

oral

Les 276 candidats admissibles ont été répartis d'après le classement d'écrit en deux sous-jurys comportant chacun une sous-commission d'algèbre et une sous-commission d'analyse. Une concertation permanente a assuré une bonne harmonisation de la conception et de l'évaluation des épreuves.

Mis à part quelques candidats mal préparés, le niveau est bon, et le jury a présenté une liste supplémentaire de 9 noms qui méritent l'agrégation. Un seul de ces noms a été retenu par le Ministère.

Comme on peut le voir dans les statistiques des premières pages de ce rapport, le nombre d'étudiants candidats va en diminuant d'année en année, avec comme conséquence la suppression presque totale des préparations à l'agrégation en dehors de Paris. Dans ces conditions il devient encore plus difficile pour les professeurs exerçant en province de préparer le concours. Le jury a pu constater que certains d'entre eux ont accompli un gros travail personnel qui a été dans quelques cas récompensé, mais qui, dans tous les cas vaut d'être souligné.

ÉPREUVE D'ANALYSE, PROBABILITÉS

Observations générales

Le cadre de l'actuel programme d'oral d'Analyse étant assez étroit, le jury a proposé cette année peu de leçons nouvelles, se contentant d'augmenter la fréquence des leçons d'exemples et de géométrie, en proposant intentionnellement un certain nombre de couplages de telles leçons. Sur ce dernier point la politique sera poursuivie, et il est également vraisemblable que la fréquence des leçons de calcul numérique et de probabilités sera augmentée.

Dans l'ensemble le niveau de connaissances des candidats est bon. On a pu entendre quelques bonnes leçons "géométriques" (notamment sur les applications du théorème des fonctions implicites) et aussi, il faut le dire, de fort mauvaises (en particulier sur les courbes). Cependant une fois de plus une grande majorité de candidats a choisi lorsqu'il en avait la possibilité des exposés de nature abstraite, au risque d'un certain académisme. Beaucoup de plans sont alors purement formels et ne proposent que des exemples sans intérêt ou passe-partout.

Plus grave est la connaissance souvent très superficielle du sujet abordé. On a vu par exemple proposer en exposé l'étude du problème de Dirichlet dans le disque, sans qu'il ait été possible d'obtenir une définition des fonctions harmoniques. La plupart des candidats qui utilisent la convolution sont troublés lorsqu'on leur demande de la définir ou d'en donner des propriétés élémentaires. On pourrait multiplier ces exemples.

Il est vivement recommandé d'éviter les escroqueries volontaires ou erreurs involontaires ramenant les exposés à des vérifications triviales, la substance de la démonstration figurant dans un lemme admis. Il est peu intéressant de proposer en exposé l'existence des dérivées partielles d'une fonction différentiable en admettant le théorème de composition, ou de limiter l'étude affine locale des arcs plans aux arcs biréguliers.

Certains candidats qui n'ont pu bénéficier d'une préparation efficace à l'oral présentent des plans beaucoup trop élémentaires. Il est évident que le jury ne peut accepter une leçon sur "limite d'une fonction de variable réelle" qui ne dépasse pas le niveau d'une classe de terminale. On rappelle à ce propos que l'oral étant public les futurs candidats peuvent assister à quelques leçons d'oral ce qui leur donnera une plus juste vue de ce qui est demandé.

S'il est normal d'utiliser des notes dans la présentation du plan, on doit éviter de transformer l'exposé en simple lecture. L'exposé est en effet très important. Le candidat a l'occasion d'y manifester ses qualités d'enseignant. Il doit s'attacher à :

- expliquer clairement les idées sous-jacentes à la démonstration, en faisant appel au besoin à des considérations heuristiques,
- dégager les étapes de la démonstration,
- montrer son aisance au tableau. Comme un enseignant professionnel le candidat ne doit, pour exposer une démonstration, utiliser ses notes qu'exceptionnellement, soit par exemple pour éviter une erreur de détail dans une formule compliquée, soit comme recours en cas de difficulté. Il ne peut s'agir, pour les examinateurs, d'apprécier la capacité d'un éventuel agrégé à recopier au tableau une démonstration elle-même recopiée purement et simplement dans un manuel. La volonté de convaincre n'anime pas beaucoup de candidats qui devraient pourtant être conscients de l'effet extrêmement favorable produit par un exposé vivant et personnel.

Il est rappelé qu'une leçon traitée au niveau taupe ou maîtrise, bien assimilée et illustrée d'exemples pertinents assure une note très correcte. En analyse ce que le jury attend c'est d'une part que le (la) candidat (e) fasse la preuve de la solidité de ses connaissances sur les définitions et résultats qui soustendent le sujet de la leçon et d'autre part qu'il (ou elle) soit capable de les appliquer à des exemples mathématiquement significatifs.

On voit chaque année des candidats, parfois fort près de réussir, abandonner, laissant une place au concours à d'autres, moins bien placés qu'eux, mais qui font preuve de plus de courage et de persévérance. Pour regrettable que cela soit, le jury tient à garder secrètes les notes d'écrit, leur révélation risquant d'avoir des conséquences bien plus nuisibles.

L'expérience de ces dernières années a prouvé qu'une moyenne de l'ordre de 11/20 à l'oral permet à tout admissible d'être reçu. Chaque année parmi les reçus se trouvent effectivement des candidats admissibles parmi les derniers.

Remarques particulières

Le jury souhaite très vivement que les candidats proposent, chaque fois que cela est possible, des constructions effectives des objets qu'ils décrivent. C'est ainsi que dans le théorème de Cauchy-Lipschitz un cylindre de sécurité doit pouvoir être explicité dans un exemple simple. Le calcul effectif de la norme d'une application linéaire en dimension finie peut permettre d'appliquer les résultats sur les extréma liés ou les maxima de fonctions convexes.

Les polynômes d'interpolation, les séries entières, les séries de Fourier ont leur place dans l'étude des sous-espaces denses ou de l'approximation polynomiale. Des estimations de la qualité de l'approximation doivent être connues de manière à permettre l'application à des exemples simples.

Les suites, séries, et intégrales divergentes ont aussi leur intérêt, notamment dans l'étude des développements asymptotiques.

Le théorème des accroissements finis, indispensable certes pour prouver d'autres théorèmes, peut aussi servir à estimer des erreurs, à étudier des vitesses de convergence, à justifier des méthodes inspirées de la méthode de Newton. Des idées analogues peuvent aussi enrichir l'exposé souvent banal sur les suites récurrentes.

Sans aborder de façon systématique les procédés d'accélération de la convergence, on peut utilement compléter des leçons sur les suites, les séries ou les intégrales impropres par des remarques sur la rapidité de convergence.

Voici enfin des remarques sur quelques leçons précises :

L'esprit de la leçon "Exemples de recherche de primitives et de calcul d'intégrales" est souvent mal compris. Il ne s'agit pas de faire un cours détaillé sur la recherche de primitives mais plutôt, après avoir dégagé rapidement les méthodes essentielles, de proposer un choix varié de calcul d'intégrales, incluant primitives, développement en série, dérivation sous le signe intégral, et pouvant aller jusqu'au calcul numérique.

Pour la leçon "changement de variables" on peut, outre le cas des intégrales, penser aux équations différentielles, au changement de coordonnées locales en géométrie, etc... .

Certains candidats, embarqués imprudemment dans l'étude d'un contre-exemple savant découvrent un peu tard que pour prouver qu'un espace topologique n'est pas localement connexe il ne suffit pas de donner une base de voisinages non connexes pour chaque point.

Que dire d'une leçon de probabilités sur les théorèmes limites, correcte sur le plan théorique, où aucune application n'est proposée, le candidat ne sachant traiter aucun des exemples simples fournis par le jury ?

Une leçon nouvelle -Champs de Vecteurs- sera proposée l'an prochain. Les candidats sont invités à réfléchir à leur lien avec les équations différentielles (étude du redressement local, étude sur des exemples de points singuliers, questions de stabilité, etc...).

LISTE DES SUJETS DE LEÇONS

- Applications à l'analyse de la notion de compacité.
- Exemples d'espaces compacts.
- Espaces homéomorphes. Exemples et contre-exemples.
- Connexité. Applications.
- Théorèmes du point fixe. Applications.
- Utilisation en analyse d'espaces complets. Exemples.
- Sous-espaces denses. Illustration par l'approximation des fonctions.
- Exemples d'applications linéaires continues d'un espace vectoriel normé dans un autre ; norme de telles applications.
- Espaces vectoriels normés de dimension finie.
- Géométrie dans un espace vectoriel normé.
- Exemples d'utilisation de la dénombrabilité en topologie et en analyse.
- Donner une construction de \mathbb{R} ; en déduire les principales propriétés de \mathbb{R} .
- Une caractérisation de \mathbb{R} (par certaines de ses propriétés) étant connue, en déduire les autres propriétés fondamentales de \mathbb{R} .
- Topologie de la droite numérique \mathbb{R} et sous-ensembles remarquables de \mathbb{R} .
- Connexité dans \mathbb{R} et fonctions continues.
- Propriétés topologiques de \mathbb{R}^n , exemples d'utilisation.
- Limite d'une fonction numérique d'une variable réelle.
- Exemples d'étude de suites de nombres réels.
- Approximations d'un nombre réel.
- Etude, sur des exemples, de suites numériques définies par divers types de relations de récurrence.
- Continuité et dérivabilité de fonctions réelles d'une variable réelle ; exemples et contre-exemples.
- Continuité uniforme. Exemples et applications.
- Fonctions à variation bornée. Applications.
- Applications réciproques : théorèmes d'existence ; exemples.
- Fonctions implicites : applications.
- Applications géométriques du théorème des fonctions implicites.
- Exemples d'utilisation de changements de variable.

- Fonctions convexes d'une ou de plusieurs variables réelles.
- Fonctions convexes d'une variable réelle ; inégalités de convexité.
- Applications de la notion de convexité à des problèmes d'extremum.
- Problèmes de prolongement de fonctions ; exemples.
- Dérivées partielles. Différentiabilité. Exemples.
- Fonctions de plusieurs variables réelles : théorème des accroissements finis et applications.
- Applications de classe C^k d'un ouvert de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p .
- Différentes formules de Taylor. Majoration des restes. Applications.
- Problèmes d'extremum.
- Comparaison des fonctions au voisinage d'un point. Développements limités.
- Intégrale des fonctions réelles ou complexes de variable réelle. Premières propriétés.
- Intégrales impropres.
- Problèmes d'interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples.
- Problèmes de dérivabilité en calcul intégral.
- Exemples d'étude de fonctions définies par une intégrale.
- Fonction exponentielle complexe. Argument d'un nombre complexe.
- Exemples de recherche de primitives et de calcul d'intégrales.
- Méthodes de calcul approché d'intégrales.
- Exemples d'intégrales multiples et applications.
- Séries. Convergence et convergence absolue. Sommation par parquets, réindexation.
- Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries numériques.
- Continuité, dérivabilité, intégrabilité de la somme d'une série de fonctions d'une variable réelle.
- Calculs approchés de sommes partielles et de restes de séries numériques.
- Comparaison d'une série et d'une intégrale.
- Exemples d'étude d'une fonction définie par une série.
- Différentes notions de convergence d'une suite de fonctions. Exemples.
- Séries de fonctions, convergence uniforme, convergence normale ; exemples.
- Exemples de problèmes d'interversion de limites.
- Domaine de convergence d'une série entière. Propriétés de la somme d'une telle série.
- Exemples de développement d'une fonction en série entière.
- Série de Taylor.
- Solutions des équations différentielles $y' = f(x,y)$; solutions maximales.
- Equations différentielles linéaires ; propriétés générales. Exemples.

ÉPREUVE D'ALGÈBRE, GÉOMÉTRIE

Nature de l'épreuve

Ayant choisi un sujet parmi les deux qu'il a tirés au sort, le candidat doit, au terme d'une préparation de trois heures :

- présenter, en vingt minutes au plus, un plan qui tienne en entier sur le tableau ;
- exposer en une vingtaine de minutes le développement d'une question choisie dans le plan, par le jury, sur proposition du candidat ;
- répondre à des questions de niveau adapté à celui qu'il a choisi pour son plan.

La présence d'une bibliothèque mise à la disposition des candidats ne doit pas leur dissimuler que seule une préparation sérieuse pendant l'année qui précède le concours leur assure des chances de succès : les livres ne peuvent que les aider à présenter des matières déjà familières, à éviter les trous de mémoire et à enrichir des collections d'exemples et d'applications déjà constituées pour l'essentiel. Les candidats que les circonstances auraient contraints à une préparation réduite auront intérêt à choisir, dans la mesure du possible, un sujet facile et à ne pas introduire dans leur plan des aspects du sujet qu'ils maîtrisent mal.

Comme le laissait prévoir le rapport de 1982, l'oral de 1983 a été marqué par une augmentation du nombre de leçons de composition, notamment en Algèbre linéaire, et par le couplage effectif de leçons de Géométrie. Signalons à ce sujet que des candidats ont choisi, plus volontiers que les années précédentes, de présenter une leçon de Géométrie (en particulier projective), même couplée à une leçon d'Algèbre ; la plupart s'en tiennent malheureusement à un point de vue très incomplet et archaïque, qui néglige à peu près complètement les acquis des mathématiques contemporaines (algèbre linéaire, formes quadratiques, groupes) faisant partie du programme.

Le plan

Le plan doit être celui de la leçon proposée (dont il faut analyser attentivement le titre) et non se déplacer sur un sujet voisin que le candidat croit mieux connaître : par exemple, un plan sur le " Groupe orthogonal d'une forme quadratique non dégénérée " ne doit pas

- Etude détaillée, sur un petit nombre d'exemples, d'équations différentielles non linéaires ; illustrations géométriques.
- Exemples de problèmes conduisant à des équations différentielles.
- Divers modes de définition et de représentation des surfaces de \mathbb{R}^3 .
Exemples.
- Propriétés affines locales des courbes. Branches infinies. Exemples.
- Propriétés métriques des courbes planes ou gauches. Exemples.
- Exemples d'étude de courbes planes.
- Etude locale des courbes planes.
- Etude locale des courbes de \mathbb{R}^3 .
- Mouvement à accélération centrale. Exemples.
- Mouvement d'un repère orthonormé ; applications à la théorie des courbes gauches et à la cinématique du solide.
- Mouvement d'un plan sur un plan.
- Méthodes de calcul approché de solutions numériques des équations $f(x) = 0$.
- Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynômiales.
- Théorèmes limites fondamentaux en calcul des probabilités.
- Le jeu de pile ou face (variables de Bernoulli indépendantes).
- Probabilité conditionnelle. Exemples.
- Loi binomiale, loi de Poisson.
- Exemples de compactification d'un espace topologique ; utilisation.
- Compactification d'un espace topologique ; exemples.
- Etude sur des exemples de la rapidité de convergence d'une suite de nombres réels ; calcul approché de la limite.
- Exemples de développements asymptotiques.
- Exemples d'étude locale de champs de vecteurs.

se réduire à des généralités banales suivies du seul exemple du groupe orthogonal d'un espace euclidien ; les leçons sur les matrices (nouvelles en 1983) ne sont pas identiques à celles proposées sur les applications linéaires.

Les titres de nombreuses leçons demandent des applications, qu'il faut distinguer des simples illustrations ; appliquer une théorie, c'est la faire contribuer à résoudre un problème qui ne s'y réfère pas explicitement. Au reste, toute leçon bien composée doit comporter des exemples et applications, même lorsque ces mots ne figurent pas dans son titre.

Un bon plan doit structurer les matières de la leçon en unités logiques signalées par des titres. La plupart des candidats s'y appliquent, sans toujours manifester beaucoup d'originalité (combien de leçons : " Droite projective. Homographies. Birapport " ne se divisent-elles pas en : I - Droite projective ; II - Homographies ; III - Birapport ...). Il n'est pas interdit d'intéresser le jury par la mention, en début de plan, d'un problème qui motive la théorie exposée (pourquoi s'intéresse-t-on aux anneaux factoriels ? aux formes quadratiques ?), par le rapprochement de deux points du programme, etc. Ceci nécessite bien sûr un effort de lecture personnelle qui éloigne des plans appris par coeur que le jury entend tout au long de la session d'oral, une demi-douzaine de fois, identique à eux-mêmes, ce qui ne peut que l'inciter à augmenter le nombre des leçons d'exemples ou de composition et à en modifier les libellés d'une année sur l'autre.

L'exposé

A l'issue de son plan, le candidat propose au jury d'en développer certains points (démonstration de théorèmes, exemples, résolution d'exercices). Il est décent d'en proposer au moins trois, non triviaux et bien en rapport avec le sujet de la leçon ; le choix de ces exposés a une influence non négligeable sur la note que le jury attribue au candidat.

L'exposé doit être bien structuré, faisant ressortir clairement les articulations logiques et les points cruciaux de la démonstration, moyennant quoi le candidat peut ne pas s'attarder sur des détails de pur calcul.

La consultation des ouvrages de la bibliothèque peut apporter une aide précieuse aux candidats, mais il faut savoir que les démonstrations qu'ils contiennent ne sont pas forcément exactes ni complètes ; certaines renvoient tacitement le lecteur à des parties antérieures de l'ouvrage, qu'il ne peut donc exploiter que si sa composition globale lui est familière. Rectifions là quelques erreurs ou lacunes trainant dans les livres :

- une base d'un espace vectoriel est une famille (et non un ensemble) de vecteurs ;

- la démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss par emploi des polynômes symétriques renferme un passage délicat :

- le groupe des isométries de l'icosaèdre régulier n'est pas isomorphe à S_5 ;

- le groupe circulaire n'est pas $PGL_2(\mathbb{C})$;

- le conjugué d'un octave de Cayley (q_1, q_2) est $(\bar{q}_1, -q_2)$;

- la démonstration d'irréductibilité des polynômes cyclotomiques nécessite une analyse préalable claire des rapports entre l'irréductibilité sur \mathbb{Q} et l'irréductibilité sur \mathbb{Z} (analyse qu'on peut admettre mais dont il faut énoncer les résultats).

Les candidats peuvent consulter leurs notes de préparation, mais le jury supporte mal qu'ils les recopient mot à mot, obstinément tournés vers le tableau.

Les questions

Les questions peuvent porter sur le plan présenté : correction d'erreurs ou de lapsus, mise en évidence de lacunes. Cette critique n'a pas toujours lieu, mais l'absence de questions sur le plan n'est pas un gage de perfection pour celui-ci...

Un exercice (en général simple) peut tester l'aptitude du candidat à utiliser les concepts ou les théorèmes présentés.

D'autres questions, enfin, visent à faire que le candidat situe la leçon par rapport à l'ensemble du programme, à la rapprocher d'autres sujets non nécessairement abordés dans son plan (par exemple : application de la continuité du déterminant à la topologie de certains ensembles de matrices), bref à faire preuve de sa culture mathématique. La révélation de connaissances étendues et précises éclaire ainsi favorablement le jury, même si le candidat a cru devoir présenter un plan élémentaire. Au rebours...

Commentaires particuliers

Dénombrements : Cette leçon, assez bien traitée par certains candidats, doit dégager des méthodes qui ne se limitent pas aux premiers éléments de l'Analyse combinatoire (il n'est pas interdit d'employer des séries entières ou formelles, bien qu'elles ne soient pas au programme) et comporter des applications à l'Algèbre et à la Géométrie (dénombrements dans les groupes, corps et espaces vectoriels finis, etc).

Structures algébriques fondamentales : Le jury est frappé par la difficulté que rencontrent de nombreux candidats à manipuler les structures produits et quotients ; par exemple, le dénombrement des homomorphismes entre deux groupes cycliques d'ordres respectifs m et n donne lieu à des raisonnements maladroits et approximatifs qui établissent plutôt des inclusions que des égalités d'ensembles, alors que cet exercice se résout tout à fait mécaniquement par emploi des théorèmes généraux de factorisation des homomorphismes.

Groupes : Plusieurs leçons sur les groupes sont des leçons fines d'application et de composition, qui ne doivent pas se réduire à l'énoncé stéréotypé de quelques théorèmes généraux. On invite les candidats à :

- enrichir la leçon sur les groupes finis d'automorphismes de considérations d'invariance et de stabilité ;
- éviter les groupes de Galois s'ils ne se sentent pas capables de calculer celui d'un polynôme du troisième degré à coefficients rationnels ;
- se familiariser concrètement avec les sous-groupes et groupes quotients de \mathbb{Z}^n ;
- réfléchir sur le caractère intrinsèque de la signature d'une permutation.

Anneaux : Hormis quelques points obligés (comme le théorème de transfert de Gauss pour la factorialité), les plans proposés sur les anneaux sont pauvres en références aux polynômes et à la Géométrie (paramétrage rationnel de certaines courbes algébriques, notamment des coniques).

Corps : On recommande de

- soigner l'exposé des corps finis, en particulier de leurs inclusions ;
- ne pas parler des " racines d'un polynôme " sans préciser quand il le faut dans quel corps elles habitent. Le chapitre sur les racines d'un polynôme doit mentionner leurs relations avec les coefficients ;
- ne pas oublier les aspects géométriques et topologiques de la théorie des quaternions ;

- ne pas s'attarder outre mesure à définir la détermination principale de l'argument d'un nombre complexe ; il est plus important de mentionner la possibilité de relever des fonctions continues à valeur dans le cercle unité en des fonctions continues réelles par la fonction exponentielle.

Algèbre linéaire : Ces leçons, peu en faveur actuellement, sont difficiles de par l'étendue des connaissances qu'elles exigent pour être traitées avec intérêt. En particulier, la notion de dualité ne concerne pas que les rapports entre un espace vectoriel et son dual, mais aussi les formes bilinéaires symétriques ou alternées, les groupes abéliens finis, les espaces projectifs. Les leçons sur les matrices doivent s'enrichir d'observations topologiques utilisant la continuité du déterminant.

La leçon sur les sous-espaces vectoriels stables ne doit pas se limiter à la diagonalisation; mais doit faire jouer un rôle aux sous-espaces cycliques. On envisagera le cas de plusieurs endomorphismes, l'existence d'un supplémentaire stable, l'application de l'orthogonalité à des problèmes.

Le sujet " Polynôme minimal. Polynôme caractéristique " est encore très mal traité. Beaucoup de candidats ne font pas assez preuve de réflexion sur ce chapitre (invariance du polynôme minimal d'une matrice par extension du corps de base, signification de la notation $\underline{u} - X \cdot \underline{id}$) ni d'aptitude au calcul explicite des objets introduits (notamment du polynôme minimal d'une matrice de Jordan). La référence aux $K[X]$ -modules, universellement observée, n'est pas indispensable car la démonstration classique du théorème de Cayley-Hamilton par emploi de la comatrice contient en germe un développement élémentaire de la théorie du polynôme minimal et de la réduction de Jordan.

Formes quadratiques, alternées, hermitiennes : Le traitement de ces sujets est en général fort peu satisfaisant : les connaissances des candidats sur les formes quadratiques (et en particulier sur leur diagonalisation simultanée) sont souvent minimes, on ignore leurs applications à la Géométrie et à l'Arithmétique, on reste à peu près muet sur les formes alternées dès lors qu'on croit bon de citer ces théorèmes. La leçon sur le groupe orthogonal d'une forme quadratique non dégénérée devrait étudier le groupe de Lorentz et contenir des applications des théorèmes de Witt et de Cartan-Dieudonné. Et on devrait connaître les endomorphismes normaux en dimension 2 !

Géométrie : En géométrie projective, la leçon " Droite projective. Homographies. Birapport " ne doit pas se réduire aux définitions de ces trois objets assorties de trivialisations, ni se contenter de démarquer le

chapitre général sur les espaces projectifs en y substituant le mot " droite " au mot " espace " ; au moins pourrait-on faire voir que, sur une droite, trois points distincts quelconques forment un repère projectif - ce que certains candidats ont découvert avec étonnement sous la direction du jury. Il est bon d'appliquer les notions introduites à des modèles " concrets " de droites projectives : droites plongées dans un plan, faisceaux d'hyperplans, coniques projectives, droite projective complexe $\tilde{\mathbb{C}}$.

Il est généralement bien vu de traiter des coniques et quadriques dans un cadre d'abord affine, en axant l'exposé sur l'emploi des formes quadratiques qui lui donne son unité. De même, les leçons sur les cercles et sphères ont tout intérêt à mêler le vieux et le neuf : les outils du programme permettent par exemple de structurer l'ensemble des cercles et droites du plan en espace projectif et d'interpréter les familles linéaires de cercles (qui ne sont pas les seuls faisceaux) et l'orthogonalité des cercles en termes de polarité par rapport à une quadrique.

Dans le chapitre sur les inversions et le groupe circulaire, ce dernier est généralement expédié de façon très évasive et parfois erronée (cf. § " l'Exposé "). On doit savoir énoncer et démontrer complètement le théorème fondamental qui le caractérise comme groupe des homographies et antihomographies. Ce qui n'empêche certes pas de donner quelques applications de l'inversion (transformation de cercles en droites) à la mode du bon vieux temps ...

Il faut savoir enfin distinguer entre elles les diverses leçons sur les isométries affines et dépasser à leur sujet le niveau de l'enseignement du second degré. La classification des sous-groupes finis de $O_3(\mathbb{R})$ ne consiste pas seulement à limiter le nombre de groupes à isomorphisme près autres que les cycliques et des diédraux, mais aussi à en établir l'existence effective.

LISTE DES LEÇONS D'ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

- Problèmes de dénombrement ; Exemples.
- Groupes abéliens finis.
- Groupes abéliens de type fini ; sous-groupes de \mathbb{Z}^n .
- Exemples et utilisations de la notion de sous-groupe distingué.
- Parties génératrices d'un groupe ; exemples ; applications à la Géométrie.
- Eléments conjugués dans un groupe ; exemples et applications.
- Groupes finis ; exemples.
- Groupes finis d'automorphismes ; exemples tirés de la Géométrie.
- Groupes opérant sur un ensemble. Applications.
- Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
- Idéaux d'un anneau unitaire. Anneaux quotients. Exemples.
- Etude de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Eléments inversibles. Indicateur d'Euler.
- Anneaux euclidiens. Anneau des entiers de Gauss.
- Anneaux principaux. Exemples et applications.
- Anneaux factoriels. Exemples et applications.
- \mathbb{Z} .
- Corps. Exemples.
- Corps de rupture d'un polynôme irréductible. Construction de corps finis.
- Quaternions.
- Corps des nombres complexes. Groupe multiplicatif.
Théorème de d'Alembert-Gauss.
- Applications des nombres complexes à la Géométrie.
- Racines de l'unité dans un corps commutatif.
- Propriétés et applications de l'algèbre des polynômes à n indéterminées.
- Racines des polynômes à une indéterminée. Résultant de deux polynômes.
Discriminant.
- Polynômes irréductibles.
- Polynômes symétriques. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme.
- Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif.
Décomposition en éléments simples et applications.
- Dimension des espaces vectoriels dans le cas fini.
- Endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie.
- Groupe linéaire en dimension finie.
- Matrices carrées inversibles.
- Sous-groupes du groupe linéaire.
- La dualité ; diverses applications.
- Rang d'une application linéaire et d'une matrice. Equations linéaires.

- Matrices
- Applications multilinéaires alternées. Déterminants.
- Exemples de déterminants. Applications.
- Méthodes de calcul d'un déterminant. Exemples et applications.
- Sous-espaces vectoriels stables pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.
- Réduction de Jordan. Applications.
- Polynôme minimal. Polynôme caractéristique.
- Formes bilinéaires symétriques ; formes bilinéaires alternées.
- Orthogonalité, isotropie pour une forme bilinéaire symétrique.
- Décomposition en carrés d'une forme quadratique. Applications.
- Réduction simultanée de deux formes quadratiques. Applications.
- Groupe orthogonal d'une forme quadratique non dégénérée
- Espaces vectoriels euclidiens en dimension finie.
- Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie.
- Espaces vectoriels hermitiens de dimension finie sur \mathbb{C} . Groupe unitaire.
- Dualité dans les espaces vectoriels euclidiens de dimension finie.
Réduction d'endomorphismes normaux.
- Dualité dans les espaces vectoriels hermitiens de dimension finie.
Réduction des endomorphismes normaux.
- Barycentre. Convexité.
- Polyèdres convexes.
- Inéquations linéaires.
- Exemples de groupes d'isométries d'un espace affine euclidien de dimension ≤ 3
- Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Formes réduites ; exemples en dimension ≤ 3 .
- Polyèdres réguliers.
- Angles
- Exemples de problèmes d'angles et de distances en Géométrie
- Inversions planes. Groupe circulaire.
- Torseurs.
- Cercles et sphères.
- Familles linéaires de cercles.
- Droite projective. Homographies. Birapport.
- Espaces projectifs. Groupe projectif.
- Coniques dans le plan affine euclidien.
- Quadriques de l'espace affine euclidien de dimension 3.

BIBLIOTHÈQUE DE L'AGRÉGATION

Les candidats étaient autorisés à apporter tout livre vendu dans le commerce (à l'exclusion des textes dactylographiés ou ronéotypés) et dépourvu de notes manuscrites.

Ils pouvaient en outre consulter sur place les ouvrages suivants:

- | | |
|--------------------------|--|
| ARTIN | <i>Algèbre géométrique</i> (Gauthier-Villars) |
| BASS | <i>Cours de Mathématiques</i> (Masson) tomes 1 et 2 |
| BERGER | <i>Géométrie</i> (Nathan) : index, tomes 1 à 5 |
| BERGER et GOSTIAUX | <i>Géométrie différentielle</i> (Colin) |
| BLANCHARD | <i>Corps non commutatifs</i> (Presses Universitaires) |
| BOURBAKI | Les tomes suivants :
<i>Théorie des ensembles</i>
<i>Algèbre</i>
<i>Fonctions d'une variable réelle</i>
<i>Topologie générale</i>
<i>Espaces vectoriels topologiques</i>
<i>Intégration</i> |
| BOUVIER et RICHARD | <i>Groupes</i> (Hermann) |
| BROUSSE | <i>Mécanique</i> (Colin) |
| CABANNES H. | <i>Cours de mécanique générale</i> (Dunod) |
| CAGNAC, RAMIS et COMMEAU | <i>Nouveau cours de Mathématiques spéciales</i> (Masson) |
| CAGNAC et THIBERGE | <i>Géométrie, classes terminales C</i> (Masson) |
| CARTAN | <i>Fonctions analytiques</i> (Hermann)
<i>Formes différentielles</i> (Hermann)
<i>Calcul différentiel</i> (Hermann) |
| CHAMBADAL et OVAERT | <i>Cours de mathématiques</i> (Gauthier Villars)
(tome I - tome 2 : algèbre et analyse)
<i>Algèbre linéaire et algèbre tensorielle</i> (Dunod) |
| CHOQUET | <i>Cours d'analyse</i> (Masson)
<i>L'enseignement de la géométrie</i> (Hermann) |
| COUTY | <i>Analyse</i> (Colin) |
| DIEUDONNE | <i>Algèbre linéaire et géométrie élémentaire</i>
(Hermann).
<i>Sur les groupes classiques</i> (Hermann)
<i>Calcul infinitésimal</i> (Hermann)
<i>Éléments d'analyses</i> (Gauthier Villars) tomes 1 et 2
<i>Analyse M.P.</i> (Gauthier Villars)
<i>Leçons d'algèbre moderne</i> (Dunod)
<i>Géométrie plane</i> (Presses Universitaires) |
| DIXMIER | <i>Algèbre, Analyse, Topologie.</i> |
| DUBREUIL (M. et Mme) | <i>An introduction to probability theory and its applications</i> (Wiley) tomes 1 et 2 |
| DUBUC | <i>Exercices: topologie et analyse.</i> Tomes 1,2,3,4,
(Vuibert) |
| EXBRAYAT et MAZET | |
| FELLER | |
| FLORY | |

- FRENKEL *Algèbre et Géométrie*
Géométrie pour l'élève professeur (Hermann)
- GENET *Mesure et Intégration* (Vuibert)
- GODEMENT *Algèbre* (Hermann)
- HENNEQUIN et TORTRAT *Théorie des probabilités et quelques applications*
(Masson)
- JACOBSON *Basic algebra*, tomes 1 et 2 (Freeman)
- KERBRAT *Géométrie des courbes et des Surfaces* (Hermann)
- KREE *Introduction aux Mathématiques appliquées* (Dunod)
- KRIVINE *Théorie axiomatique des ensembles*
(Presses Universitaires)
- LANG *Introduction aux variétés différentiables*
(traduction française)
Algèbre - Linéar Algebra
Cours de mathématiques, 4 tomes (Dunod)
- Mme LELONG-FERRAND et ARNAUDIES *Géométrie différentielle* (Masson)
- Mme LELONG-FERRAND *Algèbre, structures fondamentales* (traduction française), tome 1 (Gauthier Villars)
- MAC LANE et BIRKHOFF *Les grands théorèmes* (traduction française)
Géométrie différentielle intrinsèque (Hermann)
- MALLIAVIN *Géométrie* (Colin)
- MARTIN P. *Introduction à la théorie des probabilités*
- METIVIER *Le défi algébrique* (Vuibert) tomes 1 et 2
- MUTAFIAN *Bases mathématiques du calcul des probabilités*
(Masson)
- NEVEU J. *Cours d'algèbre* (E.N.S.J.F.)
- PERRIN *Problems and theorems in analysis*, tomes 1 et 2
(Springer)
- POLYA et SZEGÖ *Cours d'algèbre* (Masson)
- QUERRE *Algèbre* (Colin)
- QUEYSANNE *Mathématiques spéciales* 5 tomes (Masson)
- RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX *Leçons d'analyse fonctionnelle* (Gauthier Villars)
- RIESZ et NAGY *Real and complex analysis* (Mac Graw-Hill)
- RUDIN *Théorie algébrique des nombres* (Hermann)
- SAMUEL *Cours d'analyse* (Hermann) tomes 1 et 2
- SCHWARTZ *Topologie générale et analyse fonctionnelle* (Hermann)
- SERRE *Cours d'arithmétique* (Presses Universitaires)
- VALIRON *Cours d'analyse* (Masson) tomes 1 et 2
- VAUQUOIS *Les Probabilités* (Hermann)
- WARUSFEL *Structures algébriques finies* (Hachette)
- ZISMAN *Topologie algébrique* (Colin).

Université de Nancy I
BIBLIOTHÈQUE
I.E.C.N. Mathématiques