà signalée, on croit souvent que la frontière d'une partie quelconque de $\mathbb{R}^n$ est toujours d'intérieur vide, et l'on fait grand usage de boules et de suites pour établir des résultats (1.2 b/, 1.3) qui découlent immédiatement des définitions et propriétés ensemblistes élémentaires de l'adhérence et de l'intérieur. Les questions 1.4 et 1.5 étaient plus délicates : dans 1.4, chaque P_i est l'adhérence de la réunion des $\overset{\circ}{P}'_j$ contenus dans $\overset{\circ}{P}_i$, et dans 1.5 les polytopes de la décomposition cherchée sont les adhérences des composantes connexes du complémentaire dans P de la réunion des hyperplans H_i : ces idées simples sont rarement formulées de façon claire, même lorsqu'elles sont à peu près perçues. Enfin, dans 1.8, à peine un candidat sur dix s'aperçoit que la transitivité n'est pas triviale et requiert la considération d'une décomposition de Q plus fine que chacune des décompositions qui assurent $P \sim Q$ et $Q \sim R$.

La deuxième partie remettait à l'honneur la géométrie élémentaire, et a permis à une minorité non négligeable de candidats d'obtenir une note honorable. Signalons que l'équi-décomposabilité des polygones sous le groupe S est proposée comme activité de complément dans le livre de Première S édité par l'IREM de Strasbourg. La question II.1 est souvent fort mal traitée : en dehors des réponses du genre "S est l'ensemble des symétries, des translations et des produits de symétries et de translations", aussi vraies qu'inacceptables, beaucoup négligent de montrer que S contient les symétries par rapport à tous les points de E_2. La question II.5 demandait un réel effort d'imagination géométrique : quelques copies ont proposé des solutions élégantes, utilisant ou non la suggestion de l'énoncé, mais qui reposent toutes sur la dissection suivant CC'. Dans la question II.6, il fallait choisir les rectangles de mêmes directions de côtés et ayant un côté de même longueur, ce qui est possible grâce aux questions précédentes : il ne reste plus qu'à les juxtaposer par translations pour obtenir un seul rectangle, lui-même T-équidécomposable à un carré. Dans la question II.7, il ne suffisait évidemment pas d'établir l'invariance de β par translations, d'ailleurs triviale : d'après I.7, il suffisait d'établir en outre l'additivité de β pour une dissection déterminée par une seule droite, ce qui n'était guère difficile.

La partie III a été fort peu abordée, par "peur de l'espace" semble-t-il. Des dessins clairs auraient pourtant suffi pour obtenir l'adhésion des correcteurs. En revanche, il est surprenant de lire assez souvent que si S est un triangle du plan P et $\vec{v}$ un vecteur non contenu dans la direction de P, l'ensemble des points $M + t\vec{v}$, où M parcourt S et t le segment $[0,1]$ est un simplexe ! là encore, un dessin suffisait à dissiper l'erreur ... La décomposition du cube en six tatraèdres a été vue par quelques candidats, mais personne n'a remarqué que chaque tétraèdre de la décomposition du cube $[0,1]^3$ est l'ensemble des points dont les coordonnées sont dans l'un des six ordres possibles - rappelons que les inéquations linéaires sont mentionnées dans le programme. Les mêmes candidats ont généralement vu qu'il suffisait de prendre $m = 6$ dans II.3 c/.

La partie IV commençait par des vérifications de routine plus ou moins traitées par la plupart des copies non vides : une difficulté cependant dans le IV.3 : la vérification de l'axiome d'additivité des homothéties revient à montrer que l'action de K est bien définie sur $A\otimes B$ tout entier et pas seule- sur les éléments de la forme $a\otimes b$: ceci résulte de IV. 2, appliqué à l'application biadditive de $A\times B$ dans $A\otimes B$ définie par $\forall a\in A, \forall b\in B$, $(a,b)\mapsto (k.a)\otimes b$. Pour la question IV.5 : dans a/ on complétait $(1,y)$ en une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{R}$ et l'on prenait pour $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ la coordonnée suivant y ; dans b/ la réciproque s'obtenait en considérant $\Psi : \mathbb{R}\otimes\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ définie (cf. IV.3) par $\Psi(a\otimes b) = a.\phi(b)$: certains ont vu l'idée, mais ont pris $\mathbb{Q}$ comme but de Ψ, ce qui est impossible. Enfin dans c/ on ne pouvait pas écrire en général $\Sigma x_i\otimes z_i = 1\otimes\Sigma x_i y_j$ si les x_i sont réels, mais seulement s'ils sont rationnels (IV.4). La question 6 sur les polynômes de Tchebychev est classique, mais même a/ et b/ ont été souvent bien maladroitement traitées. La question 6 d/ ($\cos\theta_o = 1/3$) s'obtenait immédiatement par projection orthogonale sur une face (aire de la projection!) ou facilement par trigonométrie élémentaire dans un plan de symétrie.

Enfin la partie V n'a été abordée que par les meilleures copies : les questions V.4 à V.8 ne présentaient pourtant guère de difficulté si l'on s'aidait d'une figure soignée ... et de la formule d'addition des tangentes.

Bibliographie

[C] P. CARTIER, Décompositions des polyèdres : le point sur le troisième problème de Hilbert, Séminaire Bourbaki, Exposé n° 646, juin 1985.

[J] B. JESSEN, The algebra of polyhedra and the Dehn-Sydler theorem, Math. Scand. 22 (1968), pp. 241-256.

Répartition des notes (sur 60) obtenues par les candidats
à l'épreuve de mathématiques générales

Absents	268
de 0 à 4	260
de 5 à 9	185
de 10 à 14	193
de 15 à 19	152
de 20 à 24	96
de 25 à 29	45
de 30 à 34	18
de 35 à 39	10
de 40 à 44	3
de 45 à 49	5
de 50 à 54	2
de 55 à 60	2
	1 239 inscrits