PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

N.B. — *Les troisième et quatrième parties sont indépendantes de la deuxième partie.*

*
* *

DÉFINITIONS, NOTATIONS ET RAPPELS

1° Dans tout le problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls, $\mathbb{R}^-$ l'ensemble des réels négatifs ou nuls. Si a et b sont deux réels, on utilisera parfois la notation abrégée $a \wedge b$ pour désigner le minimum de a et de b.

2° Désignant par $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, on appelle variable aléatoire réelle (en abrégé *v.a.r.*) de loi μ une application de Ω dans $\mathbb{R}$, mesurable relativement à la tribu $\mathcal{A}$ et à la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, telle que la probabilité image de P par cette application soit la mesure μ sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice d'un ensemble $A \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire la *v.a.r.* qui vaut 1 sur A et 0 sur le complémentaire de A.

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une suite de n v.a.r., on note $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$ la plus petite sous-tribu de $\mathcal{A}$ rendant mesurables ces applications de Ω dans $\mathbb{R}$.

3° Si $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$, le symbole $E(X \mid \mathcal{B})$ désigne l'espérance conditionnelle de la v.a.r. intégrable X par rapport à la tribu $\mathcal{B}$, ou plutôt un représentant de cette espérance conditionnelle.

On rappelle l'inégalité de Jensen pour les espérances conditionnelles : si φ est une fonction convexe, si X est une v.a.r. intégrable telle que $\varphi(X)$ soit intégrable, alors

$$\varphi(E(X \mid \mathcal{B})) \leqslant E(\varphi(X) \mid \mathcal{B}) \qquad \text{p.s.}$$

4° Si $(\mathcal{B}_n, n \geqslant 0)$ est une suite de sous-tribus de $\mathcal{A}$, croissante pour l'inclusion $(\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n+1})$, et si $(X_n, n \geqslant 0)$ est une suite de v.a.r. intégrables, on dit que $(X_n, n \geqslant 0)$ est une martingale adaptée à $(\mathcal{B}_n, n \geqslant 0)$ si chaque X_n est un représentant de l'espérance conditionnelle $E(X_{n+1} \mid \mathcal{B}_n)$: on écrira simplement $X_n = E(X_{n+1} \mid \mathcal{B}_n)$ p.s. On pourra avoir en mémoire le théorème de convergence p.s. des martingales positives, mais son utilisation ne sera pas nécessaire.

Si T est une application de Ω dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on dira que T est un temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{B}_n, n \geqslant 0)$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{T = n\} \in \mathcal{B}_n$.

Première partie

Soit $(Z_n, n \geqslant 0)$ une martingale adaptée à une famille croissante $(\mathcal{B}_n, n \geqslant 0)$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$.

1° *a.* Montrer que pour tout $p \geqslant 0$ et tout $n \geqslant 0$:

$$E(Z_{n+p} \mid \mathcal{B}_n) = Z_n \qquad \text{p.s.}$$

b. Si $(Z_n, n \geqslant 0)$ est positive et si on pose $\underline{Z} = \liminf_{k \to \infty} Z_k$, montrer que pour tout $n \geqslant 0$:

$$E(\underline{Z} \mid \mathcal{B}_n) \leqslant Z_n \qquad \text{p.s.}$$

c. Si $(Z_n,\ n \geqslant 0)$ est positive et converge p.s. vers une v.a.r. Z_∞, et si $E(Z_\infty) = E(Z_0)$, montrer que pout tout $n \geqslant 0$,

$$E(Z_\infty \mid \mathcal{B}_n) = Z_n \qquad \text{p.s.}$$

2° *a.* Soit T un temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{B}_n,\ n \geqslant 0)$.

Montrer que la suite $(Z_{n\wedge T},\ n \geqslant 0)$ définie par

$$\begin{aligned} Z_{n\wedge T} &= Z_n && \text{sur } \{T > n\} \\ &= Z_T && \text{sur } \{T \leqslant n\} \end{aligned}$$

est encore une martingale adaptée à la famille $(\mathcal{B}_n,\ n \geqslant 0)$.

b. On pose pour $b > 0$

$$\begin{aligned} T_b &= \inf\{n \geqslant 0 : Z_n > b\} \\ &= +\infty \quad \text{si } Z_n \leqslant b \quad \text{pour tout } n \geqslant 0. \end{aligned}$$

Montrer que T_b est un temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{B}_n,\ n \geqslant 0)$.

c. Montrer que si $(Z_n,\ n \geqslant 0)$ est positive,

$$b\,P(T_b < +\infty) \leqslant E\left(Z_{T_b}\,\mathbf{1}_{\{T_b < +\infty\}}\right) \leqslant E(Z_0),$$

et en déduire que $Z^* = \sup\limits_{n \geqslant 0} Z_n$ est finie p.s.

Deuxième partie

Soit $(Y_k,\ k \geqslant 1)$ une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées de loi commune μ définie par $\mu(\{1\}) = \mu(\{-1\}) = 1/2$. On pose

$$\begin{aligned} X_0 &= 0 && \mathcal{B}_0 = (\Phi, \Omega) \\ X_n &= \sum_{k=1}^{n} Y_k && \mathcal{B}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n) \qquad \text{pour } n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Si c et d sont deux entiers $\geqslant 1$, on pose

$$\begin{aligned} U &= \inf\{n \geqslant 1 : X_n \geqslant c \ \text{ ou } \ X_n \leqslant -d\} \\ &= +\infty \quad \text{si } -d < X_n < c \quad \text{pour tout } n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Le but de cette partie est d'obtenir la transformée de Laplace de la loi du temps d'atteinte U de la double barrière $\{c, -d\}$ par la promenade aléatoire $(X_n,\ n \geqslant 0)$.

1° Pour $0 \leqslant \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, montrer que la suite $(S_n^\alpha,\ n \geqslant 0)$ définie par

$$S_n^\alpha = (\cos\alpha)^{-n} \cos\left\{\alpha\left(X_n - \frac{c-d}{2}\right)\right\}$$

est une martingale adaptée à $(\mathcal{B}_n,\ n \geqslant 0)$.

2° On suppose désormais $0 \leqslant \alpha < \dfrac{\pi}{c+d}$. Montrer :

a. Que $(S_{n\wedge U}^\alpha,\ n \geqslant 0)$ est une martingale positive adaptée à la famille $(\mathcal{B}_n,\ n \geqslant 0)$;

b. Que pour tout $n \geqslant 0$,

$$E\left((\cos\alpha)^{-(n\wedge U)}\right) \leqslant \frac{\cos\left\{\alpha\dfrac{c-d}{2}\right\}}{\cos\left\{\alpha\dfrac{c+d}{2}\right\}} ;$$

c. Que $P(U < +\infty) = 1$;

d. Que $(\cos \alpha)^{-U}$ est intégrable.

3° Calculer, toujours pour $0 \leqslant \alpha < \dfrac{\pi}{c+d}$, la valeur de $E((\cos \alpha)^{-U})$.

Troisième partie

Soit $(Z_n, n \geqslant 0)$ une martingale positive adaptée à une famille croissante $(\mathcal{B}_n, n \geqslant 0)$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$. On suppose que $Z_0 = 1$ et que la suite $(Z_n, n \geqslant 0)$ tend p.s. quand n tend vers $+\infty$ vers une v.a.r. Z_∞. On pose pour tout $k \geqslant 1$.

$$\alpha_k = \frac{Z_k}{Z_{k-1}} \qquad \text{sur } \{Z_{k-1} > 0\}$$
$$= 1 \qquad \text{sur } \{Z_{k-1} = 0\}$$

On suppose que $\alpha_k \operatorname{Log} \alpha_k$ est intégrable pour tout $k \geqslant 1$ (ici $0 \operatorname{Log} 0 = 0$) et on va introduire la condition

$$(c) \qquad E\left(\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} E(\alpha_k \operatorname{Log} \alpha_k \mid \mathcal{B}_{k-1})\right\}\right) < +\infty$$

après lui avoir donné un sens grâce au résultat de la question 2°.

Le but de cette partie est de montrer que sous la condition (c), $E(Z_\infty) = 1$.

1° Montrer que pour tout $k \geqslant 1$,

$$\mathbf{1}_{\{Z_{k-1}=0\}} \leqslant \mathbf{1}_{\{Z_k=0\}} \qquad \text{p.s.}$$

2° Montrer que pour tout $k \geqslant 1$,

$$E(\alpha_k \mid \mathcal{B}_{k-1}) = 1 \qquad \text{p.s.}$$

puis que

$$E(\alpha_k \operatorname{Log} \alpha_k \mid \mathcal{B}_{k-1}) \geqslant 0 \qquad \text{p.s.}$$

3° Soit $\lambda \in]0, 1[$.

a. Montrer que pout tout $k \geqslant 1$, $(\alpha_k)^\lambda$ est intégrable et

$$E((\alpha_k)^\lambda \mid \mathcal{B}_{k-1}) > 0 \qquad \text{p.s.}$$

b. Soit P_k la probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{B}_k)$ par

$$P_k(A) = E(\mathbf{1}_A \alpha_k), \qquad A \in \mathcal{B}_k, \quad k \geqslant 1.$$

Montrer que les restrictions à $\mathcal{B}_{k-1}$ de P et P_k ont mêmes ensembles négligeables. Si E_k désigne l'espérance relative à P_k, montrer que

$$E(\alpha_k \operatorname{Log} \alpha_k \mid \mathcal{B}_{k-1}) = E_k(\operatorname{Log} \alpha_k \mid \mathcal{B}_{k-1}) \qquad \text{p.s.}$$

et que

$$E((\alpha_k)^\lambda \mid \mathcal{B}_{k-1}) = E_k((\alpha_k)^{\lambda-1} \mid \mathcal{B}_{k-1}) \qquad \text{p.s.}$$

c. En déduire que

$$\exp\{(\lambda-1)\, E(\alpha_k \operatorname{Log} \alpha_k \mid \mathcal{B}_{k-1})\} \leqslant E((\alpha_k)^\lambda \mid \mathcal{B}_{k-1}) \qquad \text{p.s.}$$

4° On considère pour $n \geqslant 1$

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} E(\alpha_k \operatorname{Log} \alpha_k \mid \mathcal{B}_{k-1})$$

et on note

$$R_\infty = \lim_{n \to \infty} R_n \qquad \text{p.s.}$$

On suppose, comme on l'a annoncé au début de cette partie, qu'est vérifiée la condition

(c) $$E(\exp R_\infty) < +\infty .$$

Pour tout $\lambda \in]0, 1[$, on introduit la suite $(Y_n(\lambda), n \geqslant 0)$ définie par

$$Y_0(\lambda) = 1$$

$$Y_n(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} \frac{(\alpha_k)^\lambda}{E((\alpha_k)^\lambda \mid \mathcal{B}_{k-1})} \qquad \text{p.s.}$$

et on pose

$$\overline{Y}(\lambda) = \limsup_{n \to \infty} Y_n(\lambda)$$

a. Montrer que $(Y_n(\lambda), n \geqslant 0)$ est une martingale positive adaptée à $(\mathcal{B}_n, n \geqslant 0)$.

b. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$Y_n(\lambda) \leqslant (Z_n)^\lambda \exp\{(1-\lambda) R_n\} \qquad \text{p.s.}$$

c. Montrer que pour tout $B \in \mathcal{A}$ et tout $n \geqslant 1$,

$$E(\mathbb{1}_B\, Y_n(\lambda)) \leqslant (E(\mathbb{1}_B \exp R_\infty))^{1-\lambda}$$

d. Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $E(\mathbb{1}_{\{Y_n(\lambda) \geqslant \overline{Y}(\lambda) + \varepsilon\}}\, Y_n(\lambda))$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et en déduire que $E(\overline{Y}(\lambda)) \geqslant 1$.

e. Montrer que

$$E(\overline{Y}(\lambda)) \leqslant (E(Z_\infty))^\lambda\, (E(\exp R_\infty))^{1-\lambda} .$$

f. En conclure que sous la condition (c), $E(Z_\infty) = 1$.

Quatrième partie

Soit $(Y_k, k \geqslant 1)$ une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées dont on désigne par μ la loi commune et soit $\varphi : \mathbb{R} \to]-\infty, +\infty]$ la fonction définie par

$$\varphi(u) = \operatorname{Log} E(\exp\{u Y_1\}) = \operatorname{Log} \int e^{ux}\, d\mu(x) .$$

On pose

$$X_0 = 0 \qquad \mathcal{B}_0 = (\Omega, \Phi)$$

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k \qquad \mathcal{B}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n) \qquad \text{pour } n \geqslant 1,$$

et pour un réel $a \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} T &= \inf\{n \geqslant 1 : X_n \geqslant a\} \\ &= +\infty \text{ si } X_n < a \qquad \text{pour tout } n \geqslant 1 . \end{aligned}$$

Le but de cette partie est d'étudier en fonction des valeurs de φ la transformée de Laplace $E(\exp \theta T)$ de la loi de T, et principalement de déterminer pour quelles valeurs de θ cette expression est finie.

1° Soit I l'ensemble des $u \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi(u) < +\infty$.

a. Montrer que la fonction φ est convexe et en déduire que I est un intervalle contenant l'origine 0.

b. Si μ n'est pas une mesure de Dirac, montrer que φ est strictement convexe sur I.

c. Si $(u_n\,,\ n \geqslant 1)$ est une suite d'éléments de I tendant vers un nombre réel v, montrer que $\varphi(u_n) \to \varphi(v) \leqslant +\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

d. Montrer que pour tout réel u et tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante c telle que pour tout $v \in]\,u - \varepsilon\,,\ u + \varepsilon\,[$ et pour tout x réel, on ait

$$|\,x\,|\ \exp vx \leqslant c\,(\exp\{(u + 2\varepsilon)\,x\} + \exp\{(u - 2\varepsilon)\,x\}).$$

En déduire que φ est dérivable à l'intérieur $\mathring{\mathrm{I}}$ de I, donner une expression de φ' et montrer que φ' est croissante et continue dans $\mathring{\mathrm{I}}$.

e. Montrer que la suite $(\mathrm{Z}_n^u = \exp\{\,u\,\mathrm{X}_n - n\,\varphi(u)\,\}\,,\ n \geqslant 0)$, où $u \in \mathrm{I}$, est une martingale positive adaptée à la famille $(\mathcal{B}_n\,,\ n \geqslant 0)$.

f. Si μ n'est pas une mesure de Dirac, et si $u \in \mathrm{I} \setminus \{\,0\,\}$, comparer Z_n^u et $(\mathrm{Z}_n^{u/2})^2$, et en déduire que $(\mathrm{Z}_n^u\,,\ n \geqslant 0)$ converge p.s. vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

2° On suppose dans tout ce paragraphe que

$$\int x^-\,d\mu(x) < \int x^+\,d\mu(x) \leqslant +\infty\,,$$

où $x^+ = \max(x, 0)$, $x^- = -\min(x, 0)$.

a. Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{T} < +\infty) = 1$ et que $\mathrm{E}(\mathrm{Z}_\mathrm{T}^u) \leqslant 1$ pour tout $u \in \mathrm{I}$.

b. Soit ψ la fonction définie sur $\mathring{\mathrm{I}}$ par :

$$\psi(u) = u\varphi'(u) - \varphi(u).$$

Montrer à l'aide du paragraphe III.4° que l'on a $\mathrm{E}(\mathrm{Z}_\mathrm{T}^u) = 1$ dès que $\mathrm{E}(\exp\{\,\psi(u)\,\mathrm{T}\,\}) < +\infty$.

c. Montrer que $\varphi(u) \in [0, +\infty]$ pour $u \geqslant 0$.

d. Pour tout $c > 0$, on considère la suite $(\mathrm{Y}_k^c = \min(\mathrm{Y}_k, c),\ k \geqslant 1)$; μ^c, φ^c, T^c, $\mathrm{Z}_{\mathrm{T}^c}^{u,c}$ désignent respectivement les valeurs de μ, φ, T, Z_T^u associées à cette suite $(\mathrm{Y}_k^c\,,\ k \geqslant 1)$.

Montrer que si $u \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}^-$, alors $\varphi^c(u) < +\infty$, que si c est choisi assez grand, alors $\mathrm{P}(\mathrm{T}^c < +\infty) = 1$, et que si ces deux conditions sont réalisées, alors

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}_{\mathrm{T}^c}^{u,c}) \geqslant \exp\{\,u(a + c)\,\}\ \ \mathrm{E}(\exp\{-\varphi^c(u)\,\mathrm{T}^c\}).$$

Montrer, toujours pour $u \in \mathrm{I} \cap \mathbb{R}^-$, que $\varphi^c(u)$ converge vers $\varphi(u)$ lorsque c tend vers $+\infty$. En déduire par comparaison de T et T^c que :

$$\mathrm{E}(\exp \theta\,\mathrm{T}) < +\infty \qquad \text{pour } \theta < -\inf \varphi\,,$$

où $\inf \varphi$ désigne la borne inférieure de $\varphi(u)$ pour u dans I.

e. On suppose $\mu(\mathbb{R}^+) = 1$, $\mu(\{\,0\,\}) > 0$ et $a > 0$. On pose

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_0 &= \inf\{\,n \geqslant 1 : \mathrm{X}_n > 0\,\} \\ &= +\infty \quad \text{si } \mathrm{X}_n \leqslant 0 \qquad \text{pour tout } n \geqslant 1\,. \end{aligned}$$

Calculer pour tout $j \geqslant 1$, $\mathrm{P}(\mathrm{T}_0 = j)$. Montrer que $\mathrm{T}_0 \leqslant \mathrm{T}$, que $\inf \varphi = \mathrm{Log}\,\mu(\{\,0\,\})$ et que

$$\mathrm{E}(\exp \theta\,\mathrm{T}) = +\infty \qquad \text{pour } \theta = -\inf \varphi\,.$$

f. On suppose $\mu(\mathbb{R}^+) < 1$. Montrer que $\varphi(u)$ tend vers $+\infty$ lorsque u tend vers $-\infty$ et que φ atteint sa borne inférieure pour une valeur $u_0 \leqslant 0$.

g. On suppose que $\mu(\mathbb{R}^+) < 1$ et qu'il existe $c > 0$ tel que $\mu(]\,-\infty, c\,]) = 1$. Montrer que

$$\mathrm{E}(\exp \theta\,\mathrm{T}) < +\infty \qquad \text{pour } \theta = -\inf \varphi\,.$$

h. On suppose que $\mu(\mathbb{R}^+) < 1$ et qu'il existe un réel $d < 0$ tel que $\mu([\,d\,, +\infty\,[) = 1$. Montrer que $\mathbb{R}^- \subset \mathrm{I}$ et que s'il existait $\theta > -\varphi(u_0)$ tel que $\mathrm{E}(\exp \theta\,\mathrm{T}) < +\infty$, alors il existerait $u_1 < u_0$ tel que $\mathrm{E}(\exp\{\,\psi(u_1)\,\mathrm{T}\,\}) < +\infty$; comparant les valeurs de $\mathrm{E}(\mathrm{Z}_\mathrm{T}^{u_1})$ et $\mathrm{E}(\mathrm{Z}_\mathrm{T}^{u_0})$, en déduire que

$$\mathrm{E}(\exp \theta\,\mathrm{T}) = +\infty \qquad \text{pour } \theta > -\inf \varphi\,.$$

i. On suppose $\mu(\mathbb{R}^+) < 1$. Montrer que

$$E(\exp \theta T) = +\infty \qquad \text{pour } \theta > -\inf \varphi .$$

j. Au vu des questions précédentes, pour quelles valeurs de θ peut-on affirmer que

$$E(\exp \theta T) < +\infty$$

- si μ est la loi gaussienne de moyenne $m > 0$ et de variance $\sigma^2 > 0$?
- si μ est la loi de densité $\dfrac{p^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-p(x+1)} (x+1)^{\alpha-1}$ sur $]-1, +\infty[$, avec $\alpha > p > 0$?

3° On suppose désormais que les valeurs prises par les v.a.r. $(Y_k, k \geqslant 1)$ sont des entiers relatifs inférieurs ou égaux à 1, que $\mu(\{1\}) > 0$ et que le seuil a est un entier strictement positif.

a. Montrer que $X_T = a$ sur $\{T < +\infty\}$.

b. Montrer que $\mathbb{R}^+ \subset I$ et que $\varphi(u)$ tend vers $+\infty$ lorsque u tend vers $+\infty$.

c. Soit $u^* = \max\{u \geqslant 0 : \varphi(u) = 0\}$. Montrer que la martingale $(Z^u_{n \wedge T}, n \geqslant 0)$ est bornée pour tout $u \geqslant u^*$, puis que

$$P(T < +\infty) = e^{-au^*}.$$

d. On suppose

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\mu(\{-k\}) < \mu(\{1\}).$$

Montrer que si $u \in \mathring{I} \cap \mathbb{R}^-$ et vérifie $\varphi'(u) \geqslant 0$, alors on a $E(Z^u_T) = 1$. En déduire la valeur de $E(\exp \theta T)$ pour toutes les valeurs réelles de θ pour lesquelles cette quantité est finie.

e. Calculer $P(T < +\infty)$ dans les deux cas suivants :

- $\mu(\{1-k\}) = p(1-p)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$, avec $0 < p \leqslant \dfrac{1}{2}$;
- $\mu(\{1-k\}) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}$, avec $\lambda = \dfrac{e}{e-1}$.

f. Calculer $E(\exp \theta T)$ dans les trois cas suivants :

- $\mu(\{1\}) = \mu(\{-1\}) = \dfrac{1}{2}$;
- $\mu(\{1\}) = \mu(\{0\}) = \dfrac{1}{2}$;
- $\mu(\{1-k\}) = p(1-p)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$, avec $\dfrac{1}{2} < p < 1$.

RAPPORT SUR L'ÉPREUVE «PROBABILITÉS ET STATISTIQUES»

1. Analyse du sujet

L'objet du problème était l'étude de la transformée de Laplace de la loi du temps d'atteinte d'une barrière double (partie II) ou simple (partie IV) par une somme de variables aléatoires indépendantes équidistribuées: quand c'est possible, c'est-à-dire lorsque la barrière est atteinte sans être dépassée (partie II et partie IV 3°), on obtient exactement la transformée de Laplace ; sinon (partie IV 2°), il faut se contenter de son abscisse de sommabilité. La méthode proposée était basée sur l'arrêt de certaines martingales exponentielles. Après quelques préliminaires sur les martingales (partie I), on demandait de démontrer une condition suffisante (partie III) pour qu'une martingale positive soit uniformément intégrable, ce qui est équivalent au problème suivant important en théorie du filtrage stochastique: si Q, fonction définie sur $\bigcup_n \mathcal{B}_n$, est sur chaque tribu $\mathcal{B}_n$ une probabilité absolument continue par rapport à la probabilité P, Q se prolonge-t-elle en une probabilité sur $\mathcal{B}_\infty = \bigvee_n \mathcal{B}_n$ absolument continue par rapport à P ? On proposait d'utiliser cette condition pour traiter la partie IV.

2. Corrigé résumé du problème

Première partie 1° a. On sait que si $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$, $E(X \mid \mathcal{B}) = E(E(X \mid \mathcal{C}) \mid \mathcal{B})$. On obtient par récurrence en p

$$E(Z_{n+p} \mid \mathcal{B}_n) = E(E(Z_{n+p} \mid \mathcal{B}_{n+p-1}) \mid \mathcal{B}_n) = E(Z_{n+p-1} \mid \mathcal{B}_n) = Z_n \quad \text{p.s.}$$

b. Pour $A \in \mathcal{B}_n$ et $p \geqslant 0$, on a d'après a

$$E(1_A Z_{n+p}) = E(1_A Z_n).$$

Le lemme de Fatou (appliqué à une suite positive) donne

$$E(1_A \underline{\lim}_p Z_{n+p}) = E(\underline{\lim}_p (1_A Z_{n+p})) \leqslant E(1_A Z_n),$$

d'où le résultat.

c. D'après b, la v.a.r. $Z_n - E(Z_\infty \mid \mathcal{B}_n)$ est p.s. positive, et comme elle est d'espérance nulle, elle est nulle p.s.

2° a. $E(Z_{(n+1)\wedge T} \mid \mathcal{B}_n) = E(Z_{n+1} 1_{\{T>n\}} \mid \mathcal{B}_n) + E(Z_T 1_{\{T\leqslant n\}} \mid \mathcal{B}_n)$

$$= 1_{\{T>n\}} E(Z_{n+1} \mid \mathcal{B}_n) + 1_{\{T\leqslant n\}} Z_T$$

$$= Z_{n\wedge T} .$$

car $\{T\leqslant n\} \in \mathcal{B}_n$ et $Z_T 1_{\{T\leqslant n\}}$ est $\mathcal{B}_n$-mesurable.

b. $\{T_b = n\} = \left(\bigcap_{k=0}^{n-1} \{Z_k \leqslant b\}\right) \cap \{Z_n > b\} \in \mathcal{B}_n$.

c. De $Z_{T_b} > b$ sur $\{T_b < +\infty\}$, on déduit que

$$b\, P(T_b < +\infty) = E(b\, 1_{\{T_b < +\infty\}}) \leqslant E(Z_{T_b} 1_{\{T_b < +\infty\}}) .$$

Pour tout n ,

$$E(Z_{T_b} 1_{\{T_b \leqslant n\}}) \leqslant E(Z_{n\wedge T_b}) = E(Z_o).$$

L'utilisation du théorème de Beppo-Levi sur l'espérance d'une limite croissante de v.a. positives nous donne

$$E(Z_{T_b} 1_{\{T_b < +\infty\}}) \leqslant E(Z_0) .$$

Or

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \{T_k < +\infty\} = \{Z^* = +\infty\}$$

Donc

$$P(Z^* = +\infty) = \lim_{k \to \infty} P(T_k < +\infty) \leqslant \lim_k \frac{1}{k} E(Z_o) = 0 .$$

Deuxième partie

1° $E(S^\alpha_{n+1} \mid \mathcal{B}_n) = (\cos\alpha)^{-(n+1)} \left[\cos\alpha\left(X_n - \frac{c-d}{2}\right) E(\cos Y_{n+1} \mid \mathcal{B}_n) - \sin\alpha\left(X_n - \frac{c-d}{2}\right) E(\sin\alpha Y_{n+1} \mid \mathcal{B}_n\right.$

Comme Y_{n+1} est indépendante de $\mathcal{B}_n$, il vient

$$E(\cos\alpha\, Y_{n+1} \mid \mathcal{B}_n) = E(\cos\alpha\, Y_{n+1}) = \cos\alpha$$

$$E(\sin\alpha\, Y_{n+1} \mid \mathcal{B}_n) = E(\sin\alpha\, Y_{n+1}) = 0$$

$$E(S^\alpha_{n+1} \mid \mathcal{B}_n) = S^\alpha_n .$$

2° a. $\{U = n\} = (\bigcap_{k=0}^{n-1} \{-d < X_k < c\}) \cap (\{X_n \geq c\} \cup \{X_n \leq -d\}) \in \mathcal{B}_n$,

donc U est un temps d'arrêt et $(S^{\alpha}_{n\wedge U}, n \geq 0)$ est une martingale.

Pour $n < U$, $-d < X_{n\wedge U} = X_n < c$.

Pour $0 < U \leq n$, si $X_U \geq c$, c'est que $Y_U = 1$ et $X_{U-1} = c-1$, donc en fait $X_U = c$ et si $X_U \leq -d$, en fait $X_U = -d$.

En définitive, $-d \leq X_{n\wedge U} \leq c$ p.s., et par conséquent

$$\left| X_{n\wedge U} - \frac{c-d}{2} \right| \leq \frac{c+d}{2}$$

avec égalité si $U \leq n$. D'où

$$\cos\alpha\,(X_{n\wedge U} - \frac{c-d}{2}) \geq \cos \alpha \frac{c+d}{2} > 0 ,$$

et la martingale $S^{\alpha}_{n\wedge U}$ est positive p.s.

b. $\cos \alpha \frac{c-d}{2} = E(S^{\alpha}_{o}) = E(S^{\alpha}_{n\wedge U}) \geq E((\cos \alpha)^{-(n\wedge U)}) \cos \alpha \frac{c+d}{2}$.

c. Choisissons $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{c+d}\right[$. Alors

$$(\cos \alpha)^{-(n\wedge U)} \geq 1_{\{U>n\}} (\cos \alpha)^{-n}$$

$$E((\cos \alpha)^{-(n\wedge U)}) \geq P(U > n) (\cos \alpha)^{-n}$$

d'où $P(U = +\infty) = \lim_n P(U > n) = 0$ en utilisant la majoration vue en b.

d. La suite $(\cos \alpha)^{-(n\wedge U)}$ croît p.s. vers $(\cos \alpha)^{-U}$. La majoration vue en b est donc valable pour $E((\cos \alpha)^{-U})$.

3° La suite $(S^{\alpha}_{n\wedge U}, n \geq 0)$ converge p.s. vers S^{α}_{U} , tandis que

$$0 < S^{\alpha}_{n\wedge U} \leq (\cos \alpha)^{-n\wedge U)} \leq (\cos\alpha)^{-U}$$

Par convergence dominée,

$$E(S^{\alpha}_{U}) = \lim_n E (S^{\alpha}_{n\wedge U}) = \cos \alpha \frac{c-d}{2}$$

tandis que l'on vérifie que (voir 2° a)

$$S^{\alpha}_{U} = (\cos \alpha)^{-U} \cos \alpha \frac{c+d}{2} \text{ p.s.}$$

<u>Troisième partie</u>

1° $E(Z_k \, 1_{\{Z_{k-1} = 0\}}) = E(Z_{k-1} \, 1_{\{Z_{k-1} = 0\}}) = 0$

d'où $\{Z_k = 0\} \supset \{Z_{k-1} = 0\}$ p.s.

2° $E(\alpha_k \mid \mathcal{B}_{k-1}) = \dfrac{1_{\{Z_{k-1}>0\}}}{Z_{k-1}} Z_{k-1} + 1_{\{Z_{k-1}=0\}} = 1$ p.s.

Comme $x \operatorname{Log} x$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$, d'après l'inégalité de Jensen,

$E(\alpha_k \operatorname{Log} \alpha_k \mid \mathcal{B}_{k-1}) \geqslant 0$ p.s.

3° a. D'après l'inégalité de Hölder ou celle de Jensen,

$$E((\alpha_k)^\lambda) \leqslant (E(\alpha_k))^\lambda = 1 .$$

Soit $B = \{ E((\alpha_k)^\lambda \mid \mathcal{B}_{k-1}) = 0 \} \in \mathcal{B}_{k-1}$. Alors,

$$0 = E(1_B(\alpha_k)^\lambda) = E(1_B \alpha_k) = E(1_B E(\alpha_k \mid \mathcal{B}_{k-1})) = P(B).$$

b. Si $A \in \mathcal{B}_{k-1}$,

$$P_k(A) = E(1_A \alpha_k) = E(1_A E(\alpha_k \mid \mathcal{B}_{k-1})) = P(A) ,$$

donc P et P_k coïncident sur $\mathcal{B}_{k-1}$. De plus, pour toute v.a.r. Z telle que $\alpha_k Z$ soit intégrable,

$$\begin{aligned} E(1_A \alpha_k Z) &= E_k(1_A Z) \\ &= E_k(1_A E_k(Z \mid \mathcal{B}_{k-1})) \\ &= E(1_A \alpha_k E_k(Z \mid \mathcal{B}_{k-1})) \\ &= E(1_A E(\alpha_k \mid \mathcal{B}_{k-1}) E_k(Z \mid \mathcal{B}_{k-1})) \\ &= E(1_A E_k(Z \mid \mathcal{B}_{k-1})) \end{aligned}$$

d'où

$$E(\alpha_k Z \mid \mathcal{B}_{k-1}) = E_k(Z \mid \mathcal{B}_{k-1})$$

c. L'inégalité de Jensen appliquée à la fonction convexe $\phi(x) = \exp\{(\lambda-1)x\}$ donne

$$\exp\{(\lambda-1)E_k(\operatorname{Log} \alpha_k \mid \mathcal{B}_{k-1})\} \leqslant E_k(\exp\{(\lambda-1) \operatorname{Log} \alpha_k\} \mid \mathcal{B}_{k-1})$$

d'où le résultat en utilisant b.

4° a. $E(Y_{n+1}(\lambda) \mid \mathcal{B}_n) = \dfrac{E((\alpha_{n+1})^\lambda \mid \mathcal{B}_n)}{E((\alpha_{n+1})^\lambda \mid \mathcal{B}_n)} Y_n(\lambda) = Y_n(\lambda)$ p.s.

b. D'après 3° c,

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{E((\alpha_k)^\lambda \mid \mathcal{B}_{k-1})} \leqslant \exp\{(1-\lambda)R_n\}$$

De plus

$$\prod_{k=1}^{n} \alpha_k = Z_n \quad \text{si les } Z_k (k=1,\dots,n) \text{ sont } \neq 0$$

$$= 0 \quad \text{si l'un des } Z_k \text{ vaut } 0 \text{ ; et dans ce cas } Z_n \text{ vaut aussi p.s.} 0$$

c. D'après l'inégalité de Hölder, la majoration $R_n \leqslant R_\infty$ et l'égalité $E(Z_n) = 1$,

$$E(1_B\, Y_A(\lambda)) \leqslant (E(Z_n))^\lambda \, (E(1_B \exp R_n))^{1-\lambda}$$
$$\leqslant (E(1_B \exp R_\infty))^{1-\lambda}$$

d. Par convergence dominée (grâce à la condition (c)), en posant $B_n=\{Y_n(\lambda)>\bar{Y}(\lambda)+\varepsilon\}$, et comme $\limsup B_n = \emptyset$ p.s.,

$$E(1_{B_n} Y_n(\lambda)) \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow \infty .$$

Ensuite,

$$E(\bar{Y}(\lambda)) = E(Y_n(\lambda)) + E(\bar{Y}(\lambda) - Y_n(\lambda))$$
$$\geqslant 1 - \varepsilon - E(1_{B_n} Y_n(\lambda)).$$

e. D'après b ,

$$\bar{Y}(\lambda) \leqslant (Z_\infty)^\lambda \exp\{(1-\lambda)R_\infty\} \quad \text{p.s.}$$

On applique ensuite l'inégalité de Hölder.

f. D'après d et e ,

$$1 \leqslant (E(Z_\infty))^\lambda \, (E(\exp R_\infty))^{1-\lambda}$$

On fait tendre λ vers 1 , il vient $E(Z_\infty) \geqslant 1$; d'après I 1° b , on avait déjà $E(Z_\infty) \leqslant 1$.

Quatrième partie

1° a. Si $u \neq v$ et $0 < \lambda < 1$, l'inégalité de Hölder montre que

$$\phi(\lambda u + (1-\lambda)v) \leqslant \operatorname{Log}\left[\left(\int e^{ux}\, d\mu(x)\right)^\lambda \left(\int e^{vx}\, d\mu(x)\right)^{1-\lambda} \right]$$
$$\leqslant \lambda\, \phi(u) + (1-\lambda)\phi(v).$$

I est donc un convexe de R , et $0 \in I$ car $\phi(0) = 0$.

b. L'inégalité précédente n'est une égalité que si les fonctions e^{ux} et e^{vx} sont μ-p.p. proportionnelles, ce qui n'arrive pour $u \neq v$ que si μ est une mesure de Dirac.

c. ϕ convexe est continue sur $\mathring{I}$. Si (u_n) est une suite monotone qui converge vers $v \in \partial I$, on décompose $\phi(u_n)$ en somme de deux suites monotones en intégran séparément sur $]-\infty, 0]$ et sur $]0,+\infty[$.

d. Sur $\mathbb{R}^+$,

$$|x|\ e^{vx} \quad e^{-(u+2\varepsilon)x} \leqslant |x|\ e^{-\varepsilon x} \text{ est borné.}$$

Majoration similaire sur $\mathbb{R}^-$. On peut donc pour $x \in \mathring{I}$ dériver l'intégrale pour obtenir

$$\phi'(u) = \int x\ e^{ux-\phi(u)}\ d\mu(x).$$

Comme ϕ est convexe, ϕ' est croissante. La même majoration permet d'obtenir la continuité de ϕ' par convergence dominée.

e. $E\,(Z^u_{n+1} \mid \mathcal{B}_n) = Z^u_n\ E\,(\exp\{u\ Y_{n+1} - \phi(u)\}) = Z^u_n$.

f. $(Z^{u/2}_n)^2 = \exp\ 2\,\{\frac{u}{2}\ X_n - n\phi(\frac{u}{2})\} = \exp\{u\ X_n - 2n\ \phi(u/2)\}$.

Or $\phi(u/2) < \frac{1}{2}\ \phi(u)$ pour $u \neq 0$, $u \in I$ si μ n'est pas de Dirac, d'où

$$Z^u_n < (Z^{u/2}_n)^2 \exp\ \{2n\ (\phi(u/2) - \frac{\phi(u)}{2})\}$$
$$\leqslant ((Z^{u/2})^*)^2 \exp\ \{2n(\phi(u/2) - \frac{\phi(u)}{2})\}$$

$\longrightarrow 0$ p.s. quand $n \longrightarrow +\infty$ d'après I 2° c.

2° a. La loi forte des grands nombres montre que

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[p.s.]{} \int x\ d\mu(x) > 0,$$

et par conséquent $P(T < +\infty) = 1$. D'après I 1°b on a $E(Z^u_T) \leqslant 1$.

b. Si

$$\alpha_k = \frac{Z^u_{k\wedge T}}{Z^u_{(k-1)\wedge T}} = \exp\{(u\ Y_k - \phi(u))\ 1_{\{T\geqslant k\}}\},$$

alors

$$E\,(\alpha_k \operatorname{Log} \alpha_k \mid \mathcal{B}_{k-1}) = E(1_{\{T\geqslant k\}}\ (u\ Y_k - \phi(u)) \exp\,(u\ Y_k - \phi(u)) \mid \mathcal{B}_{k-1}$$
$$= 1_{\{T\geqslant k\}}\ (u\ \phi'(u) - \phi(u)).$$

Ainsi,

$$R_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{T\geq k\}} (u\,\phi'(u) - \phi(u)) = \psi(u)T .$$

c. Si $I \cap \mathbb{R}^+ \neq \{0\}$, alors, quand u décroit vers 0,

$$\int \frac{e^{ux}-1}{u}\, d\mu(x) \longrightarrow \int x\, d\mu(x) \in \left]0, +\infty\right[,$$

d'où $\phi(u) > 0$ dans un voisinage à droite de 0, donc par convexité $\phi(u) > 0$ pour tout $u > 0$.

d. De $(Y_1)^- = (Y_1^c)^-$, on déduit que $\phi^c(u) < +\infty$ si $u \in \mathbb{R}^- \cap I$.

De $\int x d\mu^c(x) \longrightarrow \int x d\mu(x)$ quand $c \longrightarrow \infty$ on tire que $P(T^c<\infty) = 1$

pour c assez grand.

De $X^c_{T^c} = X^c_{T^c-1} + Y^c_{T^c} < a+c$, on tire que

$$Z^{u,c}_{T^c} \geq \exp u(a+c)\ \exp(-\phi^c(u)T^c) \qquad \text{pour } u \leq 0 .$$

La croissance de Y_1^c vers Y_1 montre que $\phi^c(u)$ décroît vers $\phi(u)$ pour $u \in \mathbb{R}^- \cap I$ lorsque c tend vers $+\infty$.

De $\sum_{k=1}^{n} Y_k^c \leq \sum_{k=1}^{n} Y_k$, on tire que $T^c \geq T$. Si $\theta < -\inf \phi$, il existe donc $u \in \mathbb{R}^- \cap I$ et $c > 0$ tels que $\theta < -\phi^c(u)$, d'où

$$E(\exp \theta T) \leq E(\exp \theta T^c) \leq E(\exp(-\phi^c(u)T^c)) < +\infty$$

e. $P(T_o = j) = \mu(\{0\})^{j-1}\ (1-\mu(\{0\}))$

$$\Phi(u) = \mathrm{Log}\ \{\mu(\{0\}) + \int_{]0,+\infty[} e^{ux}\, d\mu(x)\ \}$$

décroît vers $\mathrm{Log}\,\mu(\{0\})$ quand u tend vers $-\infty$.

$$E(\exp \theta T) \geq E(\exp \theta T_o) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\{0\})^{j-1}\ (1-\mu(\{0\}))\, \mu(\{0\})^{-j} = +\infty .$$

f. $E(\exp(-u(Y_1)^-))$ tend vers $+\infty$ quand u tend vers $-\infty$ car $P((Y_1)^- > 0) > 0$.

Comme de plus ϕ est $\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$, $\phi(0) = 0$ et ϕ est continue sur l'adhérence de I , nécessairement l'ensemble $\{\phi \leqslant 0\}$ est un compact de $\mathbb{R}^-$ sur lequel ϕ atteint sa borne inférieure.

g. Comme en e, avec u_o défini en f,

$$E(\exp(-\phi(u_o)T)) < +\infty.$$

h. Pour $u \in \mathbb{R}^-$, $\exp u Y_1$ est borné par $\exp ud$, donc intégrable et $\mathbb{R}^- \subset I$. Comme ψ est continue sur $\mathbb{R}^-$ et $\psi(u_o) = -\phi(u_o)$, il existe $u_1 < u_o$ tel que $\psi(u_1) < \theta$ et donc $E(\exp \psi(u_1)T) < +\infty$. Mais

$$E(Z_T^{u_1}) = E(Z_T^{u_o} \exp\{(u_1-u_o)X_T - T(\phi(u_1) - \phi(u_o))\})$$

et

$$(u_1-u_o)X_T - T(\phi(u_1) - \phi(u_o)) \leqslant (u_1 - u_o)a ,$$

d'où

$$E(Z_T^{u_1}) < E(Z_T^{u_o}) \leqslant 1 ,$$

ce qui d'après b est incompatible avec $E(\exp \psi(u_1)T) < +\infty$.

i. On pose $Y_k^d = \max(Y_k , d)$, et en procédant commme en d , on prouve

$$E(\exp \theta T^d) = +\infty \qquad \text{pour } \theta > -\inf \phi^d$$

et

$$E(\exp \theta T) = +\infty \qquad \text{pour } \theta > \lim_{d \to +\infty} (-\inf \phi^d) = -\inf \phi$$

j.
$$E(\exp \theta T) < +\infty \qquad \text{pour } \theta < \frac{m^2}{\sigma^2}$$
$$= +\infty \qquad \text{pour } \theta > \frac{m^2}{\sigma^2} .$$

$$E(\exp \theta T) < +\infty \qquad \text{pour } \theta < \alpha - p + \alpha \operatorname{Log} \frac{p}{\alpha}$$
$$= +\infty \qquad \text{pour } \theta > \alpha - p + \alpha \operatorname{Log} \frac{p}{\alpha}$$

3° a. $X_T > X_{T-1}$, donc $Y_T = 1$ et $X_T = a$ sur $\{T<+\infty\}$

b. Pour $u \geqslant 0$, $u + \operatorname{Log} \mu(\{1\}) \leqslant \phi(u) \leqslant u$.

c. Si $u \geqslant u^*$ et $u > 0$, alors $\phi(u) \geqslant 0$ et $Z^u_{n\wedge T} \leqslant \exp au$;

par convergence dominée, comme $Z^u_{n\wedge T} \longrightarrow Z_T^u 1_{\{T<+\infty\}}$ p.s. (voir 1° f), on a

$$E(Z_T^u 1_{\{T<+\infty\}}) = 1 = \exp au \; E(1_{\{T<+\infty\}} \exp -\phi(u)T)$$

et finalement

$$P(T<+\infty) = \exp(-au^{*}).$$

d. Comme en 2°, $P(T<+\infty) = 1$. Si $u \leqslant 0$ et $\phi'(u) \geqslant 0$, alors $\psi(u) < -\phi(u)$, d'où

$$E(\exp \psi(u)T) \leqslant E(\exp - \phi(u)T) < +\infty \qquad \text{(voir 2° d)},$$

d'où $E(Z_T^u) = 1$ et $E(\exp - \phi(u)T) = \exp - au$

De même, si $u \geqslant 0$, d'après c, $E(Z_T^u) = 1$ et

$$E(\exp - \phi(u)T) = \exp - au .$$

e. $P(T <+\infty) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^a$

$P(T <+\infty) = e^{-a}$

f. $E(\exp \theta T) = (e^{-\theta} - \sqrt{e^{-2\theta} - 1})^a$ pour $\theta \leqslant 0$

$= +\infty$ pour $\theta > 0$

$E(\exp \theta T) = (2e^{-\theta} - 1)^{-a}$ pour $\theta < \text{Log } 2$

$= +\infty$ pour $\theta \geqslant \text{Log } 2$

$$E(\exp \theta T) = \left(\frac{e^{-\theta} + \sqrt{e^{-2\theta} - 4e^{-\theta}p(1-p)}}{2p}\right)^{-a} \quad \text{pour } \theta \leqslant -\text{Log } 4p(1-p)$$

$$= +\infty \quad \text{pour } \theta > -\text{Log } 4p(1-p)$$

3. Observations

Il fallait pour commencer le problème connaître les propriétés élémentaires de l'espérance conditionnelle par rapport à une tribu et manifester une certaine aisance dans leur manipulation. Le nombre important de candidats qui ont abordé avec succès ces premières questions montre qu'ils ont lu le sujet des précédentes épreuves et que cette notion est entrée dans le programme des préparations. La quatrième partie, qui nécessitait simplement des connaissances ordinaires en analyse, était là pour donner une deuxième chance à ceux qui éventuellement connaîtraient mal l'espérance conditionnelle ; en fait, peu de candidats en ont profité.

L'espérance conditionnelle mise à part, on demandait surtout aux candidats de connaître et d'employer à bon escient les principaux théorèmes de la théorie de l'intégration: théorèmes de convergence dominée et monotone, lemme de Fatou, inégalité de Hölder, dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre. Trop de candidats permutent sans méfiance une espérance et une limite, ou appliquent le lemme de Fatou dans des conditions illégales. Beaucoup sont peu à l'aise avec la notion si intuitive d'arrêt d'un processus aléatoire: en témoigne la difficulté avec laquelle ils ont tenté de montrer la positivité de la martingale $S^{\alpha}_{n \Lambda U}$ dans la deuxième partie.

Le découpage des questions en nombreuses sous-questions a beaucoup facilité le travail des candidats et a sûrement contribué à ce qu'ils soient assez nombreux à avoir abordé les trois premières parties. Les résultats ont été évidemment moins bons dans les rares questions, comme en II 3°),où l'énoncé n'indiquait pas explicitement la formule à obtenir. De même, en IV 1° f, la solution n'était pas évidente et nécessitait de faire appel soit au I 2° a, ce qui n'a pas du tout été vu, soit au théorème de convergence p.s. des martingales positives, que connaissaient visiblement un certain nombre de candidats.

Signalons encore que la continuité d'une fonction convexe au bord de l'intervalle où elle est finie semble aller de soi pour beaucoup. Enfin, les calculs sur les lois de probabilités connues, relégués en fin du 2° et du 3° de IV, ont été ignorés pour l'essentiel, alors qu'ils pouvaient s'effectuer après simple lecture des questions précédentes; c'est dommage pour ceux qui auraient pu y montrer leur dextérité et gagner ainsi quelques points bien venus.

4. Les notes (sur 40)

0	1 à 4	5 à 9	10 à 14	15 à 19	20 à 24	25 à 29	30 à 34	35 à 40
74	79	37	35	32	36	27	17	7

Cette répartition est celle des 344 copies de probabilités et statistiques, en y incluant les copies blanches.