écrit

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

Durée : 6 heures

Les parties II *et* III *du problème sont indépendantes*

On désigne par E un espace vectoriel euclidien de dimension finie, le produit scalaire de deux vecteurs x et y étant noté $(x|y)$. Si x est un élément non nul de E, on note H_x l'hyperplan orthogonal à x et w_x la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan H_x. On appelle partie radicielle de E toute partie R de E vérifiant :

(*i*) R est finie, engendre E et ne contient pas 0

(*ii*) $\forall r \in R \qquad w_r(R) \subset R$

(*iii*) $\forall r \in R \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad (\lambda r \in R \Rightarrow \lambda = \pm 1.)$

On se fixe par la suite une telle partie radicielle de E. On note $\mathcal{H} = \{ H_r \mid r \in R \}$ et W le sous-groupe du groupe orthogonal de E engendré par les w_r pour r parcourant R. E est muni de sa topologie naturelle.

Partie I

I.1. Montrer que W est fini. Son cardinal sera noté par la suite $|W|$.

I.2. Soit $E' = E \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$. Soit x un élément de E'. Rappeler pourquoi il existe une partie connexe maximale de E' contenant x (composante connexe de x dans E'). Une telle partie sera appelée une chambre (relativement à R). Montrer que deux chambres distinctes sont disjointes.

I.3. Montrer que la chambre contenant le vecteur x de E' est l'intersection des demi-espaces ouverts délimités par les hyperplans de $\mathcal{H}$ et qui contiennent x.

I.4. Soit C une chambre. On dit qu'un hyperplan $H \in \mathcal{H}$ est un mur de C si l'adhérence $\bar{C}$ de C contient un ouvert de H. Montrer que tout hyperplan H de $\mathcal{H}$ est mur d'au moins une chambre.

Dans toute la suite du problème on se fixe une chambre C dont on note les murs $H_1, \ldots, H_l$. Pour $i \in \{1, \ldots, l\}$, on désigne par w_i la symétrie orthogonale par rapport à H_i. Soit W' le sous-groupe de W engendré par $w_1, \ldots, w_l$.

I.5.*a*. Soit $b \in E'$. On suppose que b est du même côté que C par rapport à tout mur de C. Montrer que b appartient à C.

I.5.*b*. Soit C' une chambre. Montrer qu'il existe $w \in W'$ tel que $w(C') = C$ (Indication : on se fixe $a \in C$ et $a' \in C'$. Considérer $\inf_{w \in W'} d(a, w(a'))$.).

I.5.*c*. En déduire, en utilisant I.4., que $W' = W$.

I.6.*a*. Soit $x \in C$. On note R^+ l'ensemble des $r \in R$ tels que $(x \mid r) > 0$ et R^- l'ensemble des $r \in R$ tels que $(x \mid r) < 0$. Montrer que la partition de R en R^+ et R^- ne dépend pas du choix de x dans C. Les éléments de R^+ seront dits positifs, ceux de R^- négatifs.

Si w appartient à W, on note $n(w)$ le cardinal de l'ensemble $\{r \in R^+ \mid w(r) \in R^-\}$. Pour $i \in \{1, \ldots, l\}$, on désigne par s_i l'élément de R^+ orthogonal à H_i. Soit $\Pi = \{s_1, \ldots, s_l\}$. On définit d'autre part une application, dite longueur, de W dans l'ensemble des entiers naturels de la manière suivante : on pose $l(\mathrm{Id}) = 0$ et si $w \in W \setminus \{\mathrm{Id}\}$, $l(w)$ est le plus petit entier k tel qu'il existe $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, l\}$ tels que l'on ait :

$$w = w_{i_1} \ldots w_{i_k}.$$

I.6.*b*. Soit H un mur de C et r l'élément de R^+ orthogonal à H. On considère H' un hyperplan appartenant à $\mathcal{H}$, distinct de H. Montrer que C et $w_r(C)$ sont d'un même côté de H' (Indication : on pourra utiliser une boule centrée sur H et ne rencontrant pas H').

En déduire que $w_r(r') \in R^+$ pour tout $r' \in R^+$ distinct de r.

I.6.*c*. Montrer : $\forall w \in W \quad \forall r \in \Pi \quad n(ww_r) = n(w) + \varepsilon_{r,w}$ avec : $\varepsilon_{r,w} = +1$ si $w(r) \in R^+$ et $\varepsilon_{r,w} = -1$ si $w(r) \in R^-$. En déduire : $\forall w \in W \quad n(w) \leqslant l(w)$.

I.6.*d*. Soit $w \in W$ et soit $w = w_{r_1} \ldots w_{r_k}$ une décomposition de w avec : $\forall i \in \{1, \ldots, k\} \quad r_i \in \Pi$. On suppose $k > n(w)$. Montrer qu'il existe un indice $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ tel que $w_{r_1} \ldots w_{r_j}(r_{j+1}) \in R^-$, puis qu'il existe un indice $i \in \{1, \ldots, j\}$ tel que $w_{r_i} \ldots w_{r_j}(r_{j+1}) \in R^-$ et $w_{r_{i+1}} \ldots w_{r_j}(r_{j+1}) \in R^+$. En déduire que : $w_{r_{i+1}} \ldots w_{r_{j+1}} = w_{r_i} \ldots w_{r_j}$, puis que $l(w) < k$.

I.6.*e*. Montrer que : $\forall w \in W \quad n(w) = l(w)$.

I.7. Montrer que si $w \in W$ vérifie $w(C) = C$, alors $w = \mathrm{Id}_E$.

Partie II

II.1. Soit x un élément non nul de E et $y \in E$. Montrer

$$w_x(y) = y - \frac{2(x \mid y)}{(x \mid x)} x.$$

II.2.*a*. Montrer : $\forall\, r \in \mathrm{R} \quad \exists\, w \in \mathrm{W} \quad \exists\, s \in \Pi \quad r = w(s)$.

II.2.*b*. Montrer que le sous-espace vectoriel de E engendré par Π est stable par W et en déduire que Π est une partie génératrice de E.

II.3. Soient r_1 et r_2 deux éléments distincts de Π.

II.3.*a*. Montrer, pour $i \in \{1, 2\}$ l'existence d'un élément b_i de $\bar{\mathrm{C}} \cap \mathrm{H}_{r_i}$ tel que b_i n'appartienne à aucun hyperplan $\mathrm{H} \in \mathcal{H} \setminus \{\mathrm{H}_{r_i}\}$.

II.3.*b*. b_1 et b_2 étant ainsi choisis, montrer que tout point du segment $[b_1, b_2]$ distinct de b_1 et b_2 appartient à C.

II.3.*c*. Soit L un hyperplan de E contenant l'intersection $\mathrm{H}_{r_1} \cap \mathrm{H}_{r_2}$. On suppose que L contient un élément x vérifiant : $(x \mid r_1) > 0$ et $(x \mid r_2) > 0$. Montrer que L rencontre C (on pourra prendre un vecteur $v \in \mathrm{L}^{\perp} \setminus \{0\}$ et considérer les signes de $(v \mid b_1)$ et $(v \mid b_2)$).

II.3.*d*. En considérant l'hyperplan $\mathrm{L} = w_{r_2}\left(\mathrm{H}_{r_1}\right)$ montrer que $(r_1 \mid r_2) \leqslant 0$.

II.4. Montrer que Π est une base de E (dans une relation de dépendance linéaire entre les s_i on pourra séparer les coefficients positifs et les coefficients négatifs).

II.5. Soit R^{++} l'ensemble des éléments de R dont toutes les coordonnées dans la base Π sont positives ou nulles. On fait l'hypothèse suivante : $\mathrm{R}^{++} \neq \mathrm{R}^{+}$. Si r appartient à $\mathrm{R}^{+} \setminus \mathrm{R}^{++}$, on note $\theta(r)$ la somme des coordonnées de r dans la base Π et on choisit r_0 dans $\mathrm{R}^{+} \setminus \mathrm{R}^{++}$ vérifiant : $\forall\, r \in \mathrm{R}^{+} \setminus \mathrm{R}^{++} \quad \theta(r_0) \leqslant \theta(r)$.

On pose
$$r_0 = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i s_i .$$

II.5.*a*. Soit $i \in \{1, \dots, l\}$ tel que $\lambda_i \geqslant 0$. En considérant $w_{s_i}(r_0)$ montrer que $(r_0 \mid s_i) \leqslant 0$.

II.5.*b*. Soit $v = \sum_i \lambda_i s_i$ la somme étant prise sur les indices i pour lesquels $\lambda_i \geqslant 0$. Montrer : $(v \mid v) \leqslant 0$ et en conclure que l'hypothèse faite était absurde et que donc $\mathrm{R}^{+} = \mathrm{R}^{++}$.

Soit J une partie de Π. Soit E_{J} le sous-espace vectoriel de E engendré par J, soit $\mathrm{R}_{\mathrm{J}} = \mathrm{R} \cap \mathrm{E}_{\mathrm{J}}$, W_{J} le sous-groupe de W engendré par $\{ w_r \mid r \in \mathrm{J} \}$ et $\mathrm{C}_{\mathrm{J}} = \{ x \in \mathrm{E}_{\mathrm{J}} \mid \forall r \in \mathrm{J} \ (r \mid x) > 0 \}$.

II.6. Montrer que R_{J} est un système radiciel dans E_{J}, que C_{J} en est une chambre et que les murs de C_{J} sont les $\mathrm{H}_r \cap \mathrm{E}_{\mathrm{J}}$ pour r parcourant J. En déduire que le groupe associé à ce système radiciel est isomorphe à W_{J}.

II.7. Soit $\mathrm{D}_{\mathrm{J}} = \{ w \in \mathrm{W} \mid \forall r \in \mathrm{J} \quad w(r) \in \mathrm{R}^{+} \}$. Montrer que pour tout élément w de W il existe un unique couple $(d_{\mathrm{J}}, w_{\mathrm{J}}) \in \mathrm{D}_{\mathrm{J}} \times \mathrm{W}_{\mathrm{J}}$ tel que $w = d_{\mathrm{J}}\, w_{\mathrm{J}}$. Montrer de plus que $l(w) = l(d_{\mathrm{J}}) + l(w_{\mathrm{J}})$.

II.8. Soit $\mathrm{K}_{\mathrm{J}} = \{ v \in \mathrm{E}_{\mathrm{J}}^{\perp} \mid \forall\, r \in \Pi \setminus \mathrm{J} \quad (v \mid r) > 0 \}$.

II.8.*a*. Montrer que K_J n'est pas vide.

II.8.*b*. Montrer que K_J est contenu dans l'adhérence de la chambre C.

II.8.*c*. Soient J et J' deux parties de Π. On suppose qu'il existe $w \in W$ vérifiant $w(K_J) \cap K_{J'} \neq \varnothing$. Montrer que $J = J'$.

II.9. Montrer : $W_J = \{ w \in W \mid w(K_J) \subset K_J \} = \{ w \in W \mid \forall x \in K_J \quad w(x) = x \}$.

II.10. Soit x un élément de E. Montrer qu'il existe une unique partie J de Π vérifiant : il existe $w \in W$ tel que $w(x) \in K_J$.

Partie III

Soit $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_l)$ une base de E. Une application f de E dans $\mathbb{R}$ est dite polynomiale s'il existe

$$P \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_l]$$

tel que $\forall (x_1, ..., x_l) \in \mathbb{R}^l \quad f(x_1 e_1 + ... + x_l e_l) = P(x_1, ..., x_l)$. Il est clair que cette définition est en fait indépendante de la base choisie, de même que le degré de P (qui sera donc appelé degré de f) ou que le fait que le polynôme P soit homogène (on dira alors que f est homogène). Les applications polynomiales forment une sous-algèbre de l'algèbre des applications de E dans $\mathbb{R}$. Cette sous-algèbre sera notée S ; elle est isomorphe à $\mathbb{R}[X_1, ..., X_l]$. Soit $S^+ = \{ f \in S \mid f(0) = 0 \}$.

On fait agir W sur S en posant : $\forall w \in W, \quad \forall p \in S, \quad \forall x \in E, \quad w(p)(x) = p(w^{-1}(x))$. Soit I la sous-$\mathbb{R}$-algèbre de S des éléments invariants par W : $I = \{ p \in S \mid \forall w \in W \quad w(p) = p \}$. Soit $I^+ = S^+ \cap I$ et soit SI^+ l'idéal de S engendré par I^+. Si $p \in S$, on pose

$$m(p) = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} w(p).$$

III.1. Montrer que si p appartient à S alors $m(p)$ appartient à I et que si p appartient à S^+ alors $m(p)$ appartient à I^+.

III.2. Montrer qu'il existe une partie finie de I formée de fonctions polynomiales homogènes et engendrant l'idéal SI^+ (on admettra que S vérifie la propriété suivante : Soit J un idéal de S et G une partie génératrice de J alors G contient une partie finie génératrice de J). On se fixe une telle partie $\{ I_1, ..., I_s \}$, que l'on suppose de plus minimale pour cette propriété. On pose $d_i = \deg(I_i)$ pour i variant de 1 à s.

III.3. Montrer : $\forall f \in I \quad \exists P \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_s] \quad f = P(I_1, ..., I_s)$. (On se ramènera à montrer le résultat pour f homogène et on fera une récurrence sur le degré de f.)

III.4. Soient $f_1, ..., f_k$ des éléments de I tels que f_1 n'est pas dans l'idéal de I engendré par $f_2, ..., f_k$. Soient $p_1, ..., p_k$ des éléments homogènes de S. On cherche à démontrer par récurrence sur le degré p_1 la propriété suivante :

$$p_1 f_1 + \dots + p_k f_k = 0 \Rightarrow p_1 \in SI^+.$$

III.4.*a*. Montrer que f_1 n'est pas dans l'idéal de S engendré par $f_2, \dots, f_k$ et conclure dans le cas où p_1 est constant.

III.4.*b*. On suppose désormais $\deg(p_1) > 0$. Soit $r \in \mathrm{R}$ et h_r l'élément de S défini par : $\forall x \in \mathrm{E}$ $h_r(x) = (r|x)$. Montrer que h_r divise dans S $w_r(p_i) - p_i$ pour i variant de 1 à k. On posera

$$w_r\ (p_i) \ - \ p_i \ = \ h_r\ q_i\,.$$

III.4.*c*. Montrer $q_1 f_1 + \dots + q_k f_k = 0$.

III.4.*d*. En utilisant l'hypothèse de récurrence, montrer que :

$\forall w \in \mathrm{W}$ $\quad w(p_1) - p_1 \in \mathrm{SI}^+$ et en déduire que p_1 appartient à SI^+.

III.5. Soit :

$$d \in \mathbb{N}\,,\ \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_s] \qquad \mathrm{P} = \sum_{(k_1,\dots,k_s) \in \mathbb{N}^s} a_{k_1,\dots,k_s} \mathrm{X}_1^{k_1} \dots \mathrm{X}_s^{k_s}.$$

On suppose vérifiées les trois conditions :

(*a*) $\mathrm{P} \neq 0$; (*b*) $\mathrm{P}(\mathrm{I}_1, \dots, \mathrm{I}_s) = 0$; (*c*) si $a_{k_1,\dots,k_s}$ est non nul, alors $k_1 d_1 + \dots + k_s d_s$ est égal à d. Pour $i = 1, \dots, s$ soit $p_i = \dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{X}_i}(\mathrm{I}_1, \dots, \mathrm{I}_s)$. Soit K l'idéal de I engendré par $\{p_1, \dots, p_s\}$ et on suppose les notations choisies de telle manière que $\{p_1, \dots, p_m\}$ soit une partie génératrice minimale de cet idéal.

III.5.*a*. Montrer que les applications polynomiales p_i sont homogènes.

III.5.*b*. Montrer qu'il existe pour $i > m$ et $1 \leqslant j \leqslant m$ des applications polynomiales $q_{i,j}$ homogènes de degré $\deg(\mathrm{I}_j) - \deg(\mathrm{I}_i)$ telles que :

$$\forall\, i > m \qquad p_i = \sum_{j=1}^{m} q_{i,j}\, p_j\,.$$

III.5.*c*. On se fixe une base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_l)$ de E et si f est élément de S on note $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ la k-ième dérivée partielle de l'application $(x_1, \dots, x_l) \longmapsto f(x_1 e_1 + \dots + x_l e_l)$.

Montrer pour $k = 1, \dots, l$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \left(\frac{\partial \mathrm{I}_i}{\partial x_k} + \sum_{j=m+1}^{s} q_{j,i} \frac{\partial \mathrm{I}_j}{\partial x_k} \right) = 0$$

et en déduire :

$$\forall\, k \in \{1, \dots, l\} \quad \frac{\partial \mathrm{I}_1}{\partial x_k} + \sum_{j=m+1}^{s} q_{j,1} \frac{\partial \mathrm{I}_j}{\partial x_k} \in \mathrm{SI}^+$$

III.5.*d.* Montrer : il existe des éléments $R_1, \dots, R_s$ de S^+ tels que

$$d_1 I_1 + \sum_{j=m+1}^{s} d_j\, q_{j,1}\, I_j = \sum_{i=1}^{s} I_i R_i .$$

III.5.*e.* Montrer que ceci contredit la définition de $I_1, \dots, I_s$.

III.6. Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_s]$ tel que $P(I_1, \dots, I_s) = 0$. Montrer que $P = 0$ (c'est-à-dire que I est isomorphe à $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_s]$).

III.7. Soit $I'_1, \dots, I'_t$ une autre partie finie de I formée de fonctions polynomiales homogènes, engendrant l'idéal SI^+ et minimale pour cette propriété. Montrer que $s = t$.

Partie IV

Soit N le cardinal de R^+.

IV.1. Montrer qu'il existe un unique élément w_0 de W de longueur N et que : $\forall\, w \in W \quad l(w) \leqslant N$.

A toute partie J de Π on associe les deux polynômes :

$$P_J(t) = \sum_{w \in W_J} t^{l(w)} \qquad \text{et} \qquad T_J(t) = \sum_{w \in D_J} t^{l(w)} \qquad (D_J \text{ est défini en II.7})$$

IV.2. Montrer : $P_\Pi(t) = P_J(t)\, T_J(t)$ et en déduire : ($|J|$ désignant le cardinal de la partie J)

$$\sum_{J \subset \Pi} (-1)^{|J|} \frac{P_\Pi(t)}{P_J(t)} = t^N .$$

IV.3. Soit F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{H}$ une famille finie d'hyperplans de F. On introduit sur F la relation d'équivalence suivante : $x \,\mathcal{R}\, y$ signifie : pour tout hyperplan H de $\mathcal{H}$, ou bien x et y sont tous deux sur H, ou bien x et y appartiennent à un même demi-espace ouvert limité par H. Pour i entier naturel on désigne par n_i le nombre de classes d'équivalence engendrant dans F un sous-espace vectoriel de dimension i. Montrer que :

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i n_i = (-1)^{\dim F}$$

(On pourra faire une récurrence sur le nombre d'hyperplans).

Si J est une partie de Π et w un élément de W, on note $n_J(w)$ le nombre de classes à gauche vW_J dans W telles que $wvW_J = vW_J$.

IV.4.*a.* Soit v un élément de W. Montrer que $wvW_J = vW_J$ si et seulement si $wv(K_J) = v(K_J)$ (cf notations de II.8.) et que dans ce cas $v(K_J)$ est contenu dans $\mathrm{Ker}(w - \mathrm{Id}_E)$.

IV.4.*b*. En appliquant les résultats de la question IV.3 à $F = \mathrm{Ker}\,(w - \mathrm{Id}_E)$ montrer que :

$$\sum_{J \subset \Pi} (-1)^{|J|}\, n_J\,(w) = \text{dét}\,(w)\,.$$

IV.5. Soit f un élément de S vérifiant : $\forall\, w \in W \quad w\,(f) = \text{dét}\,(w) f$. Montrer qu'il existe un élément p de I tel que

$$f = p \prod_{r \in R^+} h_r$$

(se reporter à III.4 pour la signification de h_r).

Soit S_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales homogènes de degré n, soit

$$I_n = I \cap S_n\,, \qquad A_n = \{ f \in S_n \mid \forall\, w \in W \quad w(f) = \text{dét}(w) f \}$$

Soit U_n l'application linéaire de S_n dans S_n définie par : (cf III) $U_n(f) = m(f)$. Pour un élément w de W on désigne par $\chi_n\,(w)$ la trace de l'application linéaire $f \longmapsto w\,(f)$ de S_n dans S_n.

IV.6. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \dim A_n = \dim I_{n-N} \quad (= 0 \;\text{ si }\; n < N)$ et $\dim I_n = \mathrm{tr}\,(U_n)$.

IV.7. Montrer :

$$\forall\, w \in W \qquad \sum_{v \in W,\, v w v^{-1} \in W_J} \chi_n\,(v w v^{-1}) = \chi_n\,(w)\; n_J\,(w)\; |W_J|$$

et en déduire

$$\sum_{J \subset \Pi} \frac{(-1)^{|J|}}{|W_J|} \sum_{v \in W,\, v w v^{-1} \in W_J} \chi_n\,(v w v^{-1}) = \chi_n\,(w)\; \text{dét}\,(w).$$

IV.8. En sommant l'identité précédente sur $w \in W$, montrer que :

$$\sum_{J \subset \Pi} (-1)^{|J|} \dim\,(I_{J,n}) = \dim A_n.$$

où

$$I_{J,n} = \{ f \in S_n \mid \forall\, w \in W_J \qquad w\,(f) = f \}.$$

IV.9. Soient $d_1, \ldots, d_s$ les entiers naturels définis en III.2.

On définit le polynôme $$Q\,(t) = \prod_{i=1}^{s} \left(\frac{t^{d_i} - 1}{t - 1} \right)$$

et de même à toute partie J de Π on associe un polynôme $Q_J(t)$ défini de la même manière, mais pour le système radiciel R_J dans E_J.

IV.9.*a.* Montrer que le coefficient de t^n dans le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction

$$t \longmapsto \frac{1}{(1-t)^s\, Q(t)}$$

est $\dim(I_n)$.

IV.9.*b.* On admettra à partir de maintenant que $s = l$. Montrer que :

$$\sum_{J \subset \Pi} (-1)^{|J|} \frac{Q(t)}{Q_J(t)} = t^N$$

IV.10.*a.* Soit J une partie de Π et w un élément de W_J. Montrer que la longueur de w est la même que l'on considère w comme élément du groupe W associé au système radiciel R ou du groupe W_J associé à R_J.

IV.10.*b.* Montrer que $Q = P_\Pi$ (utiliser un raisonnement par récurrence).

RAPPORT SUR L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

Cette année le problème de Mathématiques Générales proposait l'étude des fonctions polynômes invariantes par un groupe d'isométries engendré par des symétries orthogonales, suivant les méthodes développées par C. CHEVALLEY ("Invariants of finite groups generated by reflections", Amer. Journ. of Math., t. LXXVII (1955)) et L. SOLOMON ("Invariants of finite reflection groups", Nagoya Math. Journal, t. XXII (1963)).

Les parties I et II, consacrées à l'étude des groupes finis engendrés par des symétries, utilisaient principalement des méthodes géométriques et topologiques, tandis que les parties III et IV étaient de nature plus algébrique.

Malgré l'absence dans les parties I et II de questions réellement très difficiles, leur niveau assez soutenu et leur nature géométrique et topologique ont constitué un obstacle insurmontable pour bon nombre de candidats, ce qui explique l'abondance de notes faibles. L'absence de vision géométrique et l'imprécision des connaissances en Topologie expliquent pour une grande partie ces mauvais résultats.

Si le manque de connaissances en Géométrie a pour origine le peu d'intérêt rencontré dans l'enseignement secondaire et supérieur pendant un certain nombre d'années par cette partie essentielle des Mathématiques, on ne peut que s'étonner du peu de familiarité des candidats avec la Topologie la plus élémentaire, celle de R^n, qu'ils ont abordé déjà depuis quatre ans lorsqu'ils passent l'agrégation. Des erreurs grossières sont rencontrées dans la presque totalité des copies : c'est ainsi que 90 % de celles qui abordent la question I.3° prétendent que l'intersection de deux connexes est connexe ! On ne saurait trop conseiller aux candidats de réfléchir sur les notions les plus élémentaires de la Topologie et de la Géométrie de R^n (ouverts, fermés, connexes, convexes, compacts, sous-espaces, etc.) avant de s'intéresser aux "pathologies", particulièrement abondantes en Topologie.

PARTIE I

La question I.1 est traitée correctement dans un très petit nombre de copies, les arguments se limitant en général à : "un groupe engendré par un nombre fini d'éléments d'ordre fini ne saurait être que fini" (avec parfois démonstration à l'appui !) ou bien : "on a un morphisme de W dans le groupe des permutations de R" (sans vérifier l'injectivité de ce morphisme). Les questions I.2 et I.3 sont particulièrement révélatrices de mauvaises connaissances en Topologie. Dans I.2, une grande partie des candidats utilisent sans nécessité le théorème de Zorn (et souvent sans en vérifier les hypothèses). Dans I.3, la convexité de chacun des demi-espaces n'est pas remarquée (elle seule permettait de faire un raisonnement correct).

Dans I.4, les démonstrations complètes sont rares, bien que certains candidats aient une idée assez juste de la situation. Certains utilisent le théorème de Baire (dont on pouvait très bien se passer) mais en oubliant de mentionner l'hypothèse essentielle de dénombrabilité.

La presque totalité des candidats ne voient absolument pas l'intérêt de la question I.5.a (la plus difficile de la partie I), confondant allègrement mur de la chambre et hyperplan quelconque de la famille. Evidemment, être du même côté que C par rapport à tout mur de C n'est pas a priori la même chose qu'être du même côté que C par rapport à tout hyperplan de la famille. Signalons pour l'anecdote que certains candidats refusent toute formulation d'aspect intuitif même consacrée par l'usage comme "être du même côté d'un hyperplan" sous prétexte qu'on ne leur en a pas donné une définition dans l'énoncé ! Cependant des candidats parviennent heureusement à une démonstration correcte par élimination successive des hyperplans non murs pour délimiter C.

La question I.5.c montre que beaucoup de candidats ignorent ce qu'est l'image d'une symétrie orthogonale par un automorphisme intérieur (ou transmuée) : $w\, s_H\, w^{-1} = s_{w(H)}$.

Les questions I.6 et I.7 plus algébriques sont abordées dans un certain nombre de copies et traitées avec assez de réussite.

PARTIE II

Alors que la question II.2.a est très rarement résolue, sa conséquence II.2.b est souvent bien faite. Les questions de II.3 sont fréquemment abordées mais de manière très imprécise. La remarque essentielle qu'une réunion finie de fermés d'intérieurs vides est encore d'intérieur vide n'est pas faite, et II.3.b donne lieu à des raisonnements trop vagues alors que l'étude du signe de $(tb_1 + (1-t)b_2, r)$ permet de conclure.

La question très classique II.4 (famille de vecteurs formant deux à deux un angle obtus) n'est presque jamais abordée, sans doute par manque de familiarité avec les espaces euclidiens.

Les questions de II.5, assez faciles, sont rarement traitées correctement. Les candidats qui abordent la question II.6 (la plus difficile de cette partie) se contentent en général d'affirmer que tout est évident. On en voit beaucoup affirmer que l'intersection d'une partie génératrice de E avec E_J ne peut être qu'une partie génératrice de E_J (sic). La suite de la partie II n'est presque jamais entamée.

PARTIE III

Signalons dans III.1 les habituelles confusions entre l'indice de sommation (muet) et l'élément de W par lequel on recherche l'invariance.

Faute d'avoir fait la remarque essentielle qu'un polynôme invariant est somme de polynômes homogènes invariants, les candidats n'ont pu en général traiter III.2 et III.3 correctement. Dans III.4.a, on relève souvent une confusion entre idéal de I et idéal de S. La question III.4.c, qui n'est autre que l'intégrité de S, donne quelque fois lieu à des développements longs et peu concluants. Pour III.4.d, il fallait évidemment observer que SI^+ est stable par W.

Les questions III.5 et III.6 sont parfois abordées avec quelque bonheur et plusieurs candidats pensent à utiliser le théorème d'Euler.

La partie IV est ignorée en général. Seuls quelques rares candidats essaient (en général sans succès) de grapiller quelques points dans IV.1 ou IV.3.

En conclusion, ce problème long et de difficulté soutenue a révélé chez de trop nombreux candidats de graves lacunes à des niveaux élémentaires que ce soit en Algèbre, en Géométrie ou en Topologie. Espérons cependant que cette épreuve pourra servir de révélateur aux candidats des agrégations futures qui y verront l'utilité de préciser leurs connaissances de base.

NOTES (SUR 60) OBTENUES PAR LES CANDIDATS A L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES GENERALES

de 0 à 4	....	373
de 5 à 9	....	122
de 10 à 14	....	99
de 15 à 19	....	87
de 20 à 24	....	55
de 25 à 29	....	44
de 30 à 34	....	40
de 35 à 39	....	30
de 40 à 44	....	23
de 45 à 49	....	21
de 50 à 54	....	18
de 55 à 60	....	9