MÉCANIQUE GÉNÉRALE

Le problème porte sur l'identification de certains mouvements d'un point matériel M, de masse m, de l'espace physique représenté par un espace affine euclidien réel de dimension 3, à certains mouvements d'un point « matériel » **M** d'un espace affine réel de dimension 4, ceci en vue de la résolution de certains problèmes gravitationnels.

Les différentes fonctions ou champs de vecteurs considérés seront supposés C^∞ sauf éventuellement en un point.

Le point M est soumis à une force $\vec{F}$ dérivant d'une fonction de forces U ($\vec{F}$ = Grad U). Les coordonnées de M dans un repère orthonormé $\mathcal{R}$ seront notées (x_1, x_2, x_3), la coordonnée temporelle étant notée t. La fonction de forces U est supposée conservative $\left(\dfrac{\partial U}{\partial t} = 0\right)$.

La mise en équations se fera par la méthode de Lagrange : si T est l'énergie cinétique à considérer, nous rappelons que les équations de Lagrange pour les paramètres q_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

$\mathcal{E}_n$ désignera un espace affine euclidien réel de dimension n, d'espace vectoriel directeur E_n. $\mathcal{E}_n$ sera rapporté à un repère orthonormé. O désignera l'origine de ce repère.

Comme usuellement, si f est une fonction de $\mathcal{E}_n$ dans $\mathbb{R}$, nous désignerons par $\dot{f} = \dfrac{df}{dt}$ la dérivée de la restriction de f le long du mouvement considéré dans $\mathcal{E}_n$.

I

$u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ désigne la suite des coordonnées d'un point **M** de $\mathcal{E}_4$. $x = (x_1, x_2, x_3)$ désigne la suite des coordonnées d'un point M de $\mathcal{E}_3$. On considère l'application φ de $\mathcal{E}_4$ dans $\mathcal{E}_3$ définie analytiquement par :

$$\mathbf{M} \longmapsto \varphi(\mathbf{M}) = \mathrm{M}$$

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2}{2} \\ x_2 &= u_1 u_2 - u_3 u_4 \\ x_3 &= u_1 u_3 + u_2 u_4 \end{aligned}\right.$$

1° En considérant des coordonnées polaires dans les plans (u_1, u_4) et (u_2, u_3), montrer que φ est surjective. Calculer $r = \| x \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ en fonction de $\| u \| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2}$.

On considère la matrice L

$$(2) \qquad L = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix}$$

Montrer que L est une matrice de similitude. Montrer que la matrice extraite de L, formée des trois premières lignes, est la jacobienne de φ. En déduire que pour $\| u \| \neq 0$, φ est de rang maximum.

2° On considère le mouvement fictif d'un point **M** de $\mathcal{E}_4$ pour une variable temporelle fictive τ, d'énergie cinétique fictive $\mathcal{T} = \frac{m}{2} \| u' \|^2$, où m est une constante positive et où u' désigne $\frac{du}{d\tau}$. Ce point **M** est soumis à l'action d'une force dérivant d'une fonction de forces $\mathcal{U}$. *Sauf dans 2° c. où $\mathcal{U}$ est une fonction différentiable quelconque de u_1, u_2, u_3, u_4, on supposera que $\mathcal{U}$ ne dépend de* **M** *que par* $\| u \|$. Les équations du mouvement de **M** sont définies par les équations de Lagrange associées à $\mathcal{T}$ et $\mathcal{U}$.

a. On pose

(3)
$$\omega(u, u') = u_4 u_1' - u_3 u_2' + u_2 u_3' - u_1 u_4'$$

Déterminer une relation matricielle entre $(x_1' \; x_2' \; x_3' \; \omega)$ et $(u_1' \; u_2' \; u_3' \; u_4')$. En déduire l'expression de $\| u' \|^2$ en fonction de r, x_1', x_2', x_3' et ω.

b. On définit le moment cinétique de **M** par la matrice antisymétrique d'ordre 4 :

(4)
$$\sigma = (\sigma_{ij}) \qquad \sigma_{ij} = m(u_i u_j' - u_j u_i')$$
$$i \in \{1, 2, 3, 4\} \qquad j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Montrer que σ est une matrice d'intégrales premières pour le mouvement de **M**. Que peut-on déduire pour ω ?

c. Cette question est une généralisation de b. *et est indépendante de la suite du problème.* On considère dans $\mathcal{E}_4$ le mouvement de **M** d'énergie cinétique $\mathcal{T} = \frac{m}{2} \| u' \|^2$ et de fonction de forces $\mathcal{U}$ *quelconque.*

Soit $\{ g_\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \}$ une famille d'isométries de $\mathcal{E}_4$, dépendant d'un paramètre réel λ, et s'exprimant analytiquement par :

(5)
$$\tilde{u}_i = g_i(u_1, u_2, u_3, u_4, \lambda)$$

On suppose les fonctions g_i différentiables par rapport à l'ensemble des variables $(u_1, u_2, u_3, u_4, \lambda)$; de plus g_λ est l'identité pour $\lambda = 0$. On désigne par γ_i la fonction définie par :

(6)
$$\gamma_i = \left. \frac{\partial g_i}{\partial \lambda} \right|_{\lambda = 0}$$

Montrer que si $\mathcal{U}$ est invariante par g_λ, quel que soit λ ($\mathcal{U} \circ g_\lambda = \mathcal{U}$), alors la fonction F définie par :

(7)
$$\mathrm{F}(u, u') = m \sum_{i=1}^{4} \gamma_i(u_1, u_2, u_3, u_4)\, u_i'$$

est une intégrale première du mouvement de **M**. Considérant à nouveau le cas particulier où $\mathcal{U}$ est une fonction de $\| u \|$, déterminer une famille d'isométries pour laquelle l'intégrale première (7) est σ_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant 4, 1 \leqslant j \leqslant 4)$.

3° On repère **M** (pour $\| u \| \neq 0$) par les trois coordonnées curvilignes (x_1, x_2, x_3) et une quatrième notée y (qu'il est inutile de préciser), de telle sorte que les coordonnées de **M** sont des fonctions de (x_1, x_2, x_3, y). Montrer que si la fonction ω, définie au I.2 *a.* par l'équation (3) est nulle à un instant τ_0, alors elle est nulle tout le long du mouvement de **M**. On désignera par Ω l'ensemble des mouvements satisfaisant à cette condition.

Montrer que pour les mouvements de Ω, les trois premières équations de Lagrange, relatives aux coordonnées curvilignes de **M**, s'identifient aux équations de Lagrange pour un certain mouvement d'un point M de $\mathcal{E}_3$ de coordonnées (x_1, x_2, x_3), associées à une certaine fonction T de $x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3'$ et une certaine fonction U de x_1, x_2, x_3, dont on précisera les expressions. (On remarquera que T n'est pas l'énergie cinétique usuelle.) Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{T} - \mathrm{U}$ est intégrale première du mouvement de M. Montrer qu'à toute condition initiale $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_1'(0), x_2'(0), x_3'(0))$ pour laquelle $\| x \|$ est non nul, on peut associer une condition initiale $(u_1(0), u_2(0), u_3(0), u_4(0), u_1'(0), u_2'(0), u_3'(0), u_4'(0))$ satisfaisant à

(8)
$$u_4(0)\, u_1'(0) - u_3(0)\, u_2'(0) + u_2(0)\, u_3'(0) - u_1(0)\, u_4'(0) = 0$$

4° Soit μ une fonction de $x = (x_1, x_2, x_3)$ strictement positive. On dit qu'on remplace la coordonnée temporelle τ par la coordonnée temporelle t, définie par la relation notée symboliquement :

(9)
$$d\tau = \mu\, dt$$

lorsqu'on remplace les vitesses x'_i par les vitesses notées $\dot{x}_i$ définies par :

(10) $$\dot{x}_i = \mu x'_i$$

Préciser comment, connaissant un mouvement de M paramétré par τ, on peut lui faire correspondre un mouvement de M paramétré par t. Montrer que les mouvements de M satisfaisant, en coordonnée temporelle τ, à la condition $E = 0$, vérifient en coordonnée temporelle t, les équations de Lagrange associées à la fonction $\overline{T}$ et la fonction de forces $\overline{U}$ définies par :

(11) $$\left\{\begin{aligned} \overline{T}(x_i, \dot{x}_i) &= \mu(x) \quad T\left(x_i, x'_i = \frac{\dot{x}_i}{\mu(x)}\right) \\ \overline{U}(x) &= \mu(x)\ U(x) \end{aligned}\right. ,$$

Montrer que $\overline{T} - \overline{U} = 0$.

II

On considère dans toute cette partie le cas où le point **M** de $\mathcal{E}_4$ est soumis à la fonction de forces $\mathcal{U}$:

(12) $$\mathcal{U} = h \| u \|^2 + 2k$$

où h et k sont deux constantes données, k étant strictement positive. On choisira aussi dans toute cette partie la fonction μ :

(13) $$\mu = \frac{1}{2r} \qquad \text{où } r = \| x \|$$

1° Montrer qu'on est dans les conditions d'application du I. Calculer T, U, $\overline{T}$, $\overline{U}$. Montrer que, à partir de certains mouvements de **M** dans $\mathcal{E}_4$, on peut déterminer dans $\mathcal{E}_3$ les mouvements d'énergie h d'un point soumis à une attraction newtonienne de la part de l'origine (problème képlérien; force d'attraction de la part de l'origine inversement proportionnelle au carré de la distance). Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le mouvement de **M** soit borné dans $\mathcal{E}_4$; intégrer ces mouvements en précisant les conditions à considérer; en déduire l'intégration des mouvements bornés du problème képlérien dans $\mathcal{E}_3$.

2° Montrer que dans $\mathcal{E}_4$, la trajectoire de **M** est dans un plan fixe (sous-espace affine de dimension 2). Montrer qu'en particulier, pour les mouvements de $\mathcal{E}_4$ situés dans le plan de coordonnées (u_1, u_2) (d'équations $u_3 = u_4 = 0$), les mouvements correspondants de $\mathcal{E}_3$ ont leur trajectoire contenue dans le plan d'équation $x_3 = 0$. Montrer qu'alors la transformation φ se réduit à une transformation conforme du plan.

3° Comparer le passage à l'origine pour **M** dans $\mathcal{E}_4$, en coordonnée temporelle τ, et M dans $\mathcal{E}_3$ en coordonnée temporelle t. Quelle conclusion pratique peut-on dégager?

III

On considère dans $\mathcal{E}_3$ le mouvement d'un satellite soumis à l'attraction newtonienne de deux masses fixes, l'une d'elles étant supposée à l'infini (ou de façon équivalente le mouvement d'un électron soumis à la superposition d'un champ de Coulomb et d'un champ électrique constant). Ces deux problèmes se modélisent par le mouvement d'un point matériel M de $\mathcal{E}_3$ d'énergie cinétique $T = \frac{m}{2} \| \dot{x} \|^2$ et de fonction de forces $U = \frac{k}{r} + ax_1$ (a et k étant deux constantes positives données).

1° On considère dans $\mathcal{E}_4$ le mouvement du point **M** correspondant aux expressions suivantes de l'énergie cinétique et de la fonction de forces :

(14) $$\left\{\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{m}{2} \| u' \|^2 \\ \mathcal{U} &= h \| u \|^2 + 2k + \frac{a}{2} \| u \|^2 (u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2) \end{aligned}\right.$$

Montrer que ω est encore une intégrale première. En déduire qu'on peut traiter le problème du point M de $\mathcal{E}_3$ en employant la même méthode que dans la partie II, et par conséquent déterminer les mouvements d'énergie h de M dans $\mathcal{E}_3$ à partir de l'étude de certains mouvements de **M** dans $\mathcal{E}_4$, qu'on précisera.

2° Montrer que les équations du mouvement de **M** dans $\mathcal{E}_4$ se découplent en deux systèmes d'équations, décrivant respectivement les mouvements des deux projections M_1 et M_2 de **M** sur les deux plans ($u_2 = u_3 = 0$) et ($u_1 = u_4 = 0$). Montrer que les mouvements de M_1 et M_2 sont à accélération centrale, et indiquer comment les équations qui les décrivent peuvent s'intégrer. Ces deux mouvements sont-ils bornés? Dans le cas où le mouvement de **M** dans $\mathcal{E}_4$ est associé à un mouvement de M dans $\mathcal{E}_3$, comparer les moments cinétiques des deux projections M_1 et M_2 de **M**.

IV

On appelle champ de vecteurs V de $\mathcal{E}_n$ une application de $\mathcal{E}_n$ dans son espace vectoriel directionnel E_n. On dira que V est un champ de vitesses d'un solide si pour tout couple de solutions ($\mathbf{M}_1(t)$, $\mathbf{M}_2(t)$) du système différentiel

(15) $$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = V(\mathbf{M})$$

on a

(16) $$\frac{d}{dt} \| \overrightarrow{\mathbf{M}_1(t)\,\mathbf{M}_2(t)} \| = 0 \qquad \forall t$$

ou de façon équivalente

(17) $$\| \overrightarrow{M_1(t)\,M_2(t)} \| = \| \overrightarrow{\mathbf{M}_1(0)\,\mathbf{M}_2(0)} \| \qquad \forall t$$

1° Montrer que le champ de vecteurs V est alors caractérisé par la relation

(18) $$\forall\ \mathbf{M} \in \mathcal{E}_n \qquad V(\mathbf{M}) = V(0) + \tilde{\Omega}(\overrightarrow{0\mathbf{M}})$$

où $\tilde{\Omega}$ est un endomorphisme antisymétrique de E_n.

Montrer qu'il existe un sous-espace affine $\mathcal{A}$ de $\mathcal{E}_n$ tel que :

(19) $$\mathbf{M} \in \mathcal{A} \Leftrightarrow V(\mathbf{M}) \in \operatorname{Ker} \tilde{\Omega}$$

Préciser l'espace vectoriel directionnel de $\mathcal{A}$. Montrer que V est constant sur $\mathcal{A}$.

2° On utilise pour repérer la position dans $\mathcal{E}_n$ du point mobile **M**, à l'instant repéré par la variable temporelle t, d'une part les coordonnées usuelles $u = (u_1, \ldots, u_n)$ et d'autre part un système de coordonnées curvilignes $(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)$. On suppose d'autre part qu'il existe une fonction ω des coordonnées curvilignes et de leurs dérivées par rapport à $t\,(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{n-1}, \dot{y})$ dont la dérivée partielle $\frac{\partial \omega}{\partial \dot{y}}$ ne s'annule pas, telle que l'énergie cinétique fictive du point **M** :

$$\mathcal{T} = \frac{m}{2} \| u' \|^2$$

s'exprime, en coordonnées curvilignes, uniquement au moyen de $(x_1, \ldots, x_{n-1}, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{n-1}, \omega)$

(20) $$\mathcal{T}(x_i, y, \dot{x}_i, \dot{y}) = \mathcal{T}(x_i, \dot{x}_i, \omega(x_i, y, \dot{x}_i, \dot{y}))$$

On suppose de plus que la fonction de forces $\mathcal{U}$ s'exprime, en coordonnées curvilignes, uniquement au moyen de $x_1 \ldots x_{n-1}$.

Montrer que si $\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega}$ est nul à l'instant initial, $\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega}$ reste nul au cours du mouvement. On appelle Ω l'ensemble des mouvements caractérisés par $\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega} = 0$ et on suppose que l'équation $\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega} = 0$ permet de définir ω en fonction de $x_1, \ldots, x_{n-1}, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{n-1}$. Montrer que pour tout mouvement de Ω les équations relatives aux coordonnées curvilignes x_i sont les équations de Lagrange d'un point M de $\mathcal{E}_{n-1}$, de coordonnées $x_1, \ldots, x_{n-1}$, relatives à une certaine fonction T, et une fonction de forces U. Préciser T et U.

3° Soit Λ une matrice carrée d'ordre n, dont la dernière ligne est formée des composantes d'un champ de vitesses d'un solide de $\mathcal{E}_n$ noté V, et dont les $(n-1)$ premières lignes sont les suites des dérivées partielles de $(n-1)$ intégrales premières indépendantes de V notées $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Montrer que $\Lambda\,{}^t\Lambda$ est une matrice d'intégrales premières de V. En déduire que les résultats de la question IV.2° peuvent être appliqués au mouvement d'un point matériel **M** de $\mathcal{E}_n$, d'énergie cinétique $\mathcal{T} = \frac{m}{2}\,\|\dot{u}\|^2$, dont la fonction de forces est intégrale première de V.

4° *Applications.*

a. Montrer que L définie par (2) est du type Λ. Préciser V et les intégrales premières à considérer.

b. Construire dans $\mathcal{E}_2$ un exemple de telle matrice Λ. Quels sont les mouvements de la droite $\mathcal{E}_1$ associés à cet exemple?

c. Interpréter IV.2° et IV.3° pour :

(21)
$$\Lambda = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ -\dfrac{u_2}{\alpha(u_1^2+u_2^2)} & \dfrac{u_1}{\alpha(u_1^2+u_2^2)} & -\dfrac{1}{v} \\ -\alpha u_2 & \alpha u_1 & v \end{pmatrix}$$

où α et v sont des constantes non nulles.

5° On considère un point matériel M de $\mathcal{E}_3$ de coordonnées (x_1, x_2, x_3), d'énergie cinétique $T = \frac{1}{2}m\,\|\dot{x}\|^2$, dans un champ de forces de fonction de forces U.

Soit Φ une application surjective de $\mathcal{E}_4$ dans $\mathcal{E}_3$ définie par

(22)
$$x_i = \Phi_i(u_1, u_2, u_3, u_4) \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

Les relations

(23)
$$\dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}\,\dot{u}_j$$

seront notées

(24)
$$\dot{x} = \Phi^*(u, \dot{u})$$

Soit ω une fonction quelconque de u et de $\dot{u}$.

Montrer que

(25)
$$\mathcal{T} = T \circ \Phi^* + \omega^2$$

et

(26)
$$\mathcal{U} = U \circ \Phi$$

satisfont aux conditions d'application de IV.2° et que l'on peut ainsi obtenir les mouvements de M dans $\mathcal{E}_3$ à partir de certains mouvements de **M** dans $\mathcal{E}_4$, formant un ensemble Ω.

RAPPORT SUR L'ÉPREUVE DE MÉCANIQUE GÉNÉRALE

L'ensemble des résultats obtenus a été assez étalé, l'éventail des notes ayant été très large. Une excellente copie s'est dégagée. Plusieurs bonnes copies ont donné satisfaction. Peu de copies blanches ont été remises. La répartition semble donc bonne et en progression sur l'an dernier.

Plusieurs parties, voire plusieurs questions, étant indépendantes, l'ensemble du problème a donc été plus ou moins abordé.
A propos du I, la question 2)c) (forme très particulière du théorème de Noether) n'a été traitée que par les meilleurs candidats. Peu d'ailleurs ont reconnu que σ_{ij} était associé à un groupe de rotations dans le plan (u_i, u_j) .
Pour I 3), il est à déplorer que pratiquement aucune copie n'a traité de façon rigoureuse la réduction par $\omega = 0$; la plupart ont annulé $\omega = 0$ dans l'énergie cinétique sans vérifier l'influence que cela avait sur les équations de Lagrange. De façon générale, les équations de Lagrange sont mal connues des candidats. La question I 4) n'a pas toujours été traitée par ceux qui sont arrivés jusque là, mais le résultat ayant été donné, ils ont pu poursuivre les applications mécaniques proposées aux II et III.

Un seul candidat a su dégager l'intérêt pratique du problème, demandé au II 3) (question difficile concernant la régularisation de la collision à l'origine).

La partie IV, indépendante, et constituant une généralisation a été souvent abordée.

Dans l'ensemble, de bons candidats se sont dégagés, mais de trop nombreuses copies n'ont guère dépassé le I,1).

NOTES (SUR 40) OBTENUES PAR LES
CANDIDATS A L'EPREUVE DE MECANIQUE

de 0 à 5	29	de 21 à 25	7
de 6 à 10	19	de 26 à 30	5
de 11 à 15	8	de 31 à 35	1
de 16 à 20	9	de 36 à 40	3

I. 1) Montrons que φ est surjective

(r,θ) coordonnées polaires de (u_1,u_4)

(ρ,φ) " " (u_2,u_3)

$$x_1 = \frac{r^2-\rho^2}{2} \qquad x_2 = r\rho\cos(\theta+\alpha) \qquad x_3 = r\rho\sin(\theta+\alpha)$$

r^2 et $-\rho^2$ sont solutions de l'équation du second degré

$$X^2 - 2x_1 X - (x_2^2+x_3^2) = 0$$

Par conséquent, connaissant (x_1, x_2, x_3), on peut toujours calculer r et ρ donc $\theta+\alpha$. Par contre $\theta-\alpha$ est indéterminée.

L'application φ est surjective mais non injective, $\varphi^{-1}(x)$ est en général une courbe.

Cas particuliers. $x_2 = x_3 = 0$ $\begin{cases} x_1>0 & \rho=0 & u_2=u_3=0 \\ x_1<0 & r=0 & u_1=u_4=0 \end{cases}$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \iff u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$$

Calcul de r $\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \left(\frac{r^2-\rho^2}{2}\right)^2 + r^2\rho^2 = \frac{(r^2+\rho^2)^2}{4} = \frac{\|u\|^4}{4} = r^2$

$$\boxed{\|u\|^2 = 2r}$$

L matrice de similitude $\quad {}^tL\,L = \|u\|^2 I$

La matrice formée des 3 premières lignes de L est la matrice jacobienne de φ , la 1° ligne est celle des dérivées partielles de x_1 par rapport à $u_1\, u_2\, u_3\, u_4$, la 2° ligne est celle des dérivées partielles de x_2 par rapport à u_1, u_2, u_3, u_4 , la 3° ligne est celle des dérivées partielles de x_3 par rapport à $u_1\, u_2\, u_3\, u_4$. Si $u \neq 0$ L est régulière donc φ est de rang maximum.

2) a) $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ \omega \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ u'_4 \end{pmatrix}$

ou en notation abrégée $\begin{pmatrix} x' \\ \omega \end{pmatrix} = L\,u'$

donc $(x' \ \ \omega)\begin{pmatrix} x' \\ \omega \end{pmatrix} = {}^tu'\,{}^tL\,L\,u' = \|u\|^2\|u'\|^3$

$$\boxed{\begin{aligned} \|x'\|^2 + \omega^2 &= \|u\|^2\,\|u'\|^2 \\ \|u'\|^2 &= \frac{1}{2r}\left(\|x'\|^2 + \omega^2\right) \end{aligned}}$$

b) $\dfrac{d\sigma_{ij}}{d\tau} = m(u_i u''_j - u_j u''_i)$ or $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\|u\|)$

donc $m u''_i = \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial u_i} = \dfrac{u_i}{\|u\|}\dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial \|u\|}$

donc $\dfrac{d\sigma_{ij}}{d\tau} = \dfrac{u_i u_j}{\|u\|}\dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial \|u\|} - \dfrac{u_j u_i}{\|u\|}\dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial \|u\|} = 0$

Or $\omega = \dfrac{\sigma_{23}+\sigma_{41}}{m}$. Donc ω est une intégrale première.

c) Traduisons que $\mathcal{U}$ est invariante par g_λ : $\mathcal{U} \circ g_\lambda = \mathcal{U}$

Dérivons par rapport à λ pour $\lambda = 0$:

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial u^i}\gamma^i = 0$$

De plus g_λ est une isométrie de $\mathcal{E}_4$; c'est donc une application affine et $g_\lambda(u) = f_\lambda(u) + g_\lambda(0)$ où f_λ est une application linéaire et orthogonale.

Donc $\gamma(u) = f(u) + \gamma(0)$ où f est linéaire.

De plus $\| g_\lambda(u) - g_\lambda(0)\| = \|u\|$ donc $\| f_\lambda(u) \| = \|u\|$

En dérivant par rapport à λ pour $\lambda = 0$, on déduit $f(u).u = 0$. Donc f est un endomorphisme antisymétrique.

Alors $\dfrac{1}{m}\dfrac{dF}{dt} = \dfrac{d}{dt}\sum_i \gamma_i u'_i = \sum_i \gamma_i u''_i + \sum \gamma'_i u'_i$

Or $\sum_i \gamma_i u''_i = \dfrac{1}{m}\sum \gamma_i \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial u^i} = 0$

et $\gamma' = f(u')$ donc $\sum \gamma'_i u'_i = f(u').u' = 0$ car f est antisymétrique. Donc $\dfrac{dF}{dt} = 0$ et F est bien une intégrale première.

(Cette question est à rapprocher du IV)

σ_{ij} est relative aux rotations d'angle λ dans le plan (i,j), les autres coordonnées étant fixes.

3) ω est une intégrale première, donc si $\omega(t_0) = 0 \Rightarrow \omega(t) = 0$

$$\mathcal{T} = \frac{m}{2}\|u'\|^2 = \frac{m}{4r}\left(\|x'\|^2 + \omega^2\right)$$

Posons $T = \dfrac{m}{4r}\|x'\|^2$ $\quad \mathcal{T} = T + \dfrac{m\omega^2}{4r}$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x'_i} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_i} = \frac{d}{d\tau}\frac{dT}{dx'_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \underbrace{\frac{d}{d\tau}\left(\frac{m\omega}{2r}\frac{\partial \omega}{\partial x'_i}\right) - \frac{m}{4}\omega^2\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{m}{2r}\omega\frac{\partial \omega}{\partial x_i}}_{\text{pour } \Omega \text{ ce terme est nul}}$$

Donc les équations sont celles de

$$T = \frac{m}{4\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\,(x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2)$$

$$U = U(\tau) = \mathcal{U}\left(\|u\| = \sqrt{2\tau}\right)$$

On est dans les conditions d'application de l'intégrale de l'énergie $T = U + h$, que l'on peut redémontrer en multipliant chaque équation de Lagrange en x_i par x'_i et en sommant.

Conditions initiales.

L'application φ est surjective, donc connaissant $x(0)$ on peut déterminer au moins un $\mu(0) \in \varphi^{-1}(x_0)$ non vide. Ensuite, de

$$\begin{pmatrix} x'(0) \\ 0 \end{pmatrix} = L(u(0))\,\mu'(0)$$

on peut déduire $\mu'(0)$ à condition que L soit inversible, c'est-à-dire $\mu(0) \neq 0$

$$\mu'(0) = L^{-1}(\mu(0)) \begin{pmatrix} x'(0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

4) Soit $x(\tau)$ une solution paramétrée par τ

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\mu(x(\tau))}\,\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\,\frac{dt(\tau)}{d\tau}$$

Pour la solution considérée $\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\mu(x(\tau))}$ permet de déterminer t par quadrature, en fonction de τ . Comme t est une fonction monotone croissante de τ , τ peut donc être défini en fonction de t par fonction inverse. On obtient alors $x(\tau(t))$, mouvement de M paramétré par t .

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x'_i}\right) - \frac{\partial \mu}{\partial x_i}T - \mu\left[\frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial \mu}{\partial x_i}\underbrace{\dot{x}_i}_{\mu x'_i}\frac{\partial T}{\partial x'_i}\right]$$

$$= \mu\frac{d}{d\tau}\frac{\partial T}{\partial x'_i} - \frac{\partial \mu}{\partial x_i}T - \mu\frac{\partial T}{\partial x_i} + 2T\frac{\partial \mu}{\partial x_i}$$

$$= \mu\left[\frac{d}{d\tau}\frac{\partial T}{\partial x'_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i}\right] + \underbrace{\frac{\partial \mu}{\partial x_i}T}_{= U \text{ car } E=0} = \mu\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial \mu}{\partial x_i}U = \frac{\partial \overline{U}}{\partial x_i}$$

$\overline{T} - \overline{U} = 0$ est conséquence de $E = T - U = 0$

II. 1) $\mathcal{U} = h\|u\|^2 + 2k$. Donc $\mathcal{U}$ ne dépend de u que par $\|u\|$.

$$\mathcal{T} = \frac{m}{2}\|u'\|^2 = \frac{m}{2\|u\|^2}(\|x'\|^2 + \omega^2)$$

$$T = \frac{m}{2\|u\|^2}\|x'\|^2 \qquad \mu = \frac{1}{2r} = \frac{1}{\|u\|^2}$$

$$\bar{T} = \frac{m}{2\|u\|^2}\|\dot{x}\|^2\|u\|^4\frac{1}{\|u\|^2}$$

$$\begin{cases} \bar{T} = \frac{m}{2}\|\dot{x}\|^2 \\ \bar{U} = \frac{1}{2r}(2hr + 2k) = \frac{k}{r} + h \end{cases}$$

$\bar{U}$ est donc le potentiel képlerien.

$\bar{T} - \bar{U} = 0$ permet d'interpréter h comme étant l'intégrale d'énergie $\frac{m}{2}\|\dot{x}\|^2 - \frac{k}{r}$. Par conséquent, si on considère dans $\mathbb{R}^4$ les mouvements de M d'énergie cinétique $\mathcal{T}$, de fonction de forces $\mathcal{U}$, tels que $\omega = 0$ et $\mathcal{T} - \mathcal{U} = 0$, on obtient d'une part par φ, d'autre part par le changement temporel les mouvements d'énergie h de $\mathbb{R}^3$. Réciproquement, du fait de la correspondance des conditions initiales et des énergies, tout mouvement d'énergie h de $\mathbb{R}^3$ peut être associé à au moins un mouvement de $\mathbb{R}^4$ vérifiant $\omega = 0$ et d'énergie nulle par ce procédé. Donc dans $\mathbb{R}^4$ on doit considérer les 2 conditions $\omega = 0$ et $\mathcal{T} - \mathcal{U} = 0$.

<u>Condition nécessaire et suffisante pour que le mouvement de M soit borné :</u>

Dans $\mathcal{E}_4$ les équations sont $mu'' - 2hu = 0$ soit $u'' - \frac{2h}{m}u = 0$

Le mouvement est borné ssi $h < 0$ auquel cas u_i est sinusoïdale. Posons $\alpha^2 = -\frac{2h}{m}$; on obtient $u_i = a_i \cos\alpha\tau + b_i \sin\alpha\tau$

avec $\alpha = \sqrt{-\frac{2h}{m}}$

<u>Conditions:</u> $\boxed{\omega = 0}$

$$\begin{aligned}\omega = &(a_4\cos\alpha\tau + b_4\sin\alpha\tau)(-\alpha a_1\sin\alpha\tau + \alpha b_1\cos\alpha\tau) \\ &-(a_3\cos\alpha\tau + b_3\sin\alpha\tau)(a_2\alpha\sin\alpha\tau + b_2\alpha\cos\alpha\tau) \\ &+(a_2\cos\alpha\tau + b_2\sin\alpha\tau)(-\alpha a_3\sin\alpha\tau + \alpha b_3\cos\alpha\tau) \\ &-(a_1\cos\alpha\tau + b_1\sin\alpha\tau)(-a_4\alpha\sin\alpha\tau + b_4\alpha\cos\alpha\tau)\end{aligned}$$

$$\omega = \alpha(a_4 b_1 - a_3 b_2 + a_2 b_3 - a_1 b_4)\cos^2\alpha\tau + \alpha(a_4 b_1 - a_3 b_2 + a_2 b_3 - a_1 b_4)\sin^2\alpha\tau$$
$$= \alpha(a_4 b_1 - a_3 b_2 + a_2 b_3 - a_1 b_4) = 0$$

D'autre part $\mathcal{C} - \mathcal{C}_0 = 0$, donc

$$0 = \frac{m}{2}\alpha^2 \sum(-a_i \sin\alpha\tau + b_i \cos\alpha\tau)^2 - h\sum(a_i\cos\alpha\tau + b_i \sin\alpha\tau)^2 - 2k = 0$$
$$= -h\left(\sum(-a_i \sin\alpha\tau + b_i\cos\alpha\tau)^2 + (a_i\cos\alpha\tau + b_i\sin\alpha\tau)^2\right) - 2k = 0$$
$$0 = -h(\|a\|^2 + \|b\|^2) - 2k$$

Comme $\|u\|^2 = 2r$, un mouvement est borné dans $\mathbb{R}^3$ si et seulement si il est borné dans $\mathbb{R}^4$. Donc pour les mouvements bornés dans $\mathbb{R}^3$, on considère les mouvements $k \leq 0$. Ayant déterminé plus haut les solutions $u(\tau)$, on a $x(\tau) = \varphi(u(\tau))$ puis $d\tau = \frac{1}{\|u(\tau)\|^2}dt$ donc $dt = \int\|u(\tau)\|^2 d\tau$ d'où $t(\tau)$

On obtient ainsi x et t paramétrés par τ , d'où l'intégration.

2) La trajectoire dans $\mathcal{E}_4$ est dans un plan fixe.

$$u'' - \frac{2h}{m}u = 0$$

$h < 0$ $\alpha^2 = -\frac{2h}{m}$

$u = a\cos\alpha\tau + b\sin\alpha\tau$

$u \in$ plan (a,b) , plan affine passant par O.

$h = 0$ $u = a\tau + b$

$u \in$ plan (a,b), M dans plan affine passant par O.

$h > 0$ $\alpha^2 = \frac{2h}{m}$ $u = ae^{\alpha\tau} + be^{-\alpha\tau}$

$u \in$ plan (a,b), M dans un plan affine passant par O.

Remarquons que ce plan n'est pas quelconque car (a,b) vérifie la condition

$$a_4 b_1 - a_3 b_2 + a_2 b_3 - a_1 b_4 = 0$$

Le plan (u_1, u_2) passant par O est invariant car

$$\begin{aligned} u_3'' - \frac{2h}{m}u_3 = 0 \\ u_4'' - \frac{2h}{m}u_4 = 0 \end{aligned} \Rightarrow \text{si} \begin{aligned} u_3(0) = u_3'(0) = 0 \\ u_4(0) = u_4'(0) = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} u_3(t) = 0 \\ u_4(t) = 0 \end{cases}$$

Considérons les mouvements dans ce plan. On a alors :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{u_1^2 - u_2^2}{2} \\ x_2 = u_1 u_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Les orbites sont dans le plan $x_3 = 0$ et dans ce plan $x_1 + i\, x_2 = \frac{1}{2}(u_1 + i u_2)^2$. C'est une transformation conforme du plan (u_1, u_2) dans le plan $(x_1\, x_2)$. Pour l'étude des trajectoires d'un même plan, cette transformation conforme suffit, mais toutes les trajectoires du problème képlerien n'étant pas dans le même plan, l'application φ de $\mathcal{E}_4$ dans $\mathcal{E}_3$ est essentielle.

3) Quand $\mathbb{M} \to 0$ il n'y a pas de singularité dans $\mathcal{E}_4$ (la vitesse est finie, l'accélération est nulle), alors que pour $M \to 0$ dans $\mathcal{E}_3$, il y a singularité dite de "collision" (l'accélération est infinie). Par conséquent, pour le passage à la collision, on a intérêt à remplacer M par $\mathbb{M}$. Cette opération s'appelle une "régularisation". Dans le cas du plan, elle est due à Lévi-Civita ; dans le cas de $\mathcal{E}^3$ à Stiefel.
Remarquons que, de façon remarquable, on a identifié le problème képlerien de $\mathcal{E}_3$ à un oscillateur harmonique de $\mathcal{E}_4$!

III. 1) $$\begin{cases} \mathcal{T} = \dfrac{m}{2} \|u'\|^2 \\ \mathcal{U} = h\|u\|^2 + 2k + \dfrac{a}{2}\|u\|^2 (u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2) \end{cases}$$

Ici $\mathcal{U}$ ne dépend pas que de $\|u\|$, d'où la différence avec II Cependant, montrons que ω est encore une intégrale première. Posons $R_1 = u_1^2 + u_4^2$ $R_2 = u_2^2 + u_3^2$
Alors $\mathcal{U} = h(R_1 + R_2) + 2k + a(R_1 + R_2)\dfrac{R_1 - R_2}{2}$
Donc $\mathcal{U}$ est une fonction de R_1 et R_2.

$$\frac{d\omega}{d\tau} = u_4 u''_1 - u_1 u''_4 + u_2 u''_3 - u_3 u''_2 = u_4 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial u_4} + u_2 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial u_3} - u_3 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial u_2}$$

$$= u_4 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial R_1} 2u_1 - u_1 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial R_1} 2u_4 + u_2 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial R_2} 2u_3 - u_3 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial R_2} 2u_2 = 0$$

Donc ω est encore une intégrale première.

Considérons les mouvements Ω pour lesquels $\omega(t)=0$. La méthode du I peut alors être appliquée dans ce cadre, bien que $\mathcal{U}$ ne soit pas fonction de $\|u\|$ parce que $\mathcal{U}$ est fonction de $(u_1^2+u_4^2)$ et $(u_2^2+u_3^2)$ et que de ce fait, ω est intégrale première et que $\mathcal{U}$ est une fonction uniquement de x_1, x_2, x_3.

$$\mathcal{T}=\frac{m}{4r}\left(\|x'\|^2+\omega'^2\right) \text{ Donc } \quad T=\frac{m}{4r}\left(\|x'\|^2\right)=\frac{m}{4\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\left(x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2\right)$$

$\mathcal{U}=2rh+2k+2arx_1$ est une fonction de x_1, x_2, x_3

Prenons toujours $\mu=\frac{1}{2r}$

$$\begin{cases} \overline{T}=\frac{m}{2}\|\dot{x}\|^2 \\ \overline{U}=\frac{1}{2r}U=h+\frac{k}{r}+ax_1 \end{cases}$$

On trouve donc les solutions d'énergie $h\ (\overline{T}-\overline{U}=0)$ de la fonction de force $U=\frac{k}{r}+ax_1$

2) Pour M_1 $\quad \mathcal{U}_1=h(u_1^2+u_4^2)+\frac{a}{2}(u_1^2+u_4^2)^2$

Pour M_2 $\quad \mathcal{U}_2=h(u_2^2+u_3^2)-\frac{a}{2}(u_2^2+u_3^2)^2$

$\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ sont des fonctions de $\sqrt{u_1^2+u_4^2}$, $\sqrt{u_2^2+u_3^2}$ respectivement. Les mouvements de M_1 et M_2 sont donc des mouvements à accélération centrale très classiques. Pour M_1 et M_2 on a l'intégrale des aires et le problème s'intègre de façon très classique. On a :

$$\begin{cases} m(u_1u_4'-u_4u_1')=C_1 & \quad m\left(\dot{r}_{14}^2+\frac{C_1^2}{2r_{14}^2}\right)=\mathcal{U}_1+k_1 \\ m(u_2u_3'-u_3u_2')=C_2 & \quad m\left(\dot{r}_{23}^2+\frac{C_2^2}{2r_{23}^2}\right)=\mathcal{U}_2+k_2 \end{cases}$$

Les équations en r_{14} et r_{23} sont du type classique $\dot{\theta}^2=f(\theta)$ et s'intègrent par quadratures ($t=\int\frac{d\theta}{\sqrt{f(\theta)}}$). Ensuite les intégrales des aires permettent de calculer par quadratures les angles polaires $\quad m r_{14}^2\,\dot{\theta}_{14}=C_1 \quad m r_{23}^2\,\dot{\theta}_{23}=C_2$

On sait que l'étude qualitative des mouvements $\dot{\theta}^2 = f(\theta)$ se fait par la discussion $f(\theta) \geq 0$.

Pour M_1 $\quad -\dfrac{mC_1^2}{2R_1} + hR_1 + \dfrac{a}{2} R_1^2 + k_1 \geq 0$

Pour M_2 $\quad -\dfrac{mC_2^2}{2R_2} + hR_2 - \dfrac{a}{2} R_2^2 + k_2 \geq 0$

Soit
$$\begin{cases} a R_1^3 + 2h R_1^2 + 2k_1 R_1 - mC_1^2 \geq 0 \\ -a R_2^3 + 2h R_2^2 + 2k_2 R_2 - mC_2^2 \geq 0 \end{cases}$$

Le mouvement de M_2 est toujours borné car l'inégalité n'a pas lieu si $R_2 \to \infty$. On ne peut pas conclure pour M_1 : il existe des mouvements non bornés puisque l'inégalité est vraie si $R_1 \to \infty$. Par contre, si le polynôme en R_1 admet au moins 2 racines positives, il existe des mouvements bornés pour M_2 .
Si le mouvement de M est associé à un mouvement de M on aura $\omega(t) = 0$ donc $-C_1 + C_2 = 0$ donc $C_1 = C_2$
D'autre part si l'énergie totale est nulle : $2k = k_1 + k_2$

IV. 1) C'est la fameuse expression du champ de vecteurs d'un solide $\vec{V}(M) = \vec{V}(O) + \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$ où $\vec{\Omega}$ est la rotation instantanée, généralisée à $\mathcal{E}_n$.

Nous allons la démontrer par l'équiprojectivité très classique $\dfrac{d}{dt}(\|M_1M_2\|^2) = 0$ donc $(V(M_1) - V(M_2)) \cdot M_1M_2 = 0$

Soit M_i tel que $\vec{OM_i} = \vec{e_i}$: $(V(M) - V(M_i)) \cdot (OM - OM_i) = 0$

C'est-à-dire $\left(\underbrace{V(M) - V(O) + V(O) - V(M_i)}_{0}\right) \cdot \underbrace{(OM - OM_i)}_{=0} = 0$

Donc
$$(V(M) - V(O)) \cdot OM_i = (V(O) - V(M_i)) \cdot OM$$
$$(V(M) - V(O)) \cdot e_i = (V(O) - V(M_i)) \cdot OM$$

Donc la i° composante de $V(M) - V(O)$ est une forme linéaire par rapport à $\vec{OM}$. Donc l'application $\vec{OM} \to V(M) - V(O)$ est linéaire.

$$V(M) - V(O) = \tilde{\Omega}(OM)$$

Montrons que $\tilde{\Omega}$ est antisymétrique.

$$(V(M)-V(O))\cdot OM = 0 \quad \text{donc} \quad \tilde{\Omega}(OM)\cdot OM = 0$$

Réciproquement si $V(M) = V(O) + \tilde{\Omega}(OM)$

$$\frac{d}{dt}(M_1M_2{}^2) = (V(M_1)-V(M_2))\cdot M_1M_2 = 0$$

Montrons que $\mathcal{A}$ est bien un sous espace affine (généralisant l'axe central).

$$V(M) = \ker \tilde{\Omega} \iff \tilde{\Omega}(V(M)) = 0$$

$$\iff \tilde{\Omega}(V(O)) + \tilde{\Omega}^2(OM) = 0$$

$$\tilde{\Omega}^2(OM) = -\tilde{\Omega}(V(O))$$

Or $\tilde{\Omega}$ est un endomorphisme antisymétrique. On sait que

$$E_n = \ker \tilde{\Omega} \oplus \operatorname{Im} \tilde{\Omega} \qquad \text{somme directe orthogonale}$$

et que $\begin{cases} \operatorname{Im} \tilde{\Omega}^2 = \operatorname{Im} \tilde{\Omega} \\ \ker \tilde{\Omega}^2 = \ker \tilde{\Omega} \end{cases}$

Donc $\tilde{\Omega}^2(OM) = -\tilde{\Omega}(V_0)$ admet au moins une solution et $\mathcal{A}$ n'est pas vide. D'autre part si $M \in \mathcal{A}$, $M' \in \mathcal{A}$:

$$V(M) - V(M') = \tilde{\Omega}(MM') \in \ker \tilde{\Omega}$$

$$\iff \tilde{\Omega}^2(MM') = 0$$

$$\iff MM' \in \ker \tilde{\Omega}^2 = \ker \tilde{\Omega}$$

Donc $\mathcal{A}$ est un sous espace affine de direction $\ker \tilde{\Omega}$.

V est constant sur $\mathcal{A}$ car $V(M) - V(M') = \tilde{\Omega}(MM') = 0$

2) Ecrivons l'équation de Lagrange relative à y

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial \dot{y}}\right] - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$$

Si $\dfrac{\partial \omega}{\partial y} \neq 0$ on obtient une équation de la forme

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega} + \lambda(t)\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega} = 0, \quad \lambda(t) \text{ calculée le long du mouvement.}$$

Donc $\dfrac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega}(t) = \dfrac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega}(0)\, e^{\int \lambda(t)\,dt}$

Si $\dfrac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega}(0) = 0$ alors $\dfrac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega}(t) = 0$

Ecrivons alors pour Ω l'équation en x_i

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial \dot{x}_i}\right) - \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

Pour Ω : $\dfrac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega} = 0$ donc

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

Soit $T = \mathcal{T}(x, \dot{x}, \omega$ calculée par $\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega} = 0)$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{x}_i} \quad \text{car } \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega} = 0$$

De même

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_i}$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

L'identification ici est plus simple que dans I, II, III car nous ne faisons pas de changement temporel.

3) $\Lambda\,{}^t\Lambda$ est la matrice de Gramm des lignes de Λ. L'élément (i,j) est le produit scalaire $L_i \cdot L_j$.

- $\frac{d}{dt}(L_n \cdot L_n) = \frac{d}{dt}V^2 = 2V \cdot \frac{dV}{dt} = 2V \cdot \tilde{\Omega}(V) = 0$

  car $\tilde{\Omega}$ est antisymétrique.

- $\frac{d}{dt}(L_i \cdot L_j) = \frac{d}{dt}\left(\sum_k \frac{\partial x_i}{\partial u_k}\frac{\partial x_j}{\partial u_k}\right)$
  $i<n \; j<n$

Or $\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial u^i} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}\dot{u}^j = \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} v^j$

Si f est une intégrale première $\frac{df}{dt} = 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial u^i} v^i = 0$

donc $\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} v^i + \frac{\partial f}{\partial u^i}\frac{\partial v^i}{\partial u^j} = 0$

donc $\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial u^i} = -\frac{\partial f}{\partial u^i}\frac{\partial v^i}{\partial u^j}$

et $\frac{d}{dt}(L_i \cdot L_j) = -\frac{\partial x_i}{\partial u^l}\frac{\partial v^l}{\partial u^k}\frac{\partial x^j}{\partial u^k} - \frac{\partial x^i}{\partial u^l}\frac{\partial v^k}{\partial u^l}\frac{\partial x^j}{\partial u^k}$

Or $\tilde{\Omega}$ étant antisymétrique $\frac{\partial v^l}{\partial u^k} + \frac{\partial v^k}{\partial u^l} = 0$

et $\frac{d}{dt}(L_i \cdot L_j) = 0$ pour $i<n \; j<n$.

- $\frac{d}{dt}(L_i \cdot L_n) = \frac{d}{dt}(L_i \cdot V)$ Or $L_i \cdot V = \frac{\partial x_i}{\partial u_k}v^k = 0$ car x_i est une intégrale première. Donc $\frac{d}{dt}(L_i \cdot L_n = 0)$

Considérons un système fondamental d'intégrales premières de $V : x_1 \ldots x_{n-1}$. Posons $\binom{\dot{x}}{\omega} = \Lambda \dot{u}$

Les (n - 1) premières lignes de Λ sont indépendantes puisque ce sont les gradients d'un système fondamental d'intégrales premières. La n° ligne est perpendiculaire aux (n - 1) premières lignes puisqu'elle représente V . Donc aux points où $V \neq 0$ Λ est inversible. On en déduit

$$\dot{u} = \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$\|\dot{u}\|^2 = (\dot{x} \ \omega) \ {}^t\Lambda^{-1} \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$= (\dot{x} \ \omega) \ (\Lambda \, {}^t\Lambda)^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \omega \end{pmatrix}$$

$\Lambda \, {}^t\Lambda$ s'exprime uniquement au moyen des x_i. Par conséquent $\mathcal{T}$ est une fonction des x_i, $\dot{x}_i$, ω. Si $\mathcal{U}$ ne dépend que des x_i, c'est-à-dire si $\mathcal{U}$ est intégrale première, on peut alors appliquer III 2). On considère $\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega} = 0$, on calcule ω , on en déduit dans $\mathcal{E}_{n-1}$ une énergie cinétique et une fonction de forces. Ce schéma généralise I.

4) Applications.

a) L est du type Λ .

Le champ de vitesses est $V = (u_4 \ -u_3 \ u_2 \ -u_1)$ avec

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V(M) = \tilde{\Omega}(OM) \quad \text{car} \quad V(0) = 0$$

$x_1 \ x_2 \ x_3$ sont bien des intégrales premières de V car $L_i \cdot L_4 = 0$ dans L.

b) Exemple dans $\mathcal{E}_2$ $\quad V(-u_2, u_1) \quad \Lambda = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ -u_2 & u_1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x = \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} \\ \omega = -u_2 \dot{u}_1 + u_1 \dot{u}_2 \end{cases}$

$$\mathcal{T} = \frac{m}{2} \|\dot{u}\|^2, \ \mathcal{U}(x) \qquad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ -u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}^2 + \omega^2 = 2x (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2)$$

$$\mathcal{T} = \frac{m}{2x} (\dot{x}^2 + \omega^2) \quad \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega} = 0 \iff \omega = 0 \quad T = \frac{m}{2x} \dot{x}^2 \quad U = U(x)$$

Les mouvements de la droite $\mathcal{C}_1$ associés à (T, U) s'identifient à des mouvements du plan $\mathcal{C}_2$ associés à $\left(\frac{m}{2}\|\dot{u}\|^2, \mathcal{U}(x)\right)$ avec $-u_2\dot{u}_1 + u_1\dot{u}_2 = 0$.

c) $V = (-\alpha u_2 \quad \alpha u_1 \quad v)$ $\quad \tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$V(M) = v + \tilde{\Omega}(OM)$$

$$x_1 = \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} \quad x_2 = -\frac{u_3}{v} + \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{u_1}{u_2} \quad \omega = -\alpha\dot{u}_1 u_2 + \alpha u_1\dot{u}_2 + v\dot{u}_3$$

$$\Lambda\,{}^t\Lambda = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2x_1\alpha^2} & 0 \\ 0 & 0 & v^2 + 2\alpha^2 x_1 \end{pmatrix}$$

$$\|\dot{u}\|^2 = \frac{1}{2x_1}\dot{x}_1^2 + 2\alpha^2 x_1 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{v^2 + 2\alpha^2 x_1}\omega^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \omega} = 0 \Rightarrow \omega = 0 \qquad T = \frac{m}{2}\left[\frac{1}{2x_1}\dot{x}_1^2 + 2x_1\alpha^2\dot{x}_2^2\right]$$

5) En effet $\overline{\mathcal{C}} = T + \alpha\omega^2 = T(x, \dot{x}) + \alpha\omega^2$

$$\frac{\partial \overline{\mathcal{C}}}{\partial \omega} = 0 \iff \omega = 0$$

On peut donc considérer les mouvements de $\mathcal{C}_3$ comme associés à des mouvements de $\mathcal{C}_4$ avec $\mathcal{C} = T_0\Phi^* + \omega^2$ $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0\Phi$ et $\omega = 0$.