ANALYSE NUMÉRIQUE

Les candidats sont priés de respecter les notations et la numérotation de l'énoncé. Les notations ou abréviations abusives risquent de ne pas être comprises.

Les démonstrations et présentations concises, claires et soignées seront particulièrement bien appréciées.

Le but de ce problème est d'étudier les liens entre un certain nombre de méthodes d'analyse numérique linéaire.

Dans la partie I, des résultats utiles pour les autres parties sont établis.

La partie II est consacrée à la méthode des moments et la partie III à celle de Lanczos.

Dans la partie IV la méthode du gradient conjugué est déduite de la méthode des moments et de la méthode de Lanczos.

Dans la partie V on présente une transformation de suites de vecteurs qui est reliée à la méthode du gradient conjugué.

Dans la partie VI un algorithme récursif pour mettre en œuvre cette transformation (restreinte au cas scalaire) est étudié.

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.

Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$ on identifiera les applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et les matrices qui les représentent dans la base canonique.

I est la matrice identité.

I

Soit $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des polynômes réels, soit $\mathcal{P}_k$ le sous-espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à k et soit (c_n) une suite de nombres réels.

On définit une forme linéaire c sur $\mathcal{P}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad c(x^n) = c_n \,.$$

On rappelle qu'un polynôme unitaire est un polynôme dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à un.

Q.1. Quelle est la condition nécessaire et suffisante sur les c_n pour qu'il existe une famille de polynômes unitaires uniques $P_k \in \mathcal{P}$ de degré k et telle que :

$$P_0(x) = 1$$

$$\forall\, k > 0\,, \quad \forall\, i \in \{\,0, 1, \ldots, k-1\,\} \;:\; c(x^i P_k(x)) = 0 \;?$$

Dans toute la suite on supposera que cette condition est satisfaite. On dit que les polynômes P_k forment une famille de polynômes orthogonaux par rapport à c.

Q.2. Écrire une expression de $P_k(x)$ sous la forme d'un déterminant d'ordre $k+1$ dont la dernière ligne est $(1, x, x^2, \ldots, x^k)$ et dont les autres lignes sont des coefficients réels ne dépendant que des c_n.

Q.3. On convient que $P_{-1}(x) = 0$. Montrer qu'il existe deux suites de constantes (B_k) et (C_k) telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N} : P_{k+1}(x) = (x + B_{k+1}) P_k(x) - C_{k+1} P_{k-1}(x).$$

Donner des expressions de B_{k+1} et C_{k+1} en fonction uniquement de :

$$c(x P_k^2(x)), \quad c(P_k^2(x)) \quad \text{et} \quad c(P_{k-1}^2(x)).$$

II

Soit E un espace de Hilbert réel. Soient $z_0, z_1, \ldots, z_k$ des éléments de E, linéairement indépendants. On note E_k le sous-espace engendré par $z_0, z_1, \ldots, z_{k-1}$. On considère l'application linéaire A_k définie sur E_k et à valeurs dans E_k telle que :

$$\begin{aligned} z_1 &= A_k z_0 \\ z_2 &= A_k z_1 \\ &\cdots\cdots \\ z_{k-1} &= A_k z_{k-2} \\ H_k z_k &= A_k z_{k-1} \end{aligned}$$

où H_k désigne la projection sur E_k.

Cette méthode s'appelle méthode des moments.

Q.4. Montrer que les relations précédentes définissent entièrement A_k et déterminer le polynôme caractéristique R_k de A_k.

Q.5. On cherche à résoudre l'équation :

(*) $$z = A_k z + b$$

où $b \in E_k$ et où $\mathrm{Id} - A_k$ est supposé inversible. Id désigne l'identité dans E_k.

On pose $P(t) = R_k(t) / R_k(1)$. Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que :

$$1 - P(t) = (1 - t) Q(t)$$

et que la solution z de (*) est donnée par $Q(A_k) b$.

Q.6. On cherche à résoudre l'équation :

(**) $$A_k z = b.$$

où $b \in E_k$ et où A_k est supposé inversible.

Comment faut-il choisir le polynôme P pour que : d'une part il existe un polynôme Q tel que $1 - P(t) = t Q(t)$ et, d'autre part, la solution z de (**) soit donnée par $Q(A_k) b$ quel que soit $b \in E_k$?

Q.7. Soit A une application linéaire de E dans E. Soit $z_0 \in E$. On définit la suite (z_n) en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N} : z_{n+1} = A z_n.$$

a. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $(z_0, z_1, \ldots, z_k)$ sont linéairement indépendants. Montrer que la restriction de $H_k A H_k$ à E_k est égale à A_k.

b. On suppose que A est auto-adjoint et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(z_0, z_1, \ldots, z_k)$ sont linéairement indépendants. On pose $R'_k = (-1)^k R_k$. Montrer que la famille (R'_k) est la famille de polynômes orthogonaux unitaires par rapport à la forme linéaire c définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : c(x^n) = c_n = (z_0, z_n)$$

où $(\,.\,,\,.\,)$ désigne le produit scalaire de E.

Q.8. Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$ montrer que :

$$H_k = U(U^T U)^{-1} U^T$$

où U est la matrice dont les colonnes sont $z_0, z_1, \dots, z_{k-1}$.

III

On va maintenant étudier une méthode de calcul du polynôme caractéristique connue sous le nom de méthode de Lanczos.

Soit E un espace vectoriel réel et E' son dual algébrique. On note $< . , . >$ la forme bilinéaire qui met E et E' en dualité.

Soit A une application linéaire de E à valeurs dans E. Soient $z \in E$, $y' \in E'$ arbitraires non nuls.

On considère les suites (z_k) d'éléments de E et (y_k) d'éléments de E' définies par :

$$z_0 = z \quad , \quad y_0 = y' ,$$
$$\forall k \in \mathbb{N} : \ z_{k+1} = Az_k , \quad y_{k+1} = A^* y_k ,$$

où A^* désigne l'application linéaire adjointe de A.

Soit c la forme linéaire définie sur $\mathcal{P}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ c(x^n) = c_n =\cdot < y', z_n > .$$

Soit (P_k) la famille de polynômes orthogonaux unitaires par rapport à c. On rappelle que la suite (c_n) est supposée telle que la famille (P_k) existe.

On pose :

$$\forall k \in \mathbb{N} : \ \hat{y}_k = P_k(A^*)\, y' , \quad \hat{z}_k = P_k(A)\, z .$$

Q.9. Exprimer les coefficients B_{k+1} et C_{k+1} (question Q.3) en fonction de A, $(\hat{y}_k)$ et $(\hat{z}_k)$.

Q.10. Donner les relations de récurrence permettant le calcul des suites $(\hat{y}_k)$ et $(\hat{z}_k)$.

Q.11. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N} , \ \forall n \in \mathbb{N} : n \neq k \Rightarrow < \hat{y}_k , \hat{z}_n > = 0 .$$

Q.12. Montrer que si E est de dimension finie k et si $z_0, \dots, z_{k-1}$ sont linéairement indépendants, alors $(-1)^k P_k$ est le polynôme caractéristique de A.

IV

Soit A une matrice réelle symétrique définie positive ayant n lignes et n colonnes. On cherche à résoudre l'équation $Ax = b$ où $b \in \mathbb{R}^n$.

On applique la méthode de Lanczos à cette matrice avec $y' = z$. Puis on applique la méthode des moments à $z_0, \dots, z_k$ pour $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. On suppose que $z_0, \dots, z_{n-1}$ sont linéairement indépendants.

Q.13. Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ $(-1)^k P_k$ est le polynôme caractéristique de A_k, P_k étant le polynôme défini dans la partie III.

Q.14. Dans la question Q.6. on choisit pour P le polynôme $P_k(x) / P_k(0)$. Soit Q_k le polynôme qui lui correspond.

Montrer que si $z = b$ la solution x_k de l'équation $A_k x = b$ est donnée par $x_k = Q_k(A)\, b$.

Q.15. Montrer que $A_n = A$ et que x_n est la solution de l'équation $Ax = b$.

Q.16. Dans la méthode de Lanczos on prend maintenant $y_0 = z_0 = b$.

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\hat{z}_{k+1} = (A + \beta_{k+1} I)\,\hat{z}_k - \gamma_{k+1}\,\hat{z}_{k-1}$$

avec

$$\beta_{k+1} = -(\hat{z}_k, A\hat{z}_k) / (\hat{z}_k, \hat{z}_k)$$
$$\gamma_{k+1} = (\hat{z}_k, \hat{z}_k) / (\hat{z}_{k-1}, \hat{z}_{k-1})$$

et

$$\hat{z}_{-1} = 0, \quad \hat{z}_0 = b.$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P_{k+1}(t) = (t + \beta_{k+1})\, P_k(t) - \gamma_{k+1}\, P_{k-1}(t)$$

où $(-1)^k P_k$ est le polynôme caractéristique de la matrice A_k obtenue par la méthode des moments à partir de b, $Ab, \dots, A^k b$. On posera par convention :

$$P_{-1}(t) = 0 \quad \text{et} \quad P_0(t) = 1.$$

Q.17. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$x_{k+1} = x_k + \mu_k u_k$$

avec

$$u_k = -r_k + \mu_{k-1}\gamma_{k+1}(x_{k-1} - x_k)$$
$$\mu_k = -P_k(0) / P_{k+1}(0)$$
$$r_k = Ax_k - b.$$

On posera

$$x_0 = 0 \text{ et } u_0 = -r_0.$$

Q.18. On pose :

$$\forall k \in \mathbb{N} : \lambda_k = -\mu_{k-1}^2\gamma_{k+1}.$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$u_k = -r_k + \lambda_k u_{k-1}$$

avec

$$u_{-1} = 0.$$

Q.19. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall i \in \mathbb{N} : i \neq k \Rightarrow (r_k, r_i) = 0.$$

Q.20. Déduire de ce qui précède l'algorithme suivant :

$$x_0 = 0, \quad r_0 = -b, \quad u_0 = -r_0,$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mu_k = -(u_k, r_k) / (u_k, A u_k)$$
$$x_{k+1} = x_k + \mu_k u_k$$
$$r_{k+1} = r_k + \mu_k A u_k$$
$$\lambda_{k+1} = -(r_{k+1}, r_{k+1}) / (r_k, r_k)$$
$$u_{k+1} = -r_{k+1} + \lambda_{k+1} u_k.$$

Cette méthode s'appelle méthode du gradient conjugué.

Q.21. En utilisant les résultats de Q.2. et de Q.14. exprimer x_k sous forme d'un rapport de deux déterminants d'ordre $k + 1$.

Q.22. Montrer qu'il existe une matrice symétrique D telle que $A = D^2$.

Q.23. Pour tout $k \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ on considère les vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} v &= D^{-1} b \\ v_1 &= D\, b \\ v_2 &= A\, v_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ v_k &= A\, v_{k-1} \end{aligned}$$

et soit E_k le sous-espace engendré par $v_1, \ldots, v_k$. Soit w_k la projection orthogonale de v sur E_k.

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$w_k = D\, x_k$$

et que

$$(x - x_k, A(x - x_k)) = \frac{\begin{vmatrix} (x, b) & (b, b) & \ldots & (A^{k-1} b, b) \\ (b, b) & (Ab, b) & \ldots & (A^k b, b) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (A^{k-1} b, b) & (A^k b, b) & \ldots & (A^{2k-1} b, b) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (Ab, b) & \ldots & (A^k b, b) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (A^k b, b) & \ldots & (A^{2k-1} b, b) \end{vmatrix}}.$$

V

Soit (g_i) une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et soit (d_i) une suite de nombres réels.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$ on définit le vecteur $e_k(g_i)$ par

$$e_k(g_i) = \frac{\begin{vmatrix} g_i & \ldots & g_{i+k} \\ d_i & \ldots & d_{i+k} \\ d_{i+1} & \ldots & d_{i+k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{i+k-1} & \ldots & d_{i+2k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ d_i & \ldots & d_{i+k} \\ d_{i+1} & \ldots & d_{i+k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{i+k-1} & \ldots & d_{i+2k-1} \end{vmatrix}}$$

où le numérateur est le vecteur obtenu en développant ce déterminant par rapport à sa première ligne en utilisant les règles habituelles.

Q.24. On considère le même système d'équations linéaires $A\,x = b$ que dans la partie IV. On pose $B = I - A$ et on définit la suite (g_i) par :

$$\begin{aligned} g_0 &= 0 \\ \forall\, i \in \mathbb{N} :\quad g_{i+1} &= B\, g_i + b. \end{aligned}$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}$ on pose :

$$d_i = (b, g_{i+1} - g_i).$$

Soit (x_k) la suite de vecteurs obtenue par la méthode du gradient conjugué (partie IV).

Montrer que :

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\} : \quad x_k = e_k(g_0).$$

Q.25. Soient $\overline{B}_{k+1}$ et $\overline{C}_{k+1}$ les coefficients de la relation de récurrence de la famille de polynômes orthogonaux unitaires $(\overline{P}_k)$ par rapport à la forme linéaire d définie par :

$$\forall i \in \mathbb{N} : \quad d(x^i) = d_i.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on pose :

$$a_k = \overline{P}_k(1).$$

Montrer, en précisant les conditions initiales, que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$e_{k+1}(g_0) = \overline{B}_{k+1} \frac{a_k}{a_{k+1}} e_k(g_0) + \frac{a_k}{a_{k+1}} (B e_k(g_0) + b) - \overline{C}_{k+1} \frac{a_{k-1}}{a_{k+1}} e_{k-1}(g_0).$$

VI

(g_i) est maintenant une suite de nombres réels. On va étudier une méthode récursive de calcul des $e_k(g_i)$ définis dans la partie V.

On rappelle l'identité de Sylvester :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,i-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,i-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,i} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,i-1} \end{vmatrix}.$$

On appellera $N_k^{(i)}$ le numérateur de $e_k(g_i)$ et $D_k^{(i)}$ son dénominateur. Pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on posera :

$$H_k^{(i)} = \begin{vmatrix} d_i & \cdots & d_{i+k-1} \\ d_{i+1} & \cdots & d_{i+k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{i+k-1} & \cdots & d_{i+2k-2} \end{vmatrix}$$

et $r_k^{(i)} = H_k^{(i)} / D_{k-1}^{(i)}$.

On pose :

$$\forall i \in \mathbb{N} : \quad H_0^{(i)} = 1.$$

Q.26. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$e_{k+1}(g_i) = \frac{r_{k+1}^{(i+1)} e_k(g_i) - r_{k+1}^{(i)} e_k(g_{i+1})}{r_{k+1}^{(i+1)} - r_{k+1}^{(i)}}.$$

Q.27. Pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on pose :

$$s_k^{(i)} = D_k^{(i)} / H_k^{(i)}.$$

Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{s_{k+1}^{(i+1)}}{s_{k+1}^{(i)}} = 1 + \frac{r_{k+2}^{(i)}}{r_{k+1}^{(i+1)}}$$

$$\frac{r_{k+1}^{(i+1)}}{r_{k+1}^{(i)}} = 1 + \frac{s_{k+1}^{(i)}}{s_{k}^{(i+1)}}$$

avec $s_0^{(i)} = 1$ et $r_1^{(i)} = d_i$.

Q.28. Dans quel ordre faut-il utiliser les relations des deux questions précédentes pour calculer récursivement les $e_k(g_i)$ à partir des conditions initiales?

RAPPORT SUR L'ÉPREUVE D'ANALYSE NUMÉRIQUE

1 - REMARQUES GENERALES

L'objet de l'épreuve d'analyse numérique était de mettre en lumière le lien entre un certain nombre de méthodes classiques (la méthode de Lanczos, le gradient conjugué) par l'intermédiaire de propriétés des polynômes orthogonaux formels. La succession des questions du problème correspond d'ailleurs au développement historique de ces méthodes, alors que maintenant elles sont présentées de façon séparée dans les cours d'analyse numérique.

Ainsi qu'il l'a été souligné dans le rapport de l'année précédente, l'épreuve d'analyse numérique se caractérise par une absence de programme, ce qui fait que certains candidats sont étrangers à certaines techniques de démonstration et à une forme de raisonnement particulière à l'analyse numérique. Ce phénomène se ressent dans les résultats de l'épreuve de cette année : certains candidats ne savent pas redémontrer les propriétés classiques des polynômes orthogonaux.

2 - ANALYSE DU SUJET

La première partie du problème est une approche des polynômes orthogonaux formels (orthogonaux par rapport à une forme linéaire), et l'étude des propriétés algébriques vérifiées par ces polynômes (rapport de déterminants, récurrence à trois termes). Les démonstrations sont rigoureusement identiques à celles du cas classique.

La seconde partie présente la méthode des moments et deux de ses utilisations : calcul du polynôme caractéristique d'une application linéaire et résolution d'une équation linéaire.

La troisième partie est la méthode de bi-orthogonalisation de Lanczos (basée sur les résultats de la première partie).

Dans la quatrième partie, la méthode du gradient conjugué est présentée comme une conséquence de la méthode de Lanczos et de celle des moments.

La cinquième partie est l'étude d'une transformation de suite de vecteurs : la suite des itérés obtenus par la méthode du gradient conjugué est transformée en une autre suite (dont les éléments sont des rapports de déterminants).

La sixième partie est la mise en oeuvre pratique de cette transformation : le calcul des déterminants peut être évité par un algorithme récursif.

3 - COMMENTAIRE SUR LES QUESTIONS

Partie I

$$\text{Soit } D_k = \begin{vmatrix} c_o & \cdots\cdots & c_{k-1} \\ & & \\ c_{k-1} & \cdots\cdots & c_{2k-2} \end{vmatrix}$$

La condition de Q_1 est : $\forall k \quad D_k \neq 0$.

L'utilisation des formules de Cramer conduit à

$$P_k(x) = \frac{1}{D_k} \begin{vmatrix} c_o & \cdots\cdots & c_k \\ & & \\ c_{k-1} & \cdots\cdots & c_{2k-1} \\ 1 & x \cdots\cdots & x^k \end{vmatrix} \qquad \text{(Question } Q_2\text{)}$$

et si on exprime $p_k(x) = P_{k+1}(x) - x\, P_k(x)$ (polynôme de degré k) sur la base des polynômes $P_j(x)$, les conditions $c(x^i\, p_k(x)) = 0$ fournissent Q_3 et

$$B_{k+1} = - \frac{c(x\, P_k^2)}{c(P_k^2)} \qquad C_{k+1} = \frac{c(P_k^2)}{c(P_{k-1}^2)}$$

Cette partie a été traitée correctement par le tiers des candidats, les erreurs les plus fréquentes étant dans l'écriture de déterminants et l'oubli de la condition $c(P_k^2) \neq 0$.

Partie II

La matrice de A_k dans la base $z_o, \ldots, z_{k-1}$ de E_k s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots\cdots & \alpha_o \\ 1 & & \\ & \ddots \quad 1 & \alpha_{k-1} \end{pmatrix}$$

d'où le polynôme caractéristique

$$R_k(\lambda) = (-1)^{k+1} \left[\sum_{i=o}^{k-1} \alpha_i \lambda^i - \lambda^k \right]$$

(En n'oubliant pas le signe, car R'_k devient alors unitaire).

Les questions Q_5 , Q_6 utilisent le théorème de Cayley-Hamilton et Q_7 b) est une conséquence du fait que $z_k - H_k(z_k)$ est orthogonal à E_k .

Les trois quarts des candidats ont traité correctement cette partie.

Partie III

Les questions Q_9 et Q_{10} sont des conséquences directes de Q_3 . Q_{11} utilise le fait que $c(P_k\ P_n) = (\hat{y}_n\ ,\ \hat{z}_k)$ et Q_{12} revient à démontrer que $P_k(A)\ z_i = 0$ pour $i = 0 \ldots k-1$. Cette partie a été abordée par tous ceux qui ont traité complètement la partie I.

Notons que les trois premières parties, qui regroupent des questions classiques d'analyse numérique, permettaient d'obtenir 20/40.

Parties IV, V, VI

Ces parties n'ont été traitées que par un petit nombre de candidats.

La partie IV utilise les résultats des parties précédentes et V et VI exigeaient une manipulation de déterminants et de l'identité de Sylvester.

4 - REPARTITION DES NOTES

Nombre de copies corrigées : 393

Moyenne (sur 40) : 10,38

Répartition :

Notes	Nombre de candidats
0-4	151
5-9	64
10-14	58
15-19	42
20-24	37
25-29	23
30-34	13
35-40	5