ministère de l'éducation

direction des personnels enseignants
de lycées

Agrégation
mathématiques

Rapport présenté par Monsieur RAMIS
Inspecteur général de l'Éducation nationale,
Président du jury

1980

présentation

1. COMPOSITION DU JURY

M.	RAMIS	*Inspecteur général de l'Éducation nationale, président*
M.	PERONNY	*Inspecteur général de l'Éducation nationale, vice-président*
Mme	AMICE	*Professeur à l'université de Paris VII*
M.	ANDLER	*Assistant à l'université de Paris VII*
M.	ANDRE	*Maître assistant à l'université de Nancy I*
M.	BAYART	*Professeur au lycée Thiers à Marseille*
M.	BECKER	*Professeur au lycée Montaigne à Bordeaux*
M.	BETHOUX	*Professeur à l'université de Lyon I*
M.	BLOCH	*Professeur au lycée Louis-le-Grand à Paris*
M.	BRIANÇON	*Professeur au lycée Condorcet à Paris*
M.	BROUÉ	*Chargé de recherches au C.N.R.S.*
M.	CARMONA	*Professeur à l'université d'Aix-Marseille II*
M.	CHEVALLET	*Professeur au lycée Henri IV à Paris*
M.	CUILLIERIER	*Professeur au lycée Montaigne à Bordeaux*
M.	DURREMEYER	*Maître assistant à l'université de Rennes I*
M.	FOURT	*Maître assistant à l'université de Clermont-Ferrand II*
M.	GENET	*Professeur à l'université des Pays de l'Adour*
M.	GOSTIAUX	*Professeur au lycée St Louis à Paris*
M.	HALBERSTADT	*Maître assistant à l'université de Paris VI*
M.	HEE	*Maître assistant à l'université de Paris XI*
M.	HEINICH	*Maître assistant à l'université de Paris*
M.	HELMER	*Professeur au lycée Clémenceau à Reims*
Mme	LEBAUD	*Professeur à l'Institut national des sciences appliquées de Rennes*
M.	LEBAUD	*Maître assistant à l'université de Rennes I*
M.	LEDRAPPIER	*Chargé de rechrches au C.N.R.S.*
M.	LOMBARD	*Maître assistant à l'université de Nancy I*
M.	MAILLIARD	*Assistant à l'université de Paris VII*
M.	MIGNOT	*Professeur à l'université de Rennes I*
M.	MOLLIER	*Professeur au lycée Louis-le-Grand à Paris*
M.	MONASSE	*Professeur au lycée Louis-le-Grand à Paris*
M.	PAVAGEAU	*Professeur au lycée Pothier à Orélans*
M.	RAYMOND	*Professeur au lycée Faidherbe à Lille*
M.	ROSEAU	*Professeur à l'université de Paris VI*
M.	SPECTOR	*Professeur à l'université d'Orléans*
M.	STERN	*Professeur à l'université de Caen*
M.	SURATTEAU	*Professeur au lycée Pothier à Orléans*
M.	THEBAULT	*Professeur au lycée Chateaubriand à Rennes*
M.	THIBAULT	*Professeur à l'université P. Sabatier à Toulcuse*
M.	VAN DER OORD	*Professeur au lycée Chateaubriand à Rennes*
M.	VANDECASTEELE	*Professeur au lycée Baggio à Lille*
M.	VELU	*Professeur à l'université de Caen*
M.	VIALLARD	*Maître assistant à l'université de Rennes*
M.	WIRTH	*Professeur au lycée St Louis à Paris*

2. CALENDRIER DES ÉPREUVES

2.1 Épreuves écrites

- Elles ont eu lieu aux dates suivantes :
  Mathématiques générales : 6 mai de 8 à 14 heures
  Analyse : 7 mai de 8 à 14 heures
  Mathématiques appliquées : 9 mai de 8 à 14 heures.
- La liste d'admissibilité a été affichée le 20 juin au lycée Montaigne et 34 rue de Châteaudun.

2.2. Épreuves orales

Elles se sont déroulées du 27 juin au 20 juillet au lycée Montaigne à Paris.

Les résultats définitifs ont été publiés le 21 juillet.

3. STATISTIQUES DIVERSES

3.1 Résultats généraux

Postes mis au concours	82
Candidats inscrits	1 826
Candidats présents à la première épreuve	1 430
Candidats présents à la dernière épreuve	1 279
Admissibles (*étrangers)	225 + 1 *
Admis	82 + 1 *
Susceptibles d'être admis après démissions	2

Moyenne sur 20 des points obtenus par :

Le premier admissible	20
Le dernier admissible	7
Le premier agrégé	18,5
Le dernier agrégé	10

3.2 Répartition des notes d'écrit

Le tableau ci-dessous indique le nombre N(m) de candidats qui ont obtenu aux épreuves écrites une moyenne, sur 20, supérieure (au sens large) à m.

m	18,5	15	12,5	10	9	8	7	6,5
N(m)	4	15	40	83	126	179	226	259

m	6	5	4	2
N(m)	305	386	497	813

3.3 Répartition entre les options

	ANALYSE NUMÉRIQUE	MÉCANIQUE	PROBABILITÉS
Inscrits	806	225	795
Admissibles	89	15	122
Admis	28	7	47 + 1 *

3.4 Situation universitaire des candidats

Dans le tableau suivant, les notations U, J, C, F, T, correspondent aux candidats des E.N.S. : ULM, JOURDAN, ST CLOUD, FONTENAY et E.N.S.E.T. Les autres abréviations sont les suivantes :

E . . . . Étudiants
I.P.E.S. . . . . Élèves des I.P.E.S. et ex élèves-professeurs
C.P.R. . . . . Stagiaires de C.P.R.
P.C. . . . . Certifiés, bi-admissibles ou certifiés stagiaires
A . . . . Assistants
C.O. . . . . Coopérants ou détachés
S.N. . . . . Professeurs au service militaire, en congé, en sursis, ou en disponibilité
D . . . . A.E., P.E.G.C., Instituteurs, M.I-S.E., divers
M.A. . . . . Maîtres auxiliaires
P . . . . Enseignement privé
I . . . . Ingénieurs

(L'astérisque correspond à des candidats étrangers)

CANDIDATS	U	J	C	F	T	E	IPES	CPR	PC
Inscrits	23 + 1 *	29	18	31	40	268	116	201	643
Admissibles	22 + 1 *	24	13	16	30	28	28	17	25
Admis	17 + 1 *	13	12	4	11	8	6	4	5

CANDIDATS	A	C.O.	S.N.	M.A.	P	D	I	TOTAL
Inscrits	15	75	59	57	180	67	3	1826
Admissibles	3	1	11	0	5	0	2	225 + 1 *
Admis	0	0	2	0	0	0	0	82 + 1 *

3.5 Répartition suivant les centres d'écrit

CENTRES \ CANDIDATS	INSCRITS	AYANT COMPOSÉ AUX TROIS ÉPREUVES	ADMISSIBLES	ADMIS
Ajaccio	5	1	0	0
Aix-Marseille	67	39	6	1
Amiens	56	36	1	0
Besançon	23	19	2	1
Bordeaux - Pau	38	28	3	0
Caen	26	15	2	2
Clermont	21	14	0	0
Dijon	29	21	6	1
Grenoble	91	73	5	1
Lille	148	103	6	0
Limoges	15	11	0	0
Lyon - St Étienne	80	61	6	0
Montpellier	34	23	1	0
Nancy - Metz	67	49	3	1
Nantes	60	41	4	1
Nice	59	46	4	1
Orélans - Tours	36	25	1	0
Paris - Créteil - Versailles	583	411	156	69 + 1 *
Poitiers	17	14	2	0
Reims	22	15	1	0
Rennes - Brest	43	26	6	2
Rouen	59	50	2	0
Strasbourg - Mulhouse	37	28	1	0
Toulouse	60	37	4	2
Alger - Rabat - La Réunion - Cotonou - Abidjan...	150	84	4	0

écrit

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

DURÉE : 6 heures

INTRODUCTION

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2, K un corps commutatif et 1 l'unité de K; $M_n(K)$ est la K-algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K, que l'on note aussi M_n, de même que l'on sous-entend K dans les définitions suivantes :

i. GL_n, ensemble des éléments inversibles de M_n ;

ii. L_n, ensemble des éléments de GL_n dont chaque colonne contient un et un seul terme non nul;

iii. S_n (resp. Δ_n) formé des éléments de L_n dont tous les coefficients non nuls valent 1 (resp. sont situés sur la diagonale principale).

I_n désigne l'unité de M_n et, pour tout $A \in M_n$, on note ${}^tA$ (resp. $\mathrm{tr}(A)$) la transposée de A (resp. sa trace). Si E est un K-espace vectoriel de dimension finie, L(E) est la K-algèbre de ses endomorphismes et id_E l'unité de L(E); pour tout $f \in L(E)$, on note $\mu(f)$ [resp. $\chi(f)$] le polynôme minimal de f (resp. son polynôme caractéristique). Par ailleurs, si σ est un élément du groupe Σ_n des permutations de $\{1, \ldots, n\}$, $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de σ et A_σ la matrice carrée d'ordre n dont, pour $i, j = 1, \ldots, n$, l'élément (i, j) vaut 1 si $i = \sigma(j)$ et 0 sinon.

On rappelle enfin que tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel est canoniquement muni d'une structure d'espace affine réel et, si il est de dimension finie, d'une topologie naturelle, celle définie par l'une quelconque de ses normes.

Les cinq parties sont dépendantes, mais on peut traiter chacune en admettant les résultats de celles qui précèdent.

1° *a.* Vérifier que l'application $\sigma \dashrightarrow A_\sigma$ est un homomorphisme de Σ_n dans GL_n et une bijection de Σ_n sur S_n.

b. Établir que tout élément A de L_n s'écrit, de manière unique, sous la forme $A = DA_\sigma$, $\sigma \in \Sigma_n$ et $D \in \Delta_n$, puis que L_n est un sous-groupe de GL_n. Δ_n (resp. S_n) est-il un sous-groupe distingué de L_n ?

c. Déduire de ce qui précède, à l'aide d'une méthode de dénombrement que l'on détaillera, que pour tout nombre premier $q \geqslant 2$ et tout entier naturel m, $m!(q-1)^m$ divise $(q^m - 1)(q^m - q) \ldots (q^m - q^{m-1})$.

2° On suppose, dans cette question seulement, que K est algébriquement clos et on désigne par p la caractéristique de K. Soient E un K-espace vectoriel de dimension n et $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E; pour tout $\sigma \in \Sigma_n$, on note f_σ l'endomorphisme de E dont la matrice dans B est A_σ.

a. Combien vaut le déterminant de f_σ ?

b. Dans le cas particulier où σ est un cycle d'ordre n, établir que $\mu(f_\sigma)(T) = T^n - 1$; combien vaut alors $\chi(f_\sigma)(T)$? Trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur n et p, pour que f_σ soit diagonalisable; lorsque cette condition est vérifiée, expliciter $P \in GL_n$ et $D \in \Delta_n$ tels que $A_\sigma = PDP^{-1}$.

c. σ est maintenant un élément quelconque de Σ_n, déterminer $\mu(f_\sigma)$ et $\chi(f_\sigma)$ en fonction de σ.

3° On conserve les notations de 2°, mais K désigne un corps quelconque de caractéristique nulle; Λ est la droite vectorielle de E engendrée par $e_1 + \ldots + e_n$ et H l'hyperplan d'équation $x_1 + \ldots + x_n = 0$. Un sous-espace E' de E est dit Σ-stable lorsque $f_\sigma(E') \subset E'$ pour tout $\sigma \in \Sigma_n$.

a. Vérifier que Λ et H sont tous deux Σ-stables et supplémentaires dans E, montrer que le projecteur sur Λ parallèlement à H est :

$$p_\Lambda = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} f_\sigma .$$

b. Soit v un élément non nul de H, démontrer que $\{f_\sigma(v) \mid \sigma \in \Sigma_n\}$ est une partie génératrice de H (on pourra utiliser le fait que deux au moins des coordonnées de v sont distinctes).

c. Déterminer tous les sous-espaces Σ-stables de E.

4° Soit $\Gamma = \{f \in L(E) \mid \forall \sigma \in \Sigma_n \quad f \circ f_\sigma = f_\sigma \circ f\}$, démontrer que Γ est la K-sous-algèbre de L(E) engendrée par p_Λ, c'est-à-dire la plus petite sous-algèbre de L(E) contenant id_E et p_Λ.

DEUXIÈME PARTIE

Les notations sont celles de la première partie, mais K est ici le corps des nombres réels. On note $\widetilde{\Omega}_n$ l'ensemble de toutes les matrices $A = (a_{i,j})$ appartenant à M_n, telles que les $2n$ sommes

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}, \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

soient toutes égales entre elles, et on désigne alors par $s(A)$ leur valeur commune.

On dit que A est équilibrée (d'ordre n) lorsque A appartient à $\widetilde{\Omega}_n$, a tous ses coefficients $\geqslant 0$ et vérifie $s(A) = 1$, et on note Ω_n l'ensemble des matrices équilibrées d'ordre n.

ERRATA

page 8 lire

PREMIÈRE PARTIE

1° *a.* Vérifier que l'application $\sigma \longmapsto A_\sigma$ est un homomorphisme de Σ_n dans GL_n et une bijection de Σ_n sur S_n.

b. Établir que tout élément A de L_n s'écrit, de manière unique, sous la forme $A = DA_\sigma$, $\sigma \in \Sigma_n$ et $D \in \Delta_n$, puis que L_n est un sous-groupe de GL_n. Δ_n (resp. S_n) est-il un sous-groupe distingué de L_n ?

c. Déduire de ce qui précède, à l'aide d'une méthode de dénombrement que l'on détaillera, que pour tout nombre premier $q \geqslant 2$ et tout entier naturel m, $m!(q-1)^m$ divise $(q^m-1)(q^m-q)\dots(q^m-q^{m-1})$.

2° On suppose, dans cette question seulement, que K est algébriquement clos et on désigne par p la caractéristique de K. Soient E un K-espace vectoriel de dimension n et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E; pour tout $\sigma \in \Sigma_n$, on note f_σ l'endomorphisme de E dont la matrice dans B est A_σ.

a. Combien vaut le déterminant de f_σ ?

b. Dans le cas particulier où σ est un cycle d'ordre n, établir que $\mu(f_\sigma)(T) = T^n - 1$; combien vaut alors $\chi(f_\sigma)(T)$? Trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur n et p, pour que f_σ soit diagonalisable; lorsque cette condition est vérifiée, expliciter $P \in GL_n$ et $D \in \Delta_n$ tels que $A_\sigma = PDP^{-1}$.

c. σ est maintenant un élément quelconque de Σ_n, déterminer $\mu(f_\sigma)$ et $\chi(f_\sigma)$ en fonction de σ.

3° On conserve les notations de 2°, mais K désigne un corps quelconque de caractéristique nulle; Λ est la droite vectorielle de E engendrée par $e_1 + \dots + e_n$ et H l'hyperplan d'équation $x_1 + \dots + x_n = 0$. Un sous-espace E′ de E est dit Σ-stable lorsque $f_\sigma(E') \subset E'$ pour tout $\sigma \in \Sigma_n$.

a. Vérifier que Λ et H sont tous deux Σ-stables et supplémentaires dans E, montrer que le projecteur sur Λ parallèlement à H est :

$$p_\Lambda = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in \Sigma_n} f_\sigma .$$

b. Soit v un élément non nul de H, démontrer que $\{f_\sigma(v) \mid \sigma \in \Sigma_n\}$ est une partie génératrice de H (on pourra utiliser le fait que deux au moins des coordonnées de v sont distinctes).

c. Déterminer tous les sous-espaces Σ-stables de E.

4° Soit $\Gamma = \{f \in L(E) \mid \forall \sigma \in \Sigma_n \quad f \circ f_\sigma = f_\sigma \circ f\}$, démontrer que Γ est la K-sous-algèbre de L(E) engendrée par p_Λ, c'est-à-dire la plus petite sous-algèbre de L(E) contenant id_E et p_Λ.

DEUXIÈME PARTIE

Les notations sont celles de la première partie, mais K est ici le corps des nombres réels. On note $\widetilde{\Omega}_n$ l'ensemble de toutes les matrices $A = (a_{i,j})$ appartenant à M_n, telles que les $2n$ sommes

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}, \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

soient toutes égales entre elles, et on désigne alors par $s(A)$ leur valeur commune.

On dit que A est équilibrée (d'ordre n) lorsque A appartient à $\widetilde{\Omega}_n$, a tous ses coefficients $\geqslant 0$ et vérifie $s(A) = 1$, et on note Ω_n l'ensemble des matrices équilibrées d'ordre n.

.../.

page 20 (début de page) lire

On rappelle que si s est un nombre réel, $s \geqslant 1$, on note L^s l'espace des classes τ de fonctions complexes mesurables définies sur $[0, 1]$ et telles que pour toute fonction f de la classe τ, on ait :

$$\int |f|^s \, d\mu < \infty.$$

Comme c'est l'usage, on se permettra dans toute la suite de noter par une même lettre une classe de fonctions et un représentant quelconque de cette classe; c'est ainsi qu'on définit simplement la norme d'un élément f de L^s par :

$$\|f\|_s = \left(\int |f|^s \, d\mu\right)^{\frac{1}{s}}.$$

1° *a.* Soient $f \in \mathrm{L(E)}$ et A la matrice de f dans B, vérifier que $\mathrm{A} \in \widetilde{\Omega}_n$ si, et seulement si, chacun des deux sous-espaces Λ et H est stable par f; en déduire que $\widetilde{\Omega}_n$ est une $\mathbb{R}$-sous-algèbre de M_n et déterminer sa dimension. L'application $\mathrm{A} \longmapsto s(\mathrm{A})$ est-elle un morphisme d'algèbres?

b. Montrer que Ω_n est convexe, compact et stable par multiplication; trouver toutes les matrices d'ordre n qui sont à la fois équilibrées et orthogonales.

2° Expliciter tous les idéaux bilatères de $\widetilde{\Omega}_n$ et déterminer son centre.

3° Démontrer que $\widetilde{\Omega}_n$ est le sous-espace vectoriel de M_n engendré par S_n (on pourra raisonner par récurrence et utiliser la première partie).

TROISIÈME PARTIE

On se propose de montrer que Ω_n est l'enveloppe convexe de S_n. Pour tout $\mathrm{X} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $\overline{\mathrm{X}} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ l'unique élément de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les propriétés suivantes :

i. $\bar{x}_1 \geqslant \ldots \geqslant \bar{x}_n$;

ii. il existe un $\tau \in \Sigma_n$ tel que $\overline{\mathrm{X}} = \mathrm{XA}_\tau$.

De plus, si $\mathrm{Y} = (y_1, \ldots, y_n)$ est un autre élément de $\mathbb{R}^n$, la notation $\mathrm{Y} \lhd \mathrm{X}$ signifie que :

$$\bar{y}_1 + \ldots + \bar{y}_k \leqslant \bar{x}_1 + \ldots + \bar{x}_k \quad \text{pour } k = 1, \ldots, n$$

et on note $\mathrm{Y} < \mathrm{X}$ lorsqu'on a simultanément :

i. $\mathrm{Y} \lhd \mathrm{X}$;

ii. $\bar{y}_1 + \ldots + \bar{y}_n = \bar{x}_1 + \ldots + \bar{x}_n$.

Enfin, $[\mathrm{X}]$ désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble des XA_σ, $\sigma \in \Sigma_n$.

1° *a.* La relation $\mathrm{Y} < \mathrm{X}$ définit-elle un ordre sur $\mathbb{R}^n$?

b. Soient $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r, \mathrm{Y}$ des éléments de $\mathbb{R}^n$, montrer que Y appartient à l'enveloppe convexe de $\{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r\}$ si, et seulement si, pour toute forme linéaire Φ sur $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\Phi(\mathrm{Y}) \leqslant \max(\Phi(\mathrm{X}_1), \ldots, \Phi(\mathrm{X}_r)).$$

c. En déduire que $[\mathrm{X}]$ est exactement formé de tous les $\mathrm{Y} \in \mathbb{R}^n$ qui vérifient $\mathrm{Y} < \mathrm{X}$.

2° Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})$ un élément de Ω_n, distinct de I_n ; démontrer qu'il existe un $\sigma \in \Sigma_n$, $\sigma \neq \mathrm{id}$, tel que :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \; (\sigma(k) \neq k \Rightarrow a_{\sigma(k), k} \neq 0)$$

(on pourra raisonner par l'absurde et utiliser le polynôme caractéristique de A).

3° Soit M un élément de M_n.

a. On suppose que, pour tout $\sigma \in \Sigma_n$, $\sigma \neq \mathrm{id}$, on a $\mathrm{tr(MA_\sigma)} < \mathrm{tr(M)}$; établir qu'alors

(1) $\qquad \forall \mathrm{A} \in \Omega_n \quad \mathrm{tr(MA)} \leqslant \mathrm{tr(M)}.$

b. Prouver que (1) demeure si l'on suppose seulement que $\mathrm{tr(MA_\sigma)} \leqslant \mathrm{tr(M)}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_n$.

c. Démontrer que Ω_n est l'enveloppe convexe de S_n et, plus précisément, que tout élément A de Ω_n peut s'écrire sous la forme

$$A = \sum_{\sigma \in I} \lambda_\sigma A_\sigma ,$$

les λ_σ étant tous > 0, de somme 1 et I étant une partie de Σ_n de cardinal $\leqslant n^2 - 2n + 2$.

4° *a.* Soient $X = (x_1, \ldots, x_n)$ et $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$, montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i. $Y < X$,

ii. il existe un $A \in \Omega_n$ tel que $Y = XA$,

iii. pour toute fonction u, convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{n} u(y_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} u(x_i)$.

b. Soit $M \in M_n$, démontrer que M est équilibrée si, et seulement si, $XM < X$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$.

QUATRIÈME PARTIE

Si $A = (a_{i,j})$ est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans le corps K, on appelle *permanent* de A la quantité

$$\text{per}(A) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} .$$

1° *a.* Expliquer pourquoi per(A) est une fonction n-linéaire symétrique des colonnes de A, énoncer et démontrer une formule permettant le développement d'un permanent par rapport à une colonne. Combien vaut per(A) si A est triangulaire, si A est de la forme $\begin{pmatrix} A' & B \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$, avec $A' \in M_p$, $A'' \in M_q$, $p + q = n$?

b. Dans le cas particulier où A est semi-triangulaire, c'est-à-dire telle que $a_{i,j} = 0$ dès que $j > i + 1$, on note B la matrice d'ordre n dont l'élément (i, j) vaut $a_{i,j}$ si $i \geqslant j$ et $-a_{i,j}$ sinon. Montrer que $\det(A) = \text{per}(B)$.

c. Démontrer par contre que, si $n \geqslant 3$, il n'est pas possible de trouver une suite $(\varepsilon_{i,j})$ d'éléments de $\{-1, 1\}$ telle que pour tout $A = (a_{i,j}) \in M_n$, en notant A_ε la matrice $(a_{i,j}\, \varepsilon_{i,j})$, on ait

$$\det(A) = \text{per}(A_\varepsilon) .$$

2° *a.* Soit $A \in \Omega_n$, établir que

$$0 < \text{per}(A) \leqslant 1$$

et que $\text{per}(A) = 1$ si, et seulement si, A appartient à S_n.

b. En déduire le résultat suivant : si G est un groupe fini et H un sous-groupe de G d'indice r (c'est-à-dire tel que $\text{card}(G) = r\,\text{card}(H)$), alors il existe des éléments $x_1, \ldots, x_r$ de G qui représentent à la fois toutes les classes à gauche et toutes les classes à droite modulo H.

3° *a.* Soit M une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels $\geqslant 0$; démontrer que $\text{per}(M) = 0$ si, et seulement si, on peut extraire de M une matrice nulle à s lignes et t colonnes, avec $s + t = n + 1$.

b. Déduire de ceci le « lemme des mariages » : si F et G sont deux ensembles finis et γ une application de G dans l'ensemble des parties de F, les conditions suivantes sont équivalentes :

i. il existe une injection Γ de G dans F telle que $\Gamma(x) \in \gamma(x)$ pour tout $x \in G$;

ii. pour toute partie $G' \subset G$, $\quad \operatorname{card}\left(\bigcup_{x \in G'} \gamma(x)\right) \geqslant \operatorname{card}(G')$

(on pourra se ramener au cas où card (F) = card (G)).

CINQUIÈME PARTIE

E désigne maintenant un espace hermitien de dimension n, dont on note $(\ |\ )$ le produit scalaire; pour tout $m = 1, \ldots, n$, F_m désigne le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes m-linéaires sur E, et T_m le dual de F_m.

Si $v_1, \ldots, v_m$ appartiennent à E, on note $t(v_1, \ldots, v_m)$ l'élément de T_m défini par :

$$t(v_1, \ldots, v_m)(\Phi) = \Phi(v_1, \ldots, v_m) \text{ pour tout } \Phi \in F_m.$$

1° *a.* Montrer que $t : E_m \to T_m$ est m-linéaire et qu'il existe sur T_m une structure d'espace hermitien dont le produit scalaire, encore noté $(\ |\ )$, vérifie pour tous $v_1, \ldots, v_m$ et $w_1, \ldots, w_m$ appartenant à E :

$(r)\qquad (t(v_1, \ldots, v_m) \,|\, t(w_1, \ldots, w_m)) = (v_1 \,|\, w_1) \ldots (v_m \,|\, w_m)$

(on pourra d'abord établir que, si $B = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors les $t(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})$, pour $(i_1, \ldots, i_m) \in \{1, \ldots, n\}^m$, forment une base de T_m). Peut-il exister sur T_m plusieurs produits scalaires vérifiant (r)?

b. Si $\sigma \in \Sigma_m$ et $\Phi \in F_m$, on définit Φ^σ par

$$\Phi^\sigma(v_1, \ldots, v_m) = \Phi(v_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, v_{\sigma^{-1}(m)});$$

l'application $\Phi \longmapsto \Phi^\sigma$ est un endomorphisme de F_m dont on note $P(\sigma)$ le transposé. Montrer que $P(\sigma)$ est un endomorphisme unitaire de T_m et que son adjoint est $P(\sigma^{-1})$.

c. On définit :

$$A_m = \{\xi \in T_m \ /\ \forall \sigma \in \Sigma_m \quad P(\sigma)(\xi) = \varepsilon(\sigma)\,\xi\},$$
$$S_m = \{\xi \in T_m \ /\ \forall \sigma \in \Sigma_m \quad P(\sigma)(\xi) = \xi\}.$$

Établir que $\pi_a = \dfrac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \Sigma_m} \varepsilon(\sigma)\, P(\sigma)$ est le projecteur orthogonal sur A_m et expliciter celui sur S_m, qu'on notera π_s. En déduire la dimension de A_m.

2° *a.* Soient $f \in L(E)$ et $m \in \{1, \ldots, n\}$, montrer qu'il existe un unique $f_m \in L(T_m)$ tel que, pour tous $v_1, \ldots, v_m$ appartenant à E, on ait

$$f_m(t(v_1, \ldots, v_m)) = t(f(v_1), \ldots, f(v_m)).$$

Si g est un autre élément de L(E), $(g \circ f)_m$ vaut-il $g_m \circ f_m$ ou $f_m \circ g_m$? Soit f^* l'adjoint de f, a-t-on $(f^*)_m = (f_m)^*$? Vérifier que A_m et S_m sont stables par f_m.

b. Démontrer que, si $v_1, \ldots, v_m$ sont des vecteurs propres linéairement indépendants associés aux valeurs propres de f (non nécessairement distinctes) $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, alors $\pi_a(t(v_1, \ldots, v_m))$ est un vecteur propre non nul pour la restriction, notée $f_{m,a}$ de f_m à A_m. A quelle valeur propre de $f_{m,a}$ est-il associé ?

c. Déduire de ce qui précède l'expression de $\chi(f_{m,a})(T)$ en fonction des valeurs propres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de f (on pourra commencer par le cas où les λ_i sont deux à deux distinctes).

3° Soient f un automorphisme de E et f^* son adjoint.

a. Montrer que toutes les valeurs propres de $f^* \circ f$ sont des réels > 0 ; on note $k_1, \ldots, k_n$ leurs racines carrées positives et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de f.

b. Démontrer qu'avec les notations de la troisième partie :

$$(\operatorname{Log}|\lambda_1|, \ldots, \operatorname{Log}|\lambda_n|) < (\operatorname{Log} k_1, \ldots, \operatorname{Log} k_n).$$

c. Établir l'inégalité de Weyl :

$$(|\lambda_1|^s, \ldots, |\lambda_n|^s) \lhd (k_1^s, \ldots, k_n^s) \text{ pour tout réel } s > 0,$$

(on pourra utiliser une fonction auxiliaire convexe sur $\mathbb{R}^n$).

4° f est toujours un automorphisme de E, mais on suppose de plus que $(f(v) \mid v)$ est un réel > 0 pour tout $v \neq 0$.

a. Que peut-on dire de f et de ses valeurs propres ? Établir que, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale quelconque de E, alors

$$(\operatorname{Log} \lambda_1, \ldots, \operatorname{Log} \lambda_n) \lhd (\operatorname{Log}(f(e_1) \mid e_1), \ldots, \operatorname{Log}(f(e_n) \mid e_n))$$

(on pourra observer que, si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base orthonormale de vecteurs propres pour f, la matrice d'élément (i, j) $|(u_i \mid e_j)|^2$ est équilibrée).

b. En déduire l'inégalité suivante : si A et B sont deux matrices hermitiennes définies positives d'ordre n, alors :

$$(\det(A + B))^{1/n} \geqslant (\det(A))^{1/n} + (\det(B))^{1/n}.$$

5° *a.* Soient $v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_m$ appartenant à E, on note $S(v, w)$ la matrice carrée d'ordre m dont l'élément (i, j) est $(v_i \mid w_j)$. Montrer que

$$(\pi_s(t(v_1, \ldots, v_m)) \mid \pi_s(t(w_1, \ldots, w_m))) = \frac{1}{m!} \operatorname{per}(S(v, w)).$$

b. En déduire que, si M et N sont des matrices carrées quelconques d'ordre n à coefficients complexes, on a :

$$|\operatorname{per}(MN)|^2 \leqslant \operatorname{per}(MM^*) \operatorname{per}(N^*N)$$

et que, si A est hermitienne définie positive, alors $\operatorname{per}(A) \geqslant \det(A)$.

c. Soit $A \in \Omega_n$, on suppose de plus que A est hermitienne définie positive, démontrer l'inégalité de Van der Wærden :

$$\operatorname{per}(A) \geqslant \frac{n!}{n^n}.$$

RAPPORT SUR L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

I. Thème du sujet

L'objet du problème était de démontrer, dans un cas particulier, une célèbre inégalité sur les permanents, proposée en 1926 par Van der Wærden et dont la forme générale demeure aujourd'hui encore une conjecture.

Apparue pour la première fois dans un mémoire de Cauchy, la notion de permanent pose des problèmes de calcul et de minoration bien plus délicats que le déterminant ; faute de méthodes véritablement efficaces, on n'en connaissait encore récemment que peu de propriétés significatives et son étude s'était très ralentie. L'apparition de nouvelles méthodes (dont la partie V donne un exemple), la découverte d'applications nombreuses et parfois inattendues, comme la théorie des jeux, les probabilités, diverses questions de physique statistique ou de théorie des champs, ont fait du permanent l'objet de recherches actives et de fréquentes publications.

II. Observations

Les parties I et II concernaient essentiellement la représentation naturelle du groupe des permutations ; s'agissant d'un début de problème, les erreurs les plus fréquentes viennent de l'inattention (matrice diagonale commutant avec toute autre matrice, diagonalisation et valeurs propres, dimension d'un espace vectoriel produit), de raisonnements mal organisés (démontrer que p_Λ est un projecteur, trouver les sous-espaces stables ou les opérateurs d'entrelacement au II 4°, montrer la compacité de Ω_n) ou d'un attrait trop exclusif pour les qualificatifs "évident", "trivial", "clair".

De ces premières questions, traditionnellement plus faciles, les candidats doivent s'attacher à donner des solutions brèves et complètes, sans étourderies ni incohérences, pour gagner un maximum de points tout en conservant par la suite des ressources et du temps. Il faut aller assez vite pour pouvoir aborder après des questions substantielles, mais demeurer convaincant : une question simple ne "paie" qu'à ce prix, et faire sentir en quelques mots pourquoi une propriété est évidente vaut bien mieux que de la proclamer telle ou, à l'inverse, de la noyer sous un flot d'égalités et de raisonnements superflus.

Signalons par ailleurs, au chapitre des satisfactions, une meilleure compréhension des groupes linéaires sur les corps finis et des raisonnements plus convaincants sur les projecteurs qu'au concours 1978.

La partie III faisait démontrer, par une élégante méthode dûe à Mirsky, un résultat classique de Birkhoff : les sommets du polyèdre Ω_n sont des matrices de permutation. Point n'était besoin du théorème de Hahn-Banach au 1° b) et, si l'on y tenait, encore fallait-il en justifier soigneusement l'usage, de même qu'au 3° c) la limitation du nombre de coefficients non nuls. Les autres questions faisaient surtout appel à l'ingéniosité des candidats, à leur perspicacité, et demandaient qu'ils puissent utiliser avec efficacité leurs connaissances élémentaires (formes linéaires, polynômes caractéristiques). Si la lecture de plusieurs copies est un plaisir à cet égard, de nombreuses autres laissent l'impression d'une bonne volonté mal concrétisée et d'un entraînement insuffisant ou irréaliste à ce type d'épreuve. La limitation de durée, et les conditions psychologiques qui en découlent, sont un aspect important de l'écrit, aussi ne peut-on vraiment s'y préparer qu'en "temps réel" et non par la simple rédaction de problèmes, en quelque nombre que ce soit. Savoir assimiler rapidement un texte et des notations, organiser son temps, rédiger vite et clairement, sont des qualités essentielles au Concours, et bien des candidats pourront y améliorer considérablement leur score si ils consacrent davantage de temps à les acquérir ou les perfectionner et si, tout au long de leur année de préparation, ils tachent de se faire, puis de conserver, des épreuves une vision aussi exacte et complète que possible.

La notion de permanent apparaissait au IV où quelques questions élémentaires familiarisaient avec son usage, avant que 2° et 3° n'en fassent étudier l'application à deux problèmes de combinatoire. De même qu'au I, il était bon de traiter 1° de façon rapide et convaincante puis, comme au III, de mobiliser son intelligence pour "identifier" le permanent sous les problèmes apparemment fort éloignés qu'il s'agissait de résoudre. En ce domaine, la palme du non-conformisme revient sans conteste à cette copie où le lemme des mariages, établi en premier par la - fastidieuse - méthode de récurrence, vise ensuite (et sans succès) à démontrer le résultat préliminaire d'où il était justement question de le déduire !

En application des résultats de III et IV, et à l'aide d'une structure hermitienne sur les espaces de tenseurs symétriques ou alternés, la partie V faisait démontrer plusieurs inégalités non triviales. Signalons que la relation du 5° a), où le permanent apparaît comme un produit scalaire dans l'espace S_m, est à l'origine de plusieurs résultats importants, et notamment de la "version hermitienne" de la conjecture de Van der Waerden, qui représente le progrès le plus significatif accompli dans cette direction. Comme dans tout problème d'algèbre multilinéaire, les propriétés étudiées en 1° et 2° a) demandaient qu'on réduisît les vérifications à une base, faute de quoi elles devenaient inextricables. Réduction aussi, mais d'une toute autre nature, à une partie dense de L(E), pour la question 2° c), afin d'éviter les problèmes de multiplicité de valeurs propres. Les candidats sont évidemment fort peu nombreux à aborder cette partie, et les réponses satisfaisantes relativement rares ; sans doute un entraînement plus efficace aurait-il aidé les meilleurs à conserver plus intactes leurs forces et à tirer davantage parti de leurs capacités.

C'est au total une impression assez favorable qui se dégage de la lecture des copies. L'intérêt du Concours et l'opportunité d'une préparation sérieuse sont visiblement ressentis par une large majorité de candidats, ainsi que l'absurdité qu'il y a à remettre copie blanche ou à participer en simple figurant ; les connaissances de base semblent mieux assimilées et les erreurs grossières moins fréquentes que les années précédentes.

Au chapitre des progrès possibles, deux points nous paraissent primordiaux. En premier lieu, l'importance d'une préparation réelle à l'écrit doit être plus clairement perçue : il ne s'agit pas seulement d'apprendre des mathématiques, mais de savoir comprendre, résoudre et rédiger un problème de manière convaincante en un minimum de temps ; il ne s'agit pas de posséder le corrigé de nombreuses épreuves de l'Agrégation, mais d'avoir plusieurs fois dans l'année, individuellement et en temps limité, simulé leur déroulement ; il ne s'agit pas d'être érudit mais efficace et des connaissances, aussi étendues soient-elles, ne servent de rien si l'on est hors d'état de les appliquer promptement le jour du concours.

Insistons, en second lieu, sur les bienfaits des exercices de mise en œuvre et d'approfondissement. Par la familiarité qu'ils procurent avec les théories du programme, par les liens qu'ils révèlent entre ses divers chapitres, par les méthodes auxquelles ils habituent et l'ingéniosité qu'ils stimulent, ils rendent les connaissances à la fois plus sûres et plus maniables, donc plus probablement efficaces au moment des épreuves.

Souhaitons, pour conclure, aux futurs candidats, qu'ils concrétisent le mieux possible leur volonté de réussir et, en tirant davantage parti de leurs connaissances et de leurs dons, qu'ils puissent mettre de leur côté un maximum de chances de succès.

III. Répartition des notes

Notes	Nombre de candidats
0	113
1 – 4	394
5 – 8	270
9 – 12	177
13 – 16	141
17 – 20	117
21 – 24	95
25 – 28	71
29 – 32	40
33 – 36	31
37 – 40	15
41 – 48	15
49 – 60	7

COMPOSITION D'ANALYSE

DURÉE : 6 heures

NOTATIONS ET RAPPELS

On note $\mathbb{R}$ le corps des réels, $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls, $\mathbb{C}$ le corps des complexes.

On rappelle qu'un espace de Banach complexe est un espace vectoriel complexe normé complet pour sa norme. Si E est un espace de Banach complexe et $\| . \|$ sa norme, on appelle *opérateur* de E toute application linéaire continue T de E dans E et norme de l'opérateur T le nombre

$$\| T \| = \sup_{\| x \| \leqslant 1} \| T(x) \|.$$

Définition. Un opérateur T de E est dit *projecteur contractant* s'il a les deux propriétés suivantes :

a. $T^2 = T$

b. $\| T \| \leqslant 1.$

L'objet du problème est l'étude des projecteurs contractants de certains espaces de Banach complexes.

Les parties I, II, III *du problème sont indépendantes* (*sauf en ce qui concerne les notations*).

N.B. — *On rappelle que le soin apporté à la rédaction est un élément important d'appréciation. Par exemple, les passages à la limite dans les intégrales devront être soigneusement justifiés.*

PREMIÈRE PARTIE

Si un espace vectoriel complexe E est muni d'une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive notée $(x \mid y)$, on peut définir une norme par

$$\| x \| = (x \mid x)^{\frac{1}{2}}.$$

Un espace complet pour une telle norme est dit espace de Hilbert complexe. Deux éléments x, y de E tels que $(x \mid y) = 0$ sont dits orthogonaux. Si F est un sous-espace vectoriel de E, on appelle orthogonal de F et on note $F^{\perp}$ le sous-espace formé des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de F. Si F est un sous-espace fermé de E, on désigne par Π_F l'opérateur de projection orthogonale sur F qui à un élément x de E associe l'unique élément $\Pi_F(x)$ de F tel que :

$$x - \Pi_F(x) \in F^{\perp}.$$

A tout opérateur T d'un espace de Hilbert E, on peut associer un unique opérateur T^* tel que l'on ait :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad (T(x) \mid y) = (x \mid T^*(y)).$$

T^* est appelé adjoint de T.

1° Soit T un opérateur d'un espace de Hilbert complexe E; établir que

$$\| T \| = \sup_{\substack{\| x \| \leqslant 1 \\ \| y \| \leqslant 1}} | (T(x) \mid y) |.$$

En déduire que $\| T^* \| = \| T \|$.

Dans tout le reste de cette première partie, on suppose que T est un projecteur contractant.

2° Montrer que T^* est alors un projecteur contractant.

3° On note F l'image de T; montrer que F est un sous-espace fermé.

On note F^* l'image de T^*.

4° Montrer que le noyau de T est l'orthogonal de F^*.

5° Soit x un élément de E; établir que l'on a $x = T(x)$ si et seulement si $x = T^*(x)$.

6° Déduire de ce qui précède que T est la projection orthogonale sur F.

DEUXIÈME PARTIE

Si α est un nombre complexe non nul, on note sgn (α) le nombre $\dfrac{\alpha}{|\alpha|}$. On pose sgn $(0) = 0$.

Si r est un nombre réel strictement positif et α un élément de $\mathbb{C}$, on pose

$$\alpha^{[r]} = \operatorname{sgn}(\alpha) . |\alpha|^r.$$

L'attention des candidats est attirée sur le caractère inhabituel de cette notation.

1° Soit u un nombre complexe, $u = a + ib$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$; donner un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 des fonctions d'une variable réelle k_1 et k_2 définies par :

$$k_1(x) = \operatorname{sgn}(1 + ux)$$
$$k_2(x) = | 1 + ux |.$$

2° Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs complexes. Soit r un élément non nul de $\mathbb{R}^+$; si x est élément de I, on écrit :

$$f^{[r]}(x) \quad \text{pour} \quad (f(x))^{[r]}.$$

On considère les deux suites de fonctions :

$$h_n(x) = n\left[\left(1 + n^{-1} f^{[r]}(x)\right)^{\left[\frac{1}{r}\right]} - 1\right] \quad n \geqslant 1$$

$$g_n(x) = n\left[\left(i + n^{-1} f^{[r]}(x)\right)^{\left[\frac{1}{r}\right]} - i\right] \quad n \geqslant 1.$$

Montrer que, pour tout $x \in$ I, $h_n(x) + g_n(x)$ a, quand n tend vers l'infini, une limite de la forme $\mathrm{K} f^{[r]}(x)$ où K est une constante (dépendant de r) qu'on déterminera.

Dans tout le reste de cette partie, on suppose qu'on a $0 < r < 1$; on pose $s = \dfrac{1-r}{r}$ et

$$\delta_n(x) = \left| 1 + n^{-1} f^{[r]}(x) \right|^s.$$

3° Prouver l'égalité :

$$h_n(x) = f^{[r]}(x) \,.\, \delta_n(x) + n\,(\delta_n(x) - 1)$$

4° Prouver que les fonctions :

$$\mathrm{H}_n(x) = \frac{f^{[r]}(x) \,.\, \delta_n(x)}{1 + |f(x)|}$$

sont majorées en module par un nombre M indépendant de n et de x.

5° Prouver de même que les fonctions

$$\mathrm{H}'_n(x) = \frac{n\,(\delta_n(x) - 1)}{1 + |f(x)|}$$

sont majorées en module par un nombre M′ indépendant de n et de x. (On pourra utiliser le théorème des accroissements finis.)

6° Prouver l'existence d'un nombre réel A tel qu'on ait pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout élément x de I :

$$| h_n(x) + g_n(x) | \leqslant \mathrm{A}\,(1 + | f(x) |).$$

TROISIÈME PARTIE

On munit le segment fermé $[0, 1]$ de la mesure de Lebesgue μ. Deux fonctions mesurables définies sur $[0, 1]$ qui ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle sont dites presque partout égales. La relation d'égalité presque partout est une relation d'équivalence et les classes sont appelées classes de fonctions mesurables.

Si f est une fonction mesurable définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on note

$$\int f\,d\mu$$

l'intégrale de f pour la mesure μ (cette intégrale étant éventuellement infinie).

La notation

$$\int f\,d\mu$$

s'étend aux fonctions f à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui sont telles que :

$$\int |f|\,d\mu < \infty.$$

On rappelle que si s est un nombre réel, $s \geqslant 1$, on note L^s l'espace des classes τ de fonctions complexes mesurables définies sur $[0, 1]$ et telles que pour toute fonction f de la classe τ, on ait :

$$\int |f|^s \, d\mu < \infty.$$

Comme c'est l'usage, on se permettra dans toute la suite de noter par une même lettre une classe de fonctions et un représentant quelconque de cette classe; c'est ainsi qu'on définit simplement la norme d'un élément f de L^s :

$$\|f\|_s = \left(\int |f|^s \, d\mu \right)^{\frac{1}{s}} \cdot$$

On rappelle que, muni de cette norme, L^s est un espace de Banach. De plus, pour $s = 2$, la norme provient d'une forme sesquilinéaire hermitienne

$$(f \mid g) = \int f \cdot \bar{g} \, d\mu \cdot$$

Si f, g sont des éléments de L^s, on écrit :

$$f \geqslant g \qquad \text{p.p.}$$

pour exprimer que le nombre $f(x) - g(x)$ appartient à $\mathbb{R}^+$ hors d'un ensemble de mesure nulle. On omet quelquefois la précision p.p.

Dans tout ce qui suit, p est un nombre réel, $p > 1$ et q est le nombre défini par

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \text{ on pose } r = p - 1.$$

On rappelle que si f est un élément de L^p, $f \geqslant 0$ p.p., et g un élément de L^q, $g \geqslant 0$ p.p., on a

$$\int f \cdot g \, d\mu \leqslant \left(\int f^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int g^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \cdot$$

De plus, l'inégalité est stricte sauf si existent deux nombres réels non simultanément nuls a, b tels que :

$$af^p = bg^q \qquad \text{p.p.}$$

auquel cas c'est une égalité.

Les trois questions suivantes sont indépendantes les unes des autres.

1° Soit f un élément de L^p et g un élément de L^q ; établir l'inégalité

$$\left| \int f \cdot \bar{g} \, d\mu \right| \leqslant \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \cdot$$

Montrer que l'inégalité est stricte sauf dans le cas où existent deux nombres complexes α, β non simultanément nuls, tels que

$$\alpha f^{[p]} = \beta g^{[q]} \qquad \text{p.p.}$$

2° Soit f un élément de L^p; montrer que $f^{[r]}$ appartient à L^q.

3° Soient s, s' des nombres réels, $1 \leqslant s \leqslant s'$, f une fonction de $L^{s'}$; établir l'inégalité

$$\left(\int |f|^s \, d\mu \right)^{\frac{1}{s}} \leqslant \left(\int |f|^{s'} \, d\mu \right)^{\frac{1}{s'}} \cdot$$

En déduire que $L^{s'}$ est un sous-espace de L^s. Quelle est l'adhérence de $L^{s'}$ dans L^s pour la topologie définie par la norme de L^s ?

QUATRIÈME PARTIE

Dans cette partie, on fixe une famille $\mathfrak{N}$ de sous-ensembles mesurables de $[0, 1]$; on suppose $\mathfrak{N}$ stable par intersection finie et complémentation. A tout ensemble mesurable A est associée sa fonction caractéristique χ_A définie par

$$\chi_A(x) = 1 \qquad \text{si } x \in A$$
$$\chi_A(x) = 0 \qquad \text{sinon.}$$

On note X le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des combinaisons linéaires de classes de fonctions de la forme χ_A, $A \in \mathfrak{M}$; X est un sous-espace de L^1 et aussi de tout espace L^p, $p > 1$; on désigne par $\overline{X}$ l'adhérence de X dans L^2.

Soit u un élément de $\overline{X}$; on admettra qu'il existe une suite (u_n) d'éléments de X et une fonction v de L^2 tels que :

i. $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = u$ p.p.

ii. $|u_n| \leqslant v$ p.p.

On suppose dans cette partie que p est strictement compris entre 1 et 2; on rappelle que q et r sont tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $r = p - 1$. Soit f un élément de L^2; on pose $u = \Pi_X(f)$ où Π_X est la projection orthogonale sur $\overline{X}$. On choisit une suite (u_n) et un élément v de L^2 qui satisfont les conditions **i.** et **ii.** ci-dessus et on pose :

$$\alpha_n = \int u\, \overline{u_n^{[r]}}\, d\mu.$$

1° *a.* Établir l'inégalité :

$$|\alpha_n| \leqslant \left(\int |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |u_n|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

(On pourra commencer par établir que $u_n^{[r]} \in X$).

b. En déduire qu'on a :

$$\left(\int |u|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

(On justifiera soigneusement tout passage à la limite).

c. Prouver qu'on a, de même :

$$\int |u|\, d\mu \leqslant \int |f|\, d\mu.$$

2° Déduire de ce qui précède que Π_X se prolonge en un projecteur contractant Π_X^p de L^p, et, de même, que Π_X se prolonge en un projecteur contractant Π_X^1 de L^1.

CINQUIÈME PARTIE

On admet le résultat suivant :

A tout opérateur T de L^p $(p > 1)$ on peut associer un unique opérateur T^* de L^q $\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1\right)$ tel que pour tout élément f de L^p et tout élément g de L^q, on ait

$$\int T(f)\, \overline{g}\, d\mu = \int f\, \overline{T^*(g)}\, d\mu.$$

De plus, les opérateurs T et T^* ont même norme.

On suppose dans toute cette partie que T est un projecteur contractant de L^p $(p > 1)$.

1° Montrer que T^* est un projecteur contractant de L^q.

2° Soit f un élément de L^p ; montrer que si

$$T(f) = f \quad \text{p.p.} \quad \text{alors}$$
$$T^*(f^{[r]}) = f^{[r]} \quad \text{p.p.} \quad (r = p-1).$$

On suppose désormais que p est strictement compris entre 1 et 2 et que T est un projecteur contractant de L^p tel que $T(1) = 1$ (où 1 désigne la fonction caractéristique $\chi_{[0,1]}$).

3° Soit f un élément de L^p tel que $T(f) = f$ p.p.

a. Déduire de ce qui précède que les fonctions h_n et g_n définies comme dans la deuxième partie appartiennent à l'image de T.

b. Montrer que $f^{[r]}$ est dans l'image de T; plus généralement, montrer que, pour tout entier n, $f^{[r^n]}$ est dans l'image de T.

4° Soit g un élément de L^p, f son image par T; prouver qu'on a :

$$\int |f|\, d\mu \leqslant \int |g|\, d\mu.$$

SIXIÈME PARTIE

Cette partie est consacrée aux projecteurs contractants T de L^1 qui sont tels que $T(1) = 1$.

1° Soit A un sous-ensemble mesurable de [0, 1] et B son complémentaire dans [0, 1]; montrer qu'on a :

$$|T(\chi_A) + T(\chi_B)| = |T(\chi_A)| + |T(\chi_B)| \quad \text{p.p.}$$

2° En déduire que si $f = \chi_A$, on a

$$(1) \qquad T(f) \geqslant 0$$
$$(2) \qquad \int T(f)\, d\mu = \int f\, d\mu.$$

Montrer que les relations (1) et (2) s'étendent à tout élément f de L^1 qui est tel que $f \geqslant 0$ p.p.

3° On note $\mathcal{N}_T$, la famille des sous-ensembles mesurables A de [0, 1] tels que

$$T(\chi_A) = \chi_A \quad \text{p.p.}$$

Prouver que $\mathcal{N}_T$ est stable par intersection finie et complémentation.

4° Soit A un élément de $\mathcal{N}_T$, B son complémentaire; montrer que pour tout élément f de L^1 tel que $f \geqslant 0$ p.p., on a :

$$\int T(f.\chi_A).\chi_B\, d\mu = 0.$$

En déduire que :

$$\int f\chi_A\, d\mu = \int T(f)\chi_A\, d\mu.$$

Étendre ce résultat au cas où f est un élément quelconque de L^1.

5° Afin d'utiliser sans changement de notation les définitions de la quatrième partie, on désigne par X le sous-espace vectoriel engendré par les classes de fonctions χ_A, $A \in \mathcal{N}_T$ et par $\overline{X}$ son adhérence dans L^2. Si f est élément de L^1, on pose :

$$\mathrm{Re}(f) = \frac{f + \bar{f}}{2} \quad \text{et}$$
$$f^+ = \sup(0, \mathrm{Re}(f)).$$

Soit Y l'image de T; montrer que si f appartient à Y, il en est de même de f^+.

Montrer que si f appartient à Y, alors, pour tout nombre réel c, l'ensemble

$$\{ x : f^+(x) > c \}$$

appartient à $\mathfrak{N}_T$. En déduire que Y est l'adhérence de X dans L^1.

6° Soit f une fonction de L^1 bornée (en module); prouver que pour tout élément g de Y, on a :

$$\int f \bar{g} \, d\mu = \int T(f) \, \bar{g} \, d\mu.$$

Établir que l'image par T d'une fonction de L^2 est dans L^2.

7° Prouver que T est l'opérateur Π_X^1 défini comme dans la quatrième partie.

8° On suppose pour cette question que T est un projecteur contractant de L^p $(1 < p < 2)$ tel que $T(1) = 1$. On définit $\mathfrak{N}_T$ et X comme plus haut. Établir que T est l'opérateur Π_X^p défini comme dans la quatrième partie.

3° On note $\mathfrak{N}_T$, la famille des sous-ensembles mesurables A de $[0, 1]$ tels que

$$T(\chi_A) = \chi_A \qquad \text{p.p.}$$

Prouver que $\mathfrak{N}_T$ est stable par intersection finie et complémentation.

4° Soit A un élément de $\mathfrak{N}_T$, B son complémentaire; montrer que pour tout élément f de L^1 tel que $f \geqslant 0$ p.p., on a :

$$\int T(f . \chi_A) . \chi_B \, d\mu = 0.$$

En déduire que :

$$\int f \chi_A \, d\mu = \int T(f) \, \chi_A \, d\mu.$$

Étendre ce résultat au cas où f est un élément quelconque de L^1.

5° Afin d'utiliser sans changement de notation les définitions de la quatrième partie, on désigne par X le sous-espace vectoriel engendré par les classes de fonctions χ_A, $A \in \mathfrak{N}_T$ et par $\overline{X}$ son adhérence dans L^2. Si f est élément de L^1, on pose :

$$\operatorname{Re}(f) = \frac{f + \bar{f}}{2} \qquad \text{et}$$

$$f^+ = \sup(0, \operatorname{Re}(f)).$$

Soit Y l'image de T; montrer que si f appartient à Y, il en est de même de f^+.

Montrer que si f appartient à Y, alors, pour tout nombre réel c, l'ensemble

$$\{ x : f^+(x) > c \}$$

appartient à $\mathfrak{N}_T$. En déduire que Y est l'adhérence de X dans L^1.

6° Soit f une fonction de L^1 bornée (en module); prouver que pour tout élément g de Y, on a :

$$\int f \bar{g} \, d\mu = \int T(f) \, \bar{g} \, d\mu.$$

Établir que l'image par T d'une fonction de L^2 est dans L^2.

7° Prouver que T est l'opérateur Π_X^1 défini comme dans la quatrième partie.

8° On suppose pour cette question que T est un projecteur contractant de L^p $(1 < p < 2)$ tel que $T(1) = 1$. On définit $\mathfrak{N}_T$ et X comme plus haut. Établir que T est l'opérateur Π_X^p défini comme dans la quatrième partie.

RAPPORT SUR L'ÉPREUVE D'ANALYSE

I. Observations générales

Le problème proposait l'étude des projecteurs contractants de certains espaces de Banach complexes.

Les trois premières parties indépendantes les unes des autres constituaient des préparatifs destinés à mettre à la disposition des candidats les techniques à utiliser dans l'étude proprement dite. De fait, si la partie II demandait un effort de réflexion et de mise au point, les parties I et III étaient essentiellement des questions de cours. On peut s'étonner dans ces conditions que les questions de la première partie, morcelées à l'extrême pour ne pas dérouter les candidats, aient arrêté nombre d'entre eux. On peut s'étonner aussi de la légèreté avec laquelle l'inégalité

$$a^r + b^r \leqslant (a+b)^r \qquad a \geqslant 0, \quad b \geqslant 0, \quad r > 0$$

incorrecte quand r est compris entre 0 et 1, est admise dans le but de simplifier les calculs de la seconde partie.

Il faut dire en revanche, que les copies ayant dépassé les trois premières parties ont souvent laissé une bonne impression : les bases de la théorie de la mesure et de l'analyse fonctionnelle n'y sont pas ignorées et les idées quelque peu originales nécessaires à la solution des questions difficiles des parties IV, V, VI apparaissent.

En somme, l'examen des copies fait apparaître à la fois l'impréparation et le manque de connaissances de beaucoup mais aussi la bonne santé du "flux montant" des étudiants en mathématiques.

II. Remarques sur la résolution du problème

<u>Première partie</u> : Seule la quatrième question présentait une légère difficulté. En fait, le simple développement de $||x - T^*(x)||^2$ permettait de déduire l'égalité $T^*(x) = x$ à partir de $T(x) = x$.

<u>Deuxième partie</u> : Les calculs des premières questions aboutissent en général à un résultat correct ; par contre l'écriture parfois fantaisiste des développements limités a fait frémir les correcteurs.

La quatrième question a été souvent bien comprise ; les candidats aboutissent à la majoration cherchée en étudiant la limite à l'infini d'une fonction continue ou en exploitant l'inégalité $a+b \leqslant 2 \sup(a,b)$.
En revanche, la cinquième question a arrêté la quasi-totalité des candidats : il fallait en effet commencer par appliquer (correctement) la formule des accroissements finis (par exemple à la fonction $(\sqrt{x^2+y^2})^s$). On pouvait ensuite organiser naturellement les calculs en distinguant selon que $n^{-1}|f(x)|^r$ était "grand" ou "petit" ; dans ce dernier cas on était conduit à raisonner différemment suivant que s était ou non $\geqslant 1$.

<u>Troisième partie</u> : La première question a donné lieu à des raisonnements contournés et souvent incorrectement mis en forme ; l'utilisation de la fonction sgn aurait pourtant simplifié la tâche des candidats.

Les questions suivantes étaient bien classiques.

<u>Quatrième partie</u> : Cette partie avait pour objet la construction de projecteurs contractants de L^p, $1 \leqslant p < 2$, par prolongement d'un projecteur orthogonal de L^2. Le principal outil pour obtenir les inégalités de la première question était le théorème de convergence dominée de Lebesgue, connu en général de ceux qui ont abordé la question.

En ce qui concerne la deuxième question, regrettons l'usage par certains du théorème de Hahn-Banach.

<u>Cinquième partie</u> : Dans cette partie on établissait une propriété des projecteurs contractants de L^p, $1 < p < 2$ tels que $T(1) = 1$ qui préparait la toute dernière question du problème.

La question 2°) exploitait le cas d'égalité dans l'inégalité de Hölder, étudié dans la question III 1°). La question suivante, permettait par l'utilisation des majorations de la partie II jointes au théorème de Lebesgue de prouver que la suite $f^{[r^n]}$ était dans l'image d'un projecteur contractant dès que f y était. En faisant tendre n vers l'infini dans l'intégrale

$$\int f \quad f^{[r^n]} \, d\mu ,$$

on obtenait l'inégalité de la quatrième question.

Sixième partie : La dernière partie du problème montrait que les projecteurs contractants de L^1 (et aussi de L^p, $1 < p < 2$) tels que $T(1) = 1$ étaient du type décrit dans la quatrième partie. C'était la seule qui demandait un minimum de pratique en théorie de la mesure.

Pour résoudre la première question, il suffisait d'intégrer l'inégalité

$$|T(\chi_A) + T(\chi_B)| \leq |T(\chi_A)| + |T(\chi_B)|$$

et d'utiliser la définition des projecteurs contractants. L'inégalité (1) de la seconde question résultait du fait que l'inégalité

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

n'est une égalité que si α et β ont même argument. Il est surprenant que ce fait ait été délibérément ignoré par des candidats arrivés à ce stade du problème. Le passage des fonctions caractéristiques aux fonctions intégrables positives passait par l'utilisation d'une suite de fonctions étagées ; les candidats l'ont vu mais ont rarement écrit un raisonnement correct.

La solution de la question 3°) mettait en jeu l'analyse d'inégalités dans les intégrales ; quant à celle de la question 4°) elle passait par l'étude du cas particulier où f est bornée.

La question 5°) était technique ; pour voir, par exemple que l'ensemble

$$A = \{x : f^+(x) > c\}$$

appartient à $\mathcal{N}_T$ on pouvait remarquer que

$$1 - \chi_A = \lim_{n\to\infty} \{1 - n(f - c)^+\}^+.$$

Dans la sixième question, il s'agissait d'étendre (par le théorème de Lebesgue) l'égalité

$$\int f\bar{g} \, d\mu = \int T(f)\, \bar{g} \, d\mu, \quad f \in L^1$$

connue pour g fonction caractéristique au cas des fonctions intégrables bornées. Le corollaire sur l'image des fonctions de L^2 se déduisait en considérant le cas où $g = T(f)$.

Les deux dernières questions du problème tiraient la conclusion de toute l'étude.

III. Répartition des notes

Signalons une copie ayant dominé l'ensemble du problème et l'ayant, pour ainsi dire, traité en totalité et quelques autres très bonnes copies.

Notes	Nombre de candidats
0 à 3	386
4 à 7	212
8 à 10	171
11 à 14	159
15 à 19	124
20 à 24	86
25 à 29	60
30 à 34	43
35 à 39	33
40 à 44	17
45 à 50	9
51 à 55	10
56 à 60	17

Durée : 6 heures

ANALYSE NUMÉRIQUE

0. PRÉLIMINAIRES

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, muni de la no
notée $\| \cdot \|$.

Soit r un entier supérieur ou égal à 1; on désigne par E^r l'espace vectoriel des matrices colonnes à r li
$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix}$ avec $u_i \in E$, $1 \leqslant i \leqslant r$. L'élément U de E^r sera noté $U = (u_1, \ldots, u_r)^T$.

On munit l'espace vectoriel E^r de la norme $\| \cdot \|_1$ définie par :

$$\forall U = (u_1, \ldots, u_r)^T, \qquad \| U \|_1 = \sum_{i=1}^{r} \| u_i \| .$$

On note $\mathcal{L}(E)$ (respectivement $\mathcal{L}(E^r)$) l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des opérateurs linéaires de E (resp^t de
dans lui-même. On munit ces espaces des normes notées encore $\| \cdot \|$ et $\| \cdot \|_1$ respectivement, définies par :

$$\forall g \in \mathcal{L}(E), \qquad \| g \| = \max_{x \in E,\ x \neq 0} \| g(x) \| / \| x \|$$

$$\forall B \in \mathcal{L}(E^r), \qquad \| B \|_1 = \max_{U \in E^r,\ U \neq 0} \| BU \|_1 / \| U \|_1 .$$

Soit A une matrice carrée d'ordre r d'élément générique $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $1 \leqslant i, j \leqslant r$; on lui associe l'opér
linéaire, noté encore A, appartenant à $\mathcal{L}(E^r)$, défini par :

si $U = (u_1, \ldots, u_r)^T$ et si $V = (v_1, \ldots, v_r)^T$ appartiennent à E^r alors $V = AU$ équiva
$(\forall i = 1, \ldots, r,\ v_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} u_j)$.

Q. 1. *Montrer que, pour un tel opérateur* A,

$$\| A \|_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant r} \left(\sum_{i=1}^{r} | a_{ij} | \right) .$$

Q. 2. Étant donnés r nombres réels $a_1, a_2, \ldots, a_r$ on leur associe la matrice carrée d'ordre r no
d'élément générique r_{ij}

$$r_{ij} = \delta_{i,\,j+1} + a_j \delta_{1,\,i}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant r, \qquad 1 \leqslant j \leqslant r$$

où :

$$\begin{cases} \delta_{i,\,j} = 1 & \text{si } i = j \\ \delta_{i,\,j} = 0 & \text{si } i \neq j . \end{cases}$$

a. *Montrer que si* R *admet une valeur propre de module* 1 *et de multiplicité supérieure ou égale à* 2, *la suite* $(\mathrm{R}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ *des puissances de la matrice* R *n'est pas bornée*; (*on pourra pour cela préciser la dimension de l'espace propre associé à cette valeur propre de module* 1).

b. *Montrer que, pour qu'il existe une matrice carrée* H *d'ordre* r *à coefficients dans* $\mathbb{C}$, *inversible et d'inverse* H^{-1}, *telle que* $\| \mathrm{H}^{-1} \mathrm{R} \mathrm{H} \|_1 \leqslant 1$ *il faut et il suffit que les valeurs propres de* R *soient toutes de module inférieur ou égal à* 1 *et que les valeurs propres de module* 1 *soient simples.*

c. On suppose maintenant que la matrice R vérifie la condition

$$(\mathrm{D}) \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ est valeur propre simple de R et les autres valeurs propres} \\ \text{de R sont de module strictement inférieur à } 1, \end{array} \right.$$

et on considère l'ensemble $\mathfrak{S}$ des matrices carrées d'ordre r à coefficients complexes telles que :

$$\forall \mathrm{S} \in \mathfrak{S}, \qquad \mathrm{S}\xi = \xi$$

où ξ désigne la matrice colonne de $\mathbb{R}^r$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

Montrer que si R *vérifie la condition* (D), *il existe une matrice inversible* H *et un nombre réel positif* ε *tels que les conditions*

$$\mathrm{S} \in \mathfrak{S} \quad \textit{et} \quad \| \mathrm{S} - \mathrm{R} \|_1 \leqslant \varepsilon \qquad \textit{entraînent} \quad \| \mathrm{H}^{-1} \mathrm{S} \mathrm{H} \|_1 \leqslant 1.$$

I

Soit T un nombre réel positif; pour $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{C}^m([0, \mathrm{T}]; \mathrm{E})$ l'espace des fonctions m fois continûment différentiables de $[0, \mathrm{T}]$ à valeurs dans E et $\mathrm{C}^m([0, \mathrm{T}] \times \mathrm{E}; \mathrm{E})$ l'espace des fonctions m fois continûment différentiables de $[0, \mathrm{T}] \times \mathrm{E}$ à valeurs dans E.

On se donne une fonction $f : (t, y) \rightsquigarrow f(t, y)$ appartenant à $\mathrm{C}^1([0, \mathrm{T}] \times \mathrm{E}; \mathrm{E})$ et on note $\mathrm{D}_y f(t, y)$ la dérivée partielle de f par rapport à y au point (t, y); on supposera dans toute la suite qu'il existe un nombre réel positif L tel que

$$\forall t \in [0, \mathrm{T}], \quad \forall y \in \mathrm{E}, \qquad \| \mathrm{D}_y f(t, y) \| \leqslant \mathrm{L}.$$

On se propose d'approcher la solution du problème différentiel de condition initiale suivant :

$$(\mathrm{P}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Déterminer } y \in \mathrm{C}^1([0, \mathrm{T}]; \mathrm{E}) \text{ vérifiant :} \\ \forall t \in [0, \mathrm{T}], \qquad y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y_0 \text{ donné dans E,} \end{array} \right.$$

où $y'(t)$ désigne la dérivée de la fonction y au point t.

Q. 3. *Montrer que pour tout* $t \in [0, \mathrm{T}]$, *tout* y *et* z de E, *il existe un opérateur* $g(t; y, z)$ *de* $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *tel que*

$$f(t, y) - f(t, z) = g(t; y, z)(y - z)$$

et

$$\| g(t; y, z) \| \leqslant \mathrm{L}.$$

On considère maintenant une subdivision

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots < t_\mathrm{N} = \mathrm{T}$$

de l'intervalle $[0, \mathrm{T}]$ et on note, pour $n = 1, \ldots, \mathrm{N}$, par $h_n = t_n - t_{n-1}$ le $n^{\text{ième}}$ pas.

On se propose de déterminer par récurrence des valeurs approchées $y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_\mathrm{N}$ de la solution $y(.)$ du problème (P) aux points $t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots, t_\mathrm{N}$. Pour cela on se donne un entier r avec $1 \leqslant r \leqslant \mathrm{N}$, et on suppose déterminées les valeurs approchées $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ $(r \leqslant n \leqslant \mathrm{N})$.

Q. 4. Soit $\pi_{n,r}$ la fonction « polynomiale » de $[0, T]$ à valeurs dans E

$$\pi_{n,r}(t) = \sum_{k=0}^{r} t^k d_{k,n,r}$$

où les « coefficients » $d_{k,n,r}$ appartiennent à E et sont déterminés par les relations :

$$\begin{cases} \forall i = 1, 2, \ldots, r, & \pi_{n,r}(t_{n-i}) = y_{n-i} \\ & \pi_{n,r}(t_n) = z \quad \text{donné dans E.} \end{cases}$$

a. *On pose* $z^* = \frac{d}{dt}\pi_{n,r}(t_n)$. *Montrer que* z et z^* *sont liés par une relation de la forme*

$$z = \sum_{i=1}^{r} a_{n,i}\, y_{n-i} + h_n b_n z^*.$$

Calculer les coefficients $a_{n,i}$ *et* b_n *en fonction des abscisses* $t_n, t_{n-1}, \ldots, t_{n-r}$.

b. *Montrer que lorsque le pas* $h_n = h = T/N$ *est constant les coefficients* $a_{n,i}$ *et* b_n *ne dépendent que de* i *et* r ; *on les notera respectivement* a_i *et* b.

c. *Montrer que si la subdivision de l'intervalle* $[0, T]$ *vérifie la condition*

(1) *il existe* $\delta > 0$, *tel que* $\forall n = 1, 2, \ldots, N-1, \quad 0 < \frac{1}{\delta} \leqslant \frac{h_{n+1}}{h_n} \leqslant \delta$,

alors il existe un nombre réel positif $C_1(\delta)$ *tel que, pour tout* n *vérifiant* $r \leqslant n \leqslant N$, on ait :

$$\forall i = 1, 2, \ldots, r, \qquad |a_{n,i}| \leqslant C_1(\delta), \quad |b_n| \leqslant C_1(\delta).$$

d. *Établir les relations*

$$\sum_{i=1}^{r} a_{n,i} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{r} a_{n,i}(t_n - t_{n-i}) = h_n b_n.$$

e. *Montrer que, si* $h_n b_n L < 1$, *il existe un élément unique* y_n *de* E *tel que :*

$$y_n = \sum_{i=1}^{r} a_{n,i}\, y_{n-i} + h_n b_n f(t_n, y_n).$$

Q. 5. Soit $z \in C^{r+2}([0, T]; E)$; on pose, pour $r \leqslant n \leqslant N$

$$\varepsilon_n(z) = z(t_n) - \sum_{i=1}^{r} a_{n,i}\, z(t_{n-i}) - h_n b_n z'(t_n),$$

où z' désigne la dérivée de la fonction z.

a. *Démontrer que, sous l'hypothèse* (1) *de* **Q. 4.** c, *il existe un nombre réel positif* $C_2(\delta)$ *indépendant de* n, *tel que*

$$\| \varepsilon_n(z) \| \leqslant C_2(\delta)\, h^r \int_{t_{n-r}}^{t_n} \| z^{(r+1)}(t) \|\, dt,$$

où on a posé $h = \max_{1 \leqslant n \leqslant N} h_n$ *et où* $z^{(k)}$ *désigne la dérivée* $k^{\text{ième}}$ *de la fonction* z.

b. *Montrer que, sous l'hypothèse* (1), *il existe des nombres réels* $C_3(\delta)$ (*indépendant de* n) *et* $\gamma_{n,r}$ *tels que*

$$\| \varepsilon_n(z) - \gamma_{n,r}\, b_n h_n^{r+1} z^{(r+1)}(t_n) \| \leqslant C_3(\delta)\, h_n^{r+1} \int_{t_{n-r}}^{t_n} \| z^{(r+2)}(t) \|\, dt.$$

Donner une expression simple de $\gamma_{n,r}$ *en fonction de* $t_n, t_{n-1}, \ldots, t_{n-r}$; *préciser la valeur* γ_r *de* γ_n *lorsque le pas* $h_n = h$ *est constant.*

II

On définit par récurrence des valeurs approchées y_n de $y(t_n)$ par :

$$(\mathrm{P}_h)\quad \begin{cases} y_\mu = \eta_\mu \text{ donné dans E, pour } \mu = 0, 1, \ldots, r-1 \\ y_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} a_{n,i}\, y_{n-i} + h_n b_n f(t_n, y_n), \quad \text{pour} \quad r \leqslant n \leqslant \mathrm{N} \end{cases}$$

où les valeurs de démarrage $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{r-1}$ sont calculées par une autre méthode que nous ne préciserons pas ici.

Nous supposons dans tout ce qui suit qu'il existe un nombre réel positif $\nu < 1$ tel que

(2) $$\forall n \geqslant r, \qquad h_n b_n \mathrm{L} \leqslant \nu$$

de sorte que le problème (P_h) admet une solution unique.

On considère maintenant deux suites $(\varepsilon_n)_{r \leqslant n \leqslant \mathrm{N}}$ et $(z_n)_{0 \leqslant n \leqslant \mathrm{N}}$ vérifiant les « équations perturbées »

$$(\mathrm{Q}_h)\quad \begin{cases} z_0, z_1, \ldots, z_{r-1} \text{ donnés dans E,} \\ z_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} a_{n,i}\, z_{n-i} + h_n b_n f(t_n, z_n) + \varepsilon_n \qquad \text{pour} \quad r \leqslant n \leqslant \mathrm{N}. \end{cases}$$

On pose

$$u_n = y_n - z_n \quad \text{et} \quad \mathrm{U}_n = (u_n, u_{n-1}, \ldots, u_{n-r+1})^{\mathrm{T}}.$$

Q. 6. a. *Montrer qu'il existe un opérateur $\mathrm{G}_n \in \mathcal{L}(\mathrm{E}^r)$ ne dépendant que de $g(t_n\,;\, y_n, z_n)$, une matrice carrée R_n d'ordre r ne dépendant que des coefficients $a_{n,i}$ et un élément E_n de E^r ne dépendant que de ε_n, tels que l'on ait :*

$$(\mathrm{I} - h_n b_n \mathrm{G}_n)\, \mathrm{U}_n = \mathrm{R}_n \mathrm{U}_{n-1} + \mathrm{E}_n, \qquad \textit{pour} \quad r \leqslant n \leqslant \mathrm{N},$$

où I *désigne l'opérateur identité.*

b. *Lorsque le pas $h_n = h$ est constant la matrice R_n ne dépend pas de n; on la notera* R. *Calculer la matrice* R *pour $r = 2$, 3 et 4; montrer que cette matrice* R *vérifie la condition* (D) *de* **Q. 2.** c.

On suppose désormais que $r = 2$, 3 ou 4.

c. *En déduire qu'il existe un nombre réel positif α_r et une matrice carrée d'ordre r inversible, notée H_r, tels que si la subdivision de l'intervalle* $[0, \mathrm{T}]$ *vérifie la condition*

(3) $$\forall n = 2, \ldots, \mathrm{N}, \qquad \left| 1 - \frac{h_n}{h_{n-1}} \right| \leqslant \alpha_r,$$

alors on a :

$$\forall n = r, \ldots, \mathrm{N}, \qquad \| \mathrm{H}_r^{-1} \mathrm{R}_n \mathrm{H}_r \|_1 \leqslant 1 \quad \textit{et la condition (1) de } \textbf{Q. 4.}\ \text{c.}$$

d. *Montrer qu'il existe un nombre réel positif C_4 tel que, pour $r \leqslant n \leqslant \mathrm{N}$*

$$\| \mathrm{H}_r^{-1} (\mathrm{I} - h_n b_n \mathrm{G}_n)^{-1} \mathrm{H}_r \|_1 \leqslant 1 + \mathrm{C}_4 h_n \mathrm{L}.$$

e. *En déduire que, sous l'hypothèse* (3), *il existe un nombre réel positif C_5 tel que*

$$\forall n = r, \ldots, \mathrm{N}, \qquad \| \mathrm{U}_n \|_1 \leqslant \mathrm{C}_5 \exp(\mathrm{C}_4 \mathrm{L}\, t_n) \left[\| \mathrm{U}_{r-1} \|_1 + \sum_{i=r}^{n} \| \varepsilon_i \| \right].$$

Q. 7. *On suppose maintenant que $f \in \mathrm{C}^r([0, \mathrm{T}] \times \mathrm{E}\,;\, \mathrm{E})$. Montrer que, sous l'hypothèse* (3), *il existe un nombre réel positif C_6 tel que*

$$\forall n = r, \ldots, \mathrm{N}, \qquad \| y_n - y(t_n) \| \leqslant \mathrm{C}_5 \exp(\mathrm{C}_4 \mathrm{L}\, t_n) \left[\sum_{\mu=0}^{r-1} \| y_\mu - y(t_\mu) \| + \mathrm{C}_6 h^r \int_0^{t_n} \| y^{(r+1)}(t) \|\, dt \right].$$

On se donne maintenant une fonction $\theta \in C^1([0,T]\,;\,\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall\, t \in [0,T], \qquad 0 < \theta(t) \leqslant 1,$$

et un paramètre réel positif h de telle sorte que la subdivision de l'intervalle $[0,T]$ vérifie

$$\forall\, n = 1, \ldots, N, \qquad |\, h_n - h\theta(t_n)\,| \leqslant C_7 h_n^2$$

où C_7 est un nombre réel positif indépendant de h.

On se propose ici d'étudier le comportement asymptotique de l'erreur $y_n - y(t_n)$ pour h voisin de zéro où $y(\,.\,)$ désigne la solution du problème (P) et $(y_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ celle du problème (P_h), les valeurs de démarrage y_μ étant construites de telle sorte que :

$$\forall\, \mu = 0, 1, \ldots, r-1, \qquad |\, y_\mu - y(t_\mu)\,| \leqslant C_8 h^r$$

où C_8 est un nombre réel positif indépendant de h.

On suppose désormais que $f \in C^{r+1}([0,T] \times E\,;\,E)$. On pose $g(t) = D_y f(t, y(t))$ et, pour $\varphi \in C^1([0\,;\,T]\,;\,E)$ et $e_0 \in E$ donnés, on considère la solution $e \in C^2([0,T]\,;\,E)$ du problème différentiel de condition initiale

$$\begin{cases} e'(t) = g(t)\, e(t) + \varphi(t) & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ e(0) = e_0\,. \end{cases}$$

On lui associe, pour $n = r-1, \ldots, N$, la matrice colonne

$$V_n = (e(t_n), e(t_{n-1}), \ldots, e(t_{n-r+1}))^T.$$

Par ailleurs on choisit dans les équations perturbées (Q_h) $z_n = y(t_n)$ et $\varepsilon_n = \varepsilon_n(y(\,.\,))$ pour $n = r, \ldots, N$, et on pose

$$S_n = (I - h_n b_n G_n)^{-1} R_n$$

où G_n est défini en **Q. 6.** a.

Q. 8. a. *Montrer qu'on peut trouver un nombre réel positif* h^* *tel que, si* $0 < h \leqslant h^*$ *et si* $n = r, \ldots, N$, *il existe un élément* F_n *de* E^r *ne dépendant que de* $\varphi(t_n)$, *vérifiant*

$$\|\, V_n - S_n V_{n-1} - h_n b_n F_n \,\|_1 \leqslant C_9\, h . h_n,$$

où C_9 *est un nombre réel positif indépendant de* h.

b. *En déduire que, pour* h^* *assez petit, on peut choisir la fonction* φ *de telle sorte que, si* $0 < h \leqslant h^*$ *et* $W_n = U_n - h^r V_n$, *on ait*

$$\|\, W_n - S_n W_{n-1} \,\|_1 \leqslant C_{10}\, h_n h^{r+1},$$

où C_{10} *est un nombre réel positif indépendant de* h.

(On montrera pour cela que $|\, \gamma_{n,r} - \gamma_r \,| \leqslant C_{11}\, h_n$, *où* C_{11} *est un nombre réel positif indépendant de* h.)

c. *Montrer que, sous l'hypothèse plus restrictive*

$$\|\, y_\mu - y(t_\mu) \,\| \leqslant C_{12}\, h^{r+1}, \qquad \textit{pour} \quad \mu = 0, 1, \ldots, r-1$$

où C_{12} *est un nombre réel positif indépendant de* h, *il existe une fonction* $\omega \in C^2([0,T]\,;\,E)$ *telle que, si* $0 < h \leqslant h^*$, *on ait*

$$\forall\, n = 0, \ldots, N, \qquad \|\, y_n - y(t_n) - h^r \omega(t_n) \,\| \leqslant C_{13}\, h^{r+1}$$

où C_{13} *est un nombre réel indépendant de* h.

Q. 9. On suppose maintenant que les valeurs de démarrage y_μ sont telles que

$$\|\, y_\mu - y(t_\mu) - h^r d_\mu \,\| \leqslant C_{14}\, h^{r+1}, \qquad \textit{pour} \quad \mu = 0, 1, \ldots, r-1,$$

où $d_\mu \in E$ et C_{14} est un nombre réel positif indépendant de h.

a. *Montrer qu'il existe un nombre réel positif* C_{15} *tel que, si* $0 < h \leqslant h^*$ *avec* h^* *assez petit, on ait*

$$\forall n = r, \ldots, N, \qquad \| S_n - R \|_1 \leqslant C_{15}\, h_n .$$

Soit (X_n), $r - 1 \leqslant n \leqslant N$, une suite d'éléments de E^r ; on notera

$$X_n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_r^n)^T, \qquad \alpha_n = \| x_1^n \|, \ \beta_n = \sum_{i=2}^{r} \| x_i^n \| .$$

b. *Montrer qu'il existe une matrice carrée d'ordre r inversible* H, *et des nombres réels positifs* C_{16} *et* τ *avec* $0 < \tau < 1$ *tels que les relations*

$$X_n = H^{-1} S_n H X_{n-1}$$

entraînent

$$\begin{cases} \alpha_n \leqslant (1 + C_{16}\, h_n)\,(\alpha_{n-1} + C_{16}\, h_n\, \beta_{n-1}) \\ \beta_n \leqslant (1 + C_{16}\, h_n)\,(C_{16}\, h_n\, \alpha_{n-1} + \tau \beta_{n-1}). \end{cases}$$

c. *En déduire que les suites* $(\alpha_n)_{r \leqslant n \leqslant N}$ *et* $(\beta_n)_{r \leqslant n \leqslant N}$ *satisfont à une majoration de la forme*

$$\begin{cases} \alpha_n \leqslant \exp\,(2\, C_{16}\, t_n)\,[\alpha_{r-1} + \Psi_n\, h\, \beta_{r-1}] \\ \beta_n \leqslant \exp\,(2\, C_{16}\, t_n)\,[\alpha_{r-1} + \Psi_n\, h\, \beta_{r-1} + \tau^{n-r+1}\, \beta_{r-1}] \end{cases}$$

où l'on précisera la suite $(\Psi_n)_{r \leqslant n \leqslant N}$, *($\Psi_n$ indépendant de h).*

d. *Montrer qu'il existe une fonction* $\tilde{\omega} \in C^2([0, T]\,;\, E)$ *telle que, si* $0 < h \leqslant h^*$, *on ait pour tout* $t^* > 0$ *et pour tout* n *tel que* $t_n \geqslant t^*$,

$$\| y_n - y(t_n) - h^r\, \tilde{\omega}(t_n) \| \leqslant C_{17}\, h^{r+1}$$

où C_{17} *est un nombre réel positif indépendant de h.*

RAPPORT SUR L'ÉPREUVE D'ANALYSE NUMÉRIQUE

I. Analyse du sujet

Le sujet proposé portait sur la construction de méthodes de résolution numérique de systèmes différentiels avec conditions de Cauchy, plus précisément la méthode de différenciation rétrograde ou de GEAR avec pas d'intégration variable.

L'idée est d'approcher en chaque point d'un réseau sur l'intervalle de résolution $[0,T]$ la dérivée de la solution $y'(t_n)$ par la dérivée du polynôme d'interpolation de degré r construit sur les r+1 valeurs approchées de y aux points $t_n,\dots,t_{n-r}$ pour $n \geqslant r$. Des valeurs de départ $y_o,y_1,\dots,y_{r-1}$ sont données séparément.

Le problème était composé de quatre parties : des préliminaires matriciels nécessaires pour étudier la stabilité et le comportement asymptotique de l'erreur ; la partie I décrivant le procédé de construction de la méthode d'approximation ainsi qu'une étude de l'erreur de consistance c'est-à-dire de l'erreur locale commise lors de l'approximation du système différentiel ; la partie II était consacrée à l'obtention d'une majoration a priori de l'erreur entre la solution y du problème de Cauchy et la solution approchée y_h ; la partie III enfin proposait d'étudier le comportement asymptotique de l'erreur $y_n-y(t_n)$ lorsque $h_n = t_n-t_{n-1} = h\,\Theta(t_n)$ avec h voisin de zéro.

II. Observations générales

Ce problème fait appel à des techniques classiques d'Analyse numérique (normes vectorielles et matricielles, interpolation, équations différentielles) ainsi qu'à des résultats d'Algèbre linéaire de niveau DEUG A2. Nous pensions qu'il serait bien traité ou au moins bien abordé par un grand nombre de candidats ; il n'en a rien été hélas ce qui semble indiquer que les candidats n'attachent pas assez de temps à une préparation sérieuse des options et que, pour la plupart, ils ne savent pas utiliser leurs connaissances mathématiques pour la résolution d'un problème simple d'Analyse numérique.

Nous avons relevé des lacunes importantes notamment :

- en Algèbre linéaire : la réduite de Jordan d'une matrice semble mal connue ; de même les conditions spectrales ou de norme pour que la puissance $n^{\text{ème}}$ d'une matrice converge vers 0 quand n tend vers l'infini
- la formule de Taylor vectorielle avec reste intégral (lacune déjà signalée dans les deux rapports précédents) est ignorée
- les résultats élémentaires sur l'interpolation, en particulier sur la forme de Lagrange du polynôme d'interpolation, ne sont pas connus de beaucoup.

III. Indications sur la solution du problème

Q.1. : Cette question simple sur les normes matricielles a été bien résolue ; il convenait de faire attention que les composantes u_i de U appartenaient à un espace vectoriel E de dimension r.

Q.2. a : On démontre d'abord que la dimension de l'espace propre associé à chaque valeur propre λ de R est de dimension 1 ; puis que la réduite de Jordan $J = P\,R\,P^{-1}$ de R possède un bloc élémentaire d'ordre $\geqslant 2$; on en déduit que J^n n'est pas bornée quand $n \to \infty$ et par suite $R^n = P^{-1}\,J^n\,P$ non plus.

Q.2. b : La condition nécessaire se démontre en deux temps : si λ est une valeur propre de R on a $|\lambda| < 1$; et si λ est tel que $|\lambda| = 1$ et λ de multiplicité $\geqslant 2$ alors R^n n'est pas borné quand $n \to \infty$ d'après Q.2. a, ce qui est contradictoire avec $\|R^n\|_1 = \|H\,(H^{-1}\,R\,H)\,H^{-1}\|_1 \leqslant \|H\|_1 \,.\, \|H^{-1}\|_1$.

Réciproquement la construction de H résulte de la mise sous forme de Jordan de R : $R = P^{-1} J P$ avec $J = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_p,J_{p+1},\ldots,J_n)$ avec $|\lambda_i| = 1$, $i = 1,\ldots,p$ et $|\lambda_i| < 1$ pour $i = p+1,\ldots,m$, où on peut choisir

$$J_{k,\varepsilon} = \begin{pmatrix} \lambda_k & \varepsilon & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $|\lambda_k| + \varepsilon < 1$,

$k = p+1,\ldots,m$. (On passe de $J_{k,1}$ à $J_{k,\varepsilon}$ avec $\varepsilon \neq 1$ par $J_{k,\varepsilon} = P_\varepsilon^{-1} J_{k,1} P_\varepsilon$ $P_\varepsilon = \mathrm{diag}(1,\varepsilon,\ldots,\varepsilon^q)$.

Q.2. c : On remarque d'abord que $\lambda = 1$ est valeur propre de R associé à $\xi = (1,\ldots$ et en procédant comme en Q.2. b on construit H tel que $H^{-1} R H = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & R_1 \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$ avec

$\|R_1\|_1 < 1$. En posant $H^{-1} S H = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & S_1 \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$ et en utilisant la continuité de la norme matricielle en fonction des coefficients de la matrice on montre que pour ε assez petit $\|S_1\|_1 < 1$.

Le raisonnement de la réciproque de Q.2 b et de Q.2. c a beaucoup dérouté les candidats semble-t-il.

<u>Partie I.</u>

Q.3. L'existence de $g \in \mathcal{C}(E)$ pour t, y et z fixés résulte de la formule de Taylor avec reste intégral et de la condition de Lipschitz $\|D_y f(t,y)\| \leqslant L$. Attention, lorsque f est à valeurs dans E espace vectoriel de dimension $r > 1$, on ne pouvait pas appliquer la formule des accroissements finis.

Q.4. a et b : Il suffisait d'exprimer $\pi_{n,r}(t)$ comme combinaison linéaire des polynômes de Lagrange associés aux points $(t_{n-r},y_{n-r}),\ldots(t_{n-1},y_{n-1})$, (t_n,z) et de dériver $\pi_{n,r}$ en t_n. La suite n'était que du calcul un peu technique mais sans difficultés ; beaucoup de candidats n'ont pas su les maîtriser.

Q.4. c : $a_{n,i}$ et b_n sont des fractions rationnelles de $\frac{h_{n+1}}{h_n}$ d'où la majoration .

Q.4. d : Les relations demandées résultaient du fait que la méthode d'approximation était exacte (i.e sans erreur) en prenant $z = y_{n-i} \equiv 1$ et $y_{n-i} = t_{n-i}$, $z = t_n$ respectivement.

Q.4. e : L'existence et l'unicité de y_n résultaient du théorème du point fixe appliqué à $y \to \sum_{i=1}^{r} a_{ni}\, y_{n-i} + h_n\, b_n\, f(t,y)$.

Q.5. a : La majoration de $\|\varepsilon_n(z)\|$ s'obtenait en développant en série de Taylor avec reste intégral à l'ordre r+1, $z(t_{n-i})$ au voisinage de t_n, en sommant sur i et en remarquant que les termes en $z^{(k)}(t_n)$, $k = 1,\ldots,r$, s'annulaient du fait que la méthode est exacte lorsque z(.) est un polynôme de degré $\leqslant r$, et en majorant le terme en $z^{(r+1)}$ à partir de Q.4. c.

Q.5. b : Démonstration analogue en poussant le développement de Taylor à l'ordre r+2 ; l'expression de $\gamma_{n,r}$ s'obtient en prenant $z(t) = (t-t_{n-r})\ldots(t-t_n)$.

Partie II.

On se proposait d'étudier la stabilité de la méthode et d'obtenir une majoration de l'erreur $y_n-y(t_n)$.

Q.6. a : La relation résulte immédiatement de Q.3 avec

$$R_n = \begin{pmatrix} a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,r} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad E_n = (-\varepsilon_n, 0, \ldots, 0)^t.$$

Q.6. b : La seule difficulté vient de la vérification de la condition (D) lorsque r = 4 pour laquelle il faut localiser les valeurs propres de R_4.

Q.6. c : Le résultat suit de Q.2. c en remarquant que R_n et R appartiennent à $\mathcal{S}$ et que les coefficients $a_{n,i}$ et b_n sont des fractions rationnelles de $\frac{h_{n+1}}{h_n}$ au voisinage de 1.

Q.6. d : On écrit que $H^{-1}(I - h_n b_n G_n)^{-1} H = (I - h_n b_n H^{-1} G_n H)^{-1}$ puis on majore facilement.

Q.6. e : On majore d'abord $\|H^{-1} U_n\|_1$ en fonction de $\|H^{-1} U_{n-1}\|_1$ et $\|H^{-1} E_n\|_1$ en écrivant

$$(I - h_n b_n G_n)^{-1} = I + h_n b_n G_n (I - h_n b_n G_n)^{-1}$$

et en utilisant Q.6. c et Q.6. d.

On en déduit alors la majoration de $\|U_n\|_1$.

Q.7. La majoration demandée résulte de Q.6. e en prenant $z_n = y(t_n)$ et $\varepsilon_n = \varepsilon_n(y(.))$ où y(.) est la solution du problème de Cauchy, puis en utilisant Q.5. b.

Partie III.

On se proposait d'étudier le comportement asymptotique de l'erreur lorsque le pas h est variable selon une loi $h_n = h\,\theta(t_n) + O(h_n^2)$.

Q.8. a : On calcule explicitement

$$(I - h_n b_n G_n) V_n - R_n V_{n-1}$$

dont seule la première composante est non nulle ; on écrit que $g(t_n, y_n, y(t_n)) = g(t_n) + O(h_n)$ et, en utilisant la définition de e(.) et Q.5. b, le résultat suit avec $F_n = \varphi(t_n)\ (1,0,\ldots,0)^t$.

Q.8. b : De la même manière on obtient la majoration cherchée par un calcul explicite de $W_n - S_n W_{n-1}$ en supposant $|\gamma_{n,r} - \gamma_n| \leqslant C.h_n$ et en prenant $\varphi(t) = \gamma_r\, \Theta(t)^r\, y^{(r+1)}(t)$. La majoration de $\gamma_{n,r} - \gamma_n$ résulte de ce que $\gamma_{n,r}$ est une fraction rationnelle de $\frac{h_{n+1}}{h_n}$ donc continue au voisinage de 1.

Q.8. c : On utilise l'inégalité de stabilité analogue à Q.6 pour $W_n = U_n - h^r V_n$ d'où le résultat avec $\omega(.) = e(.)$.

Q.9. a : On écrit $S_n - R = (S_n - R_n) + (R_n - R)$, on majore $\|S_n - R_n\|_1$ par $h_n\, L\, C_1(\delta) / (1 - h_n\, L\, C_1(\delta))$, et $\|R_n - R\|_1$ par $C\, h_n$ en utilisant la continuité des coefficients $a_{n,i}$ en fonction de h_{n+1}/h_n au voisinage de 1.

Q.9. b : On écrit :

$$X_n = H^{-1} R H X_{n-1} + H^{-1}(S_n - R) H X_{n-1}$$

où H est choisi comme en Q.2. b avec $\|R_1\| < 1$; on majore $\|S_n - R\|_1 \leqslant C.h_n$ d'après Q.9. a, d'où l'on déduit les inégalités cherchées pour $h \leqslant h^*$ assez petit.

Q.9. c : On majore $1 + C_{16} h_n$ par $e^{C_{16} h_n}$ et $(1 + C_{16} h_n) C_{16} h_n$ par $e^{2 C_{16} h_n}$ et on démontre par récurrence les inégalités sur α_n et β_n avec $\varphi_n = \varphi_{n-1} + C_{16} \tau^{n-r}$.

Q.9. d : On définit $e_1(.)$ solution du problème de Cauchy $e_1'(t) = g(t)\, e_1(t)$, $e_1(0) = 1$, puis $Q_n = (e_1(t_n), \ldots, e_1(t_{n-r}))^t$. On pose :

$W_n^* = U_n - h^r V_n - \sigma h^r Q_n$, $X_n = H^{-1} W_n^*$ où H est choisi comme en Q.9. b.

On détermine σ de façon que $\|X_{r-1}\| \leqslant C\, h^{r+1}$ i.e

$$\sigma = \sum_{\mu=0}^{r-1} H_{1\mu}^{-1} C_\mu \text{ d'où :}$$

$$\|X_n\|_1 \leqslant C\,(h^{r+1} + \tau\, h^r).$$

Donc pour $t_n \geqslant t^*$ tel que $n \geqslant \frac{t^*}{h}$ on a $\|X_n\|_1 \leqslant C\, h^{r+1}$ et

$$y_n - y(t_n) - h^r \tilde{\omega}(t_n) = O(h^{r+1}) \text{ avec } \tilde{\omega}(t) = e(t) + \sigma\, e_1(t).$$

IV. Répartition des notes

Tout candidat ayant traité correctement les préliminaires et construit la méthode d'approximation obtenait la moyenne. Très peu de candidats ont abordé la partie III qui était la partie la plus originale du problème .

Nombre de copies corrigées : 565

Moyenne des notes : 6,2.

0 à 2	3 à 7	8 à 12	13 à 16	17 à 19	20 à 23	24 à 30	31 à 40
258	119	91	41	21	15	13	7

MÉCANIQUE

Durée : 6 heures

MOUVEMENT D'UN MAILLAGE

Première partie. — GÉNÉRALITÉS

Soit $O_1 \vec{x}_1 \vec{y}_1 \vec{z}_1$ un repère absolu orthonormé R_1 et $O \vec{u}_1 \vec{u}_2 \vec{u}_3$ un repère variable R non nécessairement orthonormé. La position de R par rapport à R_1 est définie par les coordonnées α_{i0} du point O et les composantes α_{ij} du vecteur $\vec{u}_j$ $(i, j = 1, 2, 3)$.

On appelle maillage l'ensemble des $(2n+1)^3$ points matériels M_{klm} de même masse $\dfrac{\mu}{(2n+1)^3}$, ayant pour coordonnées k, l, m dans le repère R. (k, l, m entiers relatifs compris entre $-n$ et $+n$). La position du maillage par rapport à R_1 est donc définie par les 12 paramètres α_{ij} $(i = 1, 2, 3;\ j = 0, 1, 2, 3)$.

1° Calculer l'énergie cinétique T du maillage. (On rappelle que la somme des carrés des n premiers entiers est égale à $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; on posera $K = \dfrac{n^2+n}{3}$).

On suppose connues les expressions de la puissance virtuelle des forces intérieures $\mathcal{P}_I^*$ et de la puissance virtuelle des forces extérieures $\mathcal{P}_E^*$ qui sont des formes linéaires des dérivées virtuelles $\dot{\alpha}_{ij}^*$:

$$\mathcal{P}_I^* = \sum_{i,j} \mathcal{Q}_{Iij}\, \dot{\alpha}_{ij}^* \qquad \mathcal{P}_E^* = \sum_{i,j} \mathcal{Q}_{Eij}\, \dot{\alpha}_{ij}^*$$

Écrire les équations définissant le mouvement du maillage.

2° On désigne par $\overleftrightarrow{\mathcal{J}}$ le tenseur d'inertie en O du maillage et par $\vec{\sigma}_O$ le moment cinétique en O du maillage. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{\Omega}_1$ tel que $\vec{\sigma}_O = \overleftrightarrow{\mathcal{J}}.\vec{\Omega}_1$. A quelle condition ce vecteur est-il déterminé de façon unique ? Dans la suite du problème, on appellera ce vecteur « rotation instantanée » du maillage.

3° On désigne par $\vec{V}_{klm}$ le vecteur vitesse du point M_{klm}. A tout vecteur $\vec{\Omega}$ on associe un ensemble de vecteurs

$$\vec{V}_1(M_{klm}) = \vec{V}_{000} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}_{klm}$$

Déterminer le vecteur $\vec{\Omega}$ tel que la quantité :

$$\sum_{k,l,m} [\vec{V}_{klm} - \vec{V}_1(M_{klm})]^2$$

soit minimum. Montrer que la solution de ce problème coïncide avec le vecteur $\vec{\Omega}_1$ défini à la question précédente.

4° Soit $O \vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{v}_3$ le repère principal d'inertie du tenseur $\overleftrightarrow{\mathcal{J}}$, en supposant que celui-ci est défini de façon unique. Soit $\vec{\Omega}_2$ la rotation instantanée du repère $O \vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{v}_3$ par rapport à R_1. Montrer que $\vec{\Omega}_2$ est en général différent de $\vec{\Omega}_1$. (On pourra construire un contre-exemple correspondant au cas où $\vec{\Omega}_2 = 0$ et $\vec{\Omega}_1 \neq 0$.)

On désigne par U_{ij} les composantes du vecteur $\vec{u}_j$ sur la base $\vec{v}_i$. Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que $\vec{\Omega}_2 = \vec{\Omega}_1$ est que le système des relations

$$\sum_k \dot{U}_{ik} U_{jk} = 0$$

soit vérifié à tout instant t et pour tout couple i, j tel que $i \neq j$. Montrer que cette circonstance se trouve en particulier réalisée dans les deux cas suivants :

a. Les vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, se déduisent de leur position initiale $\vec{u}_{10}$, $\vec{u}_{20}$, $\vec{u}_{30}$ par le produit d'une rotation $\mathcal{R}(t)$ et d'une multiplication par un scalaire $\lambda(t)$, fonctions du temps. On appellera $\lambda(t)$ la dilatation.

b. L'un des vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, reste orthogonal aux deux autres, ces derniers ayant même longueur (on prendra par exemple $\vec{u}_3\,\vec{u}_1 = \vec{u}_3\,\vec{u}_2 = 0$ avec $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2|$.

5° On appelle vitesse de déformation au point M_{klm} la différence

$$\Delta \vec{V}_{klm} = \vec{V}_{klm} - \vec{V}_1(M_{klm})$$

calculée à partir du vecteur $\vec{\Omega}_1$ défini à la question 2°. On appelle énergie cinétique de déformation du maillage l'énergie cinétique T_Δ calculée pour l'ensemble des vecteurs $\Delta \vec{V}_{klm}$ et énergie cinétique de déplacement T_S celle calculée pour l'ensemble des vecteurs $\vec{V}_1(M_{klm})$. Comparer T, T_S et T_Δ.

6° Appliquer les théorèmes généraux de la dynamique au maillage (théorème du mouvement du centre d'inertie et théorème du moment dynamique). Montrer qu'on peut retrouver ces résultats à partir des équations obtenues à la question 1° en utilisant un ensemble de vitesses virtuelles solidifiant le maillage. Former les conditions liant les $\mathcal{Q}_{Iij}$ et les α_{ij} pour que l'énoncé suivant soit valable : « la puissance virtuelle de l'ensemble des forces intérieures est nulle pour tout champ de vitesses virtuelles solidifiant le système ». On supposera ces conditions toujours réalisées dans la suite du problème.

7° On appelle déformation pure du maillage tout mouvement pour lequel on a constamment $\vec{V}(O) = \vec{\Omega}_1 = 0$. Caractériser une déformation pure par des relations entre les α_{ij} et leurs dérivés $\dot{\alpha}_{ij}$. Caractériser au moyen d'une part du torseur des forces extérieures, d'autre part des données initiales, les problèmes qui ont pour solution un mouvement de déformation pure du maillage. Les forces extérieures peuvent-elles intervenir dans cette déformation pure ?

Deuxième partie. — APPLICATIONS

1° On suppose que les forces intérieures sont des forces attractives proportionnelles à la distance, M_{klm} exerçant sur $M_{k'l'm'}$ la force $f\,\overrightarrow{M_{k'l'm'}M_{klm}}$ (et $M_{k'l'm'}$ exerçant sur M_{klm} la force opposée). f est un coefficient constant. Montrer que ces forces dérivent d'une fonction de force que l'on calculera pour l'ensemble du maillage. On suppose également qu'il existe des forces extérieures dont la puissance virtuelle est définie par les coefficients

$$\mathcal{Q}_{Ei0} = -\,h\alpha_{i0}$$
$$\mathcal{Q}_{Eij} = -\,h(\alpha_{ij} - a_{ij}) \qquad (j = 1, 2, 3)$$

les quantités h et a_{ij} étant des constantes.

Former les équations du mouvement et décrire les mouvements du maillage.

2° On se place dans la situation décrite dans la 1[re] partie 4°, *a.* On utilise le repère principal d'inertie $O\vec{v}_1\,\vec{v}_2\,\vec{v}_3$ et on appelle p, q, r les composantes de la rotation instantanée $\vec{\Omega}_1$ sur ce repère. On suppose que l'ensemble des forces intérieures dérive d'une fonction $\mathcal{U}(\lambda)$ et qu'il n'y a pas de forces extérieures. Enfin on désignera par A, B, C les moments principaux d'inertie du maillage dans la position définie par $\vec{u}_{10}$, $\vec{u}_{20}$, $\vec{u}_{30}$.

Former les équations du mouvement. Montrer qu'on peut en déduire une équation de la forme $\dot{\lambda}^2 = F(\lambda)$. (On précisera l'expression de F). Montrer qu'en posant $P = \lambda^2 p$, $Q = \lambda^2 q$, $R = \lambda^2 r$ et en substituant à la variable t un paramètre τ convenablement choisi, on retrouve pour définir les variations de P, Q, R les équations de Poinsot.

3° On se place dans la situation décrite dans la 1[re] partie 4°, *b.* On utilise le repère $Oxyz$ où Ox, Oy sont les bissectrices de $O\vec{u}_1$, $O\vec{u}_2$ et où Oz est le support de $\vec{u}_3$. On utilise les paramètres λ_1, λ_2, θ définis par $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = \lambda_1(t)\,a$, $|\vec{u}_3| = \lambda_2(t)\,a$, $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 2\theta$ et les composantes p, q, r de $\vec{\Omega}_1$ sur $Oxyz$. Former les équations différentielles liant les quantités p, q, r, λ_1, λ_2, θ. Montrer que ce système admet deux intégrales premières. On supposera que les forces intérieures dérivent d'une fonction de force $\mathcal{U}(\lambda_1, \lambda_2, \theta)$ et qu'il n'y a pas de forces extérieures.

Première partie

1°) Un petit travail de sommation conduisait à l'expression

$$2T = \mu\left[\sum_i \dot{\alpha}_{i0}^{\,2} + K \sum_{i,j} \dot{\alpha}_{ij}^{\,2}\right]$$

Les équations du mouvement s'en déduisent par application du principe des puissances virtuelles sous la forme

$$\mu \ddot{\alpha}_{i0} = Q_{Ii0} + Q_{Ei0} \qquad (i = 1,2,3)$$

$$\mu K \ddot{\alpha}_{ij} = Q_{Iij} + Q_{Eij} \qquad (i,j = 1,2,3)$$

2°) Le tenseur d'inertie ne dépendant que de la répartition des masses à un instant donné, le résultat suivant établi dans les cours de 1ercycle reste valable pour un maillage : les valeurs propres de la matrice d'inertie sont les moments principaux d'inertie; ceux-ci sont toujours strictement positifs et donc $\vec{\Omega}_1$ est défini de façon unique par la relation $\vec{\sigma}_O = \overleftrightarrow{J} . \vec{\Omega}_1$, à l'exception du cas où toutes les masses sont concentrées sur un axe (les vecteurs $\vec{u}_j$ sont alors colinéaires, on a une condition de compatibilité $\vec{\sigma}_c \cdot \vec{u}_j = 0$ et le vecteur $\vec{\Omega}_1$ est défini à une composante arbitraire près suivant $\vec{u}_j$.)

3°) La somme à étudier étant considérée comme fonction de $\vec{\Omega}$, son gradient est

$$2\left[\sum_{klm} \left\{\overrightarrow{CM}_{klm} \wedge \vec{V}_{klm}\right\} - \frac{1}{\mu}\overleftrightarrow{J} . \vec{\Omega}\right]$$

comme on le vérifie par exemple par un calcul matriciel. La condition d'extremum conduit donc au vecteur $\vec{\Omega}_1$ déjà défini. Le fait que cet extremum est un minimum résulte de ce que la partie quadratique de la somme initiale est définie positive.

4°) Un contre-exemple est obtenu en supposant que $O\vec{v}_1\vec{v}_2\vec{v}_3$ est fixe et confondu avec $O_1x_1y_1z_1$ ce qui s'exprime par $\sum_k \alpha_{ik}\alpha_{jk} = 0 \quad \forall i,j \ (i \neq j)$

Cette condition implique $\sum_k (\dot{\alpha}_{ik}\alpha_{jk} + \alpha_{ik}\dot{\alpha}_{jk}) = 0$, mais est compatible avec $\sum_k(\dot{\alpha}_{ik}\alpha_{jk} - \alpha_{ik}\dot{\alpha}_{jk}) \neq 0$ c'est-à-dire $\vec{\sigma}_c \neq 0$ donc $\vec{\Omega}_1 \neq 0$.

En partant des U_{ij} on obtient en utilisant les dérivées

$$\dot{\vec{u}}_i = \left(\frac{d}{dt}\vec{u}_i\right)_{rel} + \vec{\Omega}_2 \wedge \vec{u}_i$$

$$\vec{\sigma}_O = \mu K \sum_i \vec{u}_i \wedge \left(\frac{d\vec{u}_i}{dt}\right)_{rel} + \overleftrightarrow{J} . \vec{\Omega}_2$$

On aura donc $\vec{\sigma}_O = \overleftrightarrow{J} . \vec{\Omega}_2$ si et seulement si

$$\sum_k (U_{ik}\dot{U}_{jk} - \dot{U}_{ik}U_{jk}) = 0$$

Tenant compte du fait que les axes utilisés sont axes principaux d'inertie, on a aussi $\sum_k U_{ik}U_{jk} = 0$ et donc $\sum_k (U_{ik}\dot{U}_{jk} + \dot{U}_{ik}U_{jk}) = 0$ d'où on déduit le résultat demandé.

Ces relations sont vérifiées directement dans le cas a) (la dilatation laisse invariants les axes principaux d'inertie) et il était facile de mettre en place les axes principaux d'inertie dans le cas b), donc d'utiliser les U_{ij}.

5°) Par développement du carré $\left[\Delta\vec{V}_{klm} + \vec{V}_1(M_{klm})\right]^2$

on obtient

$$2T = 2T_\Delta + 2T_S + \frac{2\mu}{(2n+1)^3}\sum_{klm}\left[\vec{V}_{klm} - \vec{V}_1(M_{klm})\right]\vec{V}_1(M_{klm})$$

et le troisième terme se réduit à la somme

$$2\mu K\sum_i\left(\dot{\vec{u}}_i - \vec{\Omega}\wedge\vec{u}_i\right).\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{u}_i\right) = \vec{\Omega}\left[\vec{\sigma}_0 - \mathcal{J}.\vec{\Omega}\right] = 0$$

On a donc $T = T_\Delta + T_S$

6°) Le théorème du centre d'inertie donne le mouvement de O. Comme les forces extérieures doivent seules intervenir, ceci exige $Q_{Iio} = 0 \ \forall i$

Le théorème du moment donne $\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \vec{m}$

On retrouve ces résultats en choisissant pour champ de vitesses virtuelles soit une translation, soit une rotation autour de O.

Les relations demandées entre les Q_{Iij} et les α_{ij} sont

$$\sum_k\left(\alpha_{ki}\,Q_{Ikj} - \alpha_{kj}\,Q_{Iki}\right) = 0 \quad \forall i,j$$

7°) Une déformation pure est définie par

$$\dot{\alpha}_{io} = 0 \quad \forall i \qquad et \qquad \sum_k\left(\alpha_{ik}\,\dot{\alpha}_{jk} - \alpha_{jk}\,\dot{\alpha}_{ik}\right) = 0 \quad \forall i,j$$

Le torseur des forces extérieures est nul, et les données initiales satisfont à $\vec{V}(0) = 0$, $\vec{\Omega} = 0$; ces conditions sont suffisantes d'après la question précédente. A noter que les forces extérieures peuvent très bien intervenir dans le mouvement (par exemple des forces de compression pour un mouvement de dilatation).

Deuxième partie

1°) La fonction de force est de la forme

$$\mathcal{U} = -\frac{k}{3}\,m^3(n+1)(2n+1)^4\left[|\vec{u}_1|^2 + |\vec{u}_2|^2 + |\vec{u}_3|^2\right]$$

Les équations du mouvement sont donc linéaires, et de plus les différents paramètres sont découplés. L'étude des vibrations est classique.

2°) L'énergie cinétique et le moment cinétique se présentent sous la forme

$$2T = \lambda^2(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \dot{\lambda}^2\,\frac{A+B+C}{2}$$

$$\vec{\sigma}_0 = (\lambda^2 Ap,\ \lambda^2 Bq,\ \lambda^2 C)$$

Les équations du mouvement sont donc

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\lambda^2 Ap) + \lambda^2 qr(C-B) = 0 \\ \frac{d}{dt}(\lambda^2 Bq) + \lambda^2 rp(A-C) = 0 \\ \frac{d}{dt}(\lambda^2 Cr) + \lambda^2 pq(B-A) = 0 \end{cases} \qquad avec\ T = U + h$$

On en déduit l'intégrale première

$$A p^2 + B q^2 + C r^2 = \frac{C_1}{\lambda^4} \qquad (C_1 = \text{Constante})$$

puis l'équation définissant les variations de λ :

$$\dot{\lambda}^2 = \frac{2(U+h)}{\frac{A+B+C}{2}} - \frac{C_1}{\lambda^2}$$

Il suffit de compléter le changement de variables indiqué par $d\tau = \lambda^2 d$
pour retrouver les équations du mouvement de Poinsot.

3°)En utilisant d'une part les équations du moment et d'autre part les équations de Lagrange par rapport aux paramètres λ_1 , λ_2 et θ on obtient, en posant $2\mu K a^2 = I$

$$\frac{d}{dt}\left[(\lambda_1^2\cos^2\theta + \lambda_2^2) I p\right] + I q r (\lambda_1^2 \cos^2\theta - \lambda_2^2) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[(\lambda_1^2\sin^2\theta + \lambda_2^2) I q\right] + I r p (\lambda_2^2 - \lambda_1^2 \sin^2\theta) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\lambda_1^2 I r\right] - I p q \lambda_1^2 \cos 2\theta = 0$$

$$I \ddot{\lambda}_2 - I \lambda_2 (p^2 + q^2) = \frac{\partial U}{\partial \lambda_2}$$

$$I \ddot{\lambda}_1 - I \lambda_1 (p^2\cos^2\theta + q^2 \sin^2\theta) = \frac{\partial U}{\partial \lambda_1}$$

$$\frac{d}{dt}(I \lambda_1^2 \dot{\theta}) - I \lambda_1^2 \sin\theta\cos\theta\, (q^2 - p^2) = \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

Les intégrales premières demandées sont T = U + h et $|\vec{\sigma_0}| = C^{te}$

Observations

Si la première question a été résolue par de nombreux candidats, beau-coup ont perdu du temps ensuite par des maladresses. A la quatrième ques-tion, certains ont obtenu la relation intermédiaire citée ci-dessus mais n'ont pas su conclure. L'un a même conclu à une erreur d'énoncé ! La cin-quième question a été assez rarement traitée de façon correcte, par con[tre] les deux suivantes ont enregistré plus de succès.

La deuxième partie débutait par une question facile et que ceux qui l'ont abordée ont en général traitée assez correctement. La suite a per[mis] de distinguer quelques rares copies dont le niveau était nettement supé-rieur à la moyenne.

Résultats

Pour 152 copies de mécanique, les notes se répartissent de la façon suivante :

0	de 1 à 5	de 6 à 10	de 11 à 15	de 16 à 20	plus de 20
16	73	33	16	10	4

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Durée : 6 heures

NOTATIONS ET RAPPELS

1° On note 1_A la fonction indicatrice d'une partie A d'un ensemble $\mathcal{X}$.

2° L'ensemble des entiers naturels est désigné par $\mathbb{N}$. On note $\mathcal{B}_n$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$ et on écrit $\mathcal{B}$ à la place de $\mathcal{B}_1$. Enfin $\mathcal{B}_\infty$ désigne la plus petite tribu sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui, pour toute partie finie $J \subset \mathbb{N}$, rend mesurable la projection canonique Π_J de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^J$.

3° Toutes les variables aléatoires considérées sont prises sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ est appelée variable aléatoire réelle (en abrégé v.a.r.). Le symbole $E(X)$ désigne, quand elle existe, l'espérance mathématique de la v.a.r. X, relativement à P.

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ou dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on note $\mathcal{C}(X)$ la sous-tribu de $\mathcal{F}$ engendrée par X et par P_X la loi de X, mesure image de P par X.

4° On rappelle que toute suite $(X_n ; n \in \mathbb{N})$ de v.a.r. définit une variable aléatoire $\underline{X}$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}_\infty)$ et que la loi $P_{\underline{X}}$ de cette suite $\underline{X} = (X_n ; n \in \mathbb{N})$ est déterminée de façon unique par ses valeurs sur l'algèbre des cylindres $\Pi_J^{-1}(B)$ où J décrit l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ et B l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}^J$.

5° Soit $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'espace des (P-classes de) v.a.r. intégrables sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Pour toute sous-tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ et pour toute v.a.r. $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on désigne par $E(X/\mathcal{G})$ l'espérance mathématique conditionnelle de X par rapport à $\mathcal{G}$.

Si Z est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, on note plus simplement $E(X/Z)$ au lieu de $E(X/\mathcal{C}(Z))$ et on désigne par $E(X/Z = \cdot)$ l'unique élément de $L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, P_Z)$ tel que pour toute $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ borélienne et bornée, on ait :

$$E(X\,g(Z)) = \int_{\mathbb{R}^n} E(X/Z = z) \,.\, g(z)\, P_Z(dz).$$

6° On désigne par δ_0 la mesure de Dirac sur $\mathbb{R}$ au point zéro. Si μ est une probabilité borélienne sur $\mathbb{R}$, on note μ_n la puissance $n^{\text{ième}}$ de convolution de μ, c'est-à-dire $\mu_0 = \delta_0$, $\mu_1 = \mu$, $\mu_{n+1} = \mu_n * \mu$ pour $n \geqslant 1$.

PRÉLIMINAIRE

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne et bornée.

Montrer que

$$E(f(X, Y)/X = x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y)\, P_Y(dy) \qquad P_X \text{ presque-sûrement}$$

PARTIE I

Soit $\underline{X} = (X_n \; ; \; n \in \mathbb{N})$ une suite de v.a.r. positives ou nulles. On suppose que :

a. la suite $(X_n \; ; \; n \in \mathbb{N})$ est une suite indépendante de v.a.r.;

b. les v.a.r. $X_1, X_2, \ldots$ ont toutes la même loi μ supposée différente de δ_0.

On note ν la loi de X_0 et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i$$

On désigne d'autre part pour tout réel $t > 0$, par N_t la variable aléatoire à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}$, définie par

$$N_t = \sum_{n \geqslant 0} 1_{[0,\, t]} \circ S_n \qquad \text{(nombre des } S_n \in [0, t])$$

1° *a.* Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $P\left(\bigcap_{n \geqslant 0} \bigcup_{i \geqslant n} \{X_i \geqslant \varepsilon\}\right) = 1.$

b. En déduire que pour tout $t > 0$, $P(N_t = +\infty) = 0.$

c. Montrer de plus que

$$P\left(\bigcap_{t > 0} \{N_t < +\infty\}\right) = 1 \quad \text{alors que } \{\lim_{t \to +\infty} N_t = +\infty\} = \Omega.$$

On suppose dans la suite que $0 < \int x \mu(dx) = m < +\infty$.

2° Montrer que $\dfrac{N_t}{t}$ converge presque-sûrement vers $\dfrac{1}{m}$, quand $t \to +\infty$ (on remarquera que $S_{N_t - 1} \leqslant t < S_{N_t}$)

3° On suppose dans cette question, que $\nu = \delta_0$ et que μ est la loi de Bernoulli de paramètre p $(0 < p < 1)$:

$$\mu(\{1\}) = p, \qquad \mu(\{0\}) = 1 - p = q.$$

a. Calculer $P(N_t = k)$ pour k entier $\geqslant 1$.

b. Calculer $E(N_t)$ puis étudier $\dfrac{E(N_t)}{t}$ quand $t \to +\infty$.

c. Calculer $E(N_t^2)$ puis en déduire que $\operatorname{Sup}_{t \geqslant 1} \dfrac{E(N_t^2)}{t^2} < +\infty$.

4° On revient au cas général.

a. Utiliser 3° pour démontrer que N_t admet des moments de tous les ordres et que

$$\operatorname{Sup}_{t \geqslant 1} \frac{E(N_t^2)}{t^2} < +\infty.$$

b. Déduire de ce qui précède et de 2°, que $\dfrac{E(N_t)}{t} \to \dfrac{1}{m}$ quand $t \to +\infty$.

c. Qu'arrive-t-il si $\int x \mu(dx) = +\infty$?

5°

a. Montrer que f définie par $f(t) = \dfrac{\mu(]t, +\infty[)}{m} 1_{[0, +\infty[}(t)$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
Quelles sont les probabilités μ pour lesquelles la probabilité de densité f coïncide avec μ ?

b. Démontrer que si ν est la probabilité de densité f, alors

$$E(N_t) = \frac{t}{m} \qquad \text{quel que soit } t > 0.$$

(On pourra, soit effectuer un calcul direct, par exemple en utilisant la densité de $\nu * \mu_n$ (μ_n puissance $n^{\text{ième}}$ de convolution de μ), soit utiliser la transformée de Laplace).

Nous admettrons, ce qui pourra être utile pour la question suivante, que pour μ fixée, la probabilité de densité f est la seule loi ν telle que $E(N_t) = \frac{t}{m}$, quel que soit $t > 0$. (Ce résultat est obtenu facilement lorsque l'on utilise la deuxième méthode dans la question ci-dessus.)

6° On désigne par T une v.a.r. positive ou nulle indépendante de la suite $\underline{X} = (X_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ et on pose

$$\alpha_T = \operatorname{Inf}\{ n \in \mathbb{N} : S_n > T \}$$

(avec la convention usuelle que $\alpha_T = +\infty$ si $S_n \leqslant T$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, convention qui sera encore utilisée dans la suite).

On pose également pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_n^T = S_{\alpha_T + n} - T$$

(avec la convention $S_{+\infty} = +\infty$).

a. Montrer que α_T est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $P(\alpha_T = +\infty) = 0$ et $\{\alpha_T = k\} \in \mathcal{T}(X_0, X_1, \ldots, X_k, T)$ quel que soit $k \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n^T est une variable aléatoire positive.

c. En étudiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conjointe de S_0^T, $S_1^T - S_0^T$, $S_2^T - S_1^T$, $\ldots$, $S_{n+1}^T - S_n^T$, démontrer que la suite $(S_0^T,\ S_1^T - S_0^T,\ \ldots,\ S_{n+1}^T - S_n^T,\ \ldots)$ est une suite indépendante de v.a.r. et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1}^T - S_n^T$ a la loi μ.

d. Démontrer que si ν est la probabilité de densité f définie en 5°, *a*, alors S_0^T a pour densité de probabilité f.

7° Le but de la partie III est d'établir que pour une certaine classe de probàbilités μ, on a pour tout réel $h > 0$

$$\frac{E(N_{t+h} - N_t)}{h} \to \frac{1}{m} \qquad \text{quand } t \to +\infty.$$

a. Montrer que si pour $h > 0$, la limite quand $t \to +\infty$ de $\frac{E(N_{t+h} - N_t)}{h}$ existe, elle est nécessairement égale à $\frac{1}{m}$.

b. Montrer qu'il suffit d'établir l'existence de $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{E(N_{t+h} - N_t)}{h}$, pour $\nu = \delta_0$.

PARTIE II

(Cette partie est indépendante de la partie I.)

On désigne par Σ_n (n entier $\geqslant 1$) l'ensemble des permutations de $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ qui laissent invariants les entiers k tels que $k > n$. Et on pose $\Sigma = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} \Sigma_n$, ensemble des permutations finies de $\mathbb{N}^*$.

Soit $X = (X_n\ ;\ n \geqslant 1)$ une suite indépendante de v.a.r. ayant toutes la même loi. Pour $\sigma \in \Sigma$, on note X_σ la suite $(X_{\sigma(n)}\ ;\ n \geqslant 1)$.

Un événement $A \in \mathcal{T}(X)$ est dit symétrique relativement à X, si pour tout $\sigma \in \Sigma$, il existe $B \in \mathcal{B}_\infty$ tel que

$$A = \{ X \in B \} = \{ X_\sigma \in B \}.$$

1° *a.* Comparer P_X et P_{X_σ} pour $\sigma \in \Sigma$.

b. Soit A_n un événement de la forme $A_n = \{(X_1, \ldots, X_n) \in B_n\}$ avec $B_n \in \mathcal{B}_n$. Démontrer que si $A'_n = \{(X_{2n}, \ldots, X_{n+1}) \in B_n\}$, alors $P(A_n \cap A'_n) = (P(A_n))^2$.

c. Démontrer alors que pour tout événement $A \in \mathcal{T}(X)$, symétrique relativement à X, on a $P(A) = 0$ ou 1.

2° Comparer le résultat précédent avec la loi du tout ou rien de Kolmogorov qui concerne les événements asymptotiques, c'est-à-dire appartenant à $\bigcap_{n \geq 1} \mathcal{T}(X_k\ ;\ k \geq n)$. Donner un exemple d'un événement symétrique qui n'est pas asymptotique.

3° Soit X_0 une v.a.r. indépendante de la suite $X = (X_n\ ;\ n \geq 1)$. On note $\underline{X}$ la suite $(X_n\ ;\ n \geq 0)$ et on désigne par Σ' l'ensemble des permutations finies de $\mathbb{N}$ qui laissent invariant 0.

Soit A un événement appartenant à $\mathcal{T}(\underline{X})$ qui est symétrique relativement à X, c'est-à-dire tel que pour tout $\sigma \in \Sigma'$, il existe $B \in \mathcal{B}_\infty$ avec $A = \{\underline{X} \in B\} = \{\underline{X}_\sigma \in B\}$.

Adapter ce qui a été fait en 1° pour montrer que $E(1_A/X_0)$ ne prend presque-sûrement que les valeurs 0 ou 1.

PARTIE III

On rappelle que le support d'une probabilité μ borélienne sur $\mathbb{R}$ est le plus petit fermé F qui porte μ, c'est-à-dire tel que $\mu(F) = 1$; on le note supp μ. D'autre part on appelle symétrisée de μ, la loi μ^s de la différence de deux v.a.r. indépendantes de loi μ.

Soient $\underline{X} = (X_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ et $\underline{X}' = (X'_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ deux suites de v.a.r. positives ou nulles. On suppose que

a. la tribu $\mathcal{T}(\underline{X})$ est indépendante de la tribu $\mathcal{T}(\underline{X}')$.

b. la suite $(\mathcal{T}(X_n)\ ;\ n \in \mathbb{N})$ est une suite indépendante de sous-tribus de $\mathcal{F}$, de même que la suite $(\mathcal{T}(X'_n)\ ;\ n \in \mathbb{N})$.

c. toutes les X_n et X'_n pour $n \geq 1$, ont la même loi μ ayant une espérance mathématique m telle que $0 < \int x\,\mu(dx) = m < +\infty$.

d. l'ensemble $\bigcup_{n \geq 1}$ supp μ_n^s est dense dans $\mathbb{R}$, où μ_n^s désigne la puissance $n^{\text{ième}}$ de convolution de μ^s symétrisée de μ (condition qui est remplie s'il n'existe pas de réel $d \geq 0$ tel que $\{nd : n \in \mathbb{Z}\}$ porte μ^s).

e. $X_0 = 0$ alors que X'_0 a pour densité f définie en I, 5°.

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i$ et $S'_n = \sum_{i=0}^{n} X'_i$ et pour tout $t > 0$, $N_t = \sum_{n \geq 0} 1_{[0,t]} \circ S_n$ et $N'_t = \sum_{n \geq 0} 1_{[0,t]} \circ S'_n$.

Pour $j \in \mathbb{N}$, soit g_j la fonction définie sur les couples de suites croissantes de réels par : si $\underline{s} = (s_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ et $\underline{s}' = (s'_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$

$$g_j(\underline{s}, \underline{s}') = \operatorname{Inf}\{s'_n - s_j : n \in \mathbb{N}, s'_n - s_j > 0\}$$

On considère les variables aléatoires Z_j définies par $Z_j = g_j(\underline{S}, \underline{S}')$ où $j \in \mathbb{N}$, $\underline{S} = (S_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ et $\underline{S}' = (S'_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$.

Soit un réel $\delta > 0$ fixé. On pose pour $i \geq 0$,

$$A_i = \bigcup_{j \geq i} \{Z_j < \delta\}$$

1° Soit $i \in \mathbb{N}$. Posons comme dans I. 6° $\alpha_{S_i} = \operatorname{Inf}\{n \in \mathbb{N} : S'_n - S_i > 0\}$, et pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n^{S_i} = S_{n+i} - S_i$ et $S'^{S_i}_n = S'_{\alpha_{S_i}+n} - S_i$.

Vérifier que pour i et $k \in \mathbb{N}$, on a

$$Z_{i+k} = g_k(\underline{S}^{S_i}, \underline{S'}^{S_i})$$

et en déduire que

$$P(A_0) = P(A_i) = P(A_\infty) \text{ où } A_\infty = \bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i$$

2° *a.* En considérant la suite $X'_0, X_1, X'_1, X_2, X'_2, \dots$ que l'on désignera par $(Y_n ; n \in \mathbb{N})$, démontrer que $E(1_{A_\infty}/X'_0)$ ne prend presque-sûrement que les valeurs 0 ou 1.

b. Démontrer que $E(1_{A_1}/X'_0)$ est presque-sûrement strictement positif (pour cela on pourra comparer A_1 avec $\bigcup_{n \geqslant 1} \{0 < S'_n - S_n < \delta\}$).

c. Déduire de ce qui précède, la valeur commune des $P(A_t)$.

3° On considère les variables aléatoires presque-sûrement finies, définies par

$$K = \operatorname{Inf}\{ i \in \mathbb{N} : Z_i < \delta \}, \qquad K' = \operatorname{Inf}\{ j \in \mathbb{N} : S'_j > S_K \}.$$

a. Montrer que, quels que soient k et $k' \in \mathbb{N}$,
$\{K = k\} \cap \{K' = k'\} \in \mathscr{C}(X_0, \dots, X_k, X'_0, \dots, X'_{k'})$. Puis établir que les variables aléatoires $(S_K ; S_{K+n} - S_K)$ et $(S_K ; S'_{K'+n} - S'_{K'})$ ont même loi (n entier $\geqslant 1$).

b. Démontrer alors que pour tous réels $t > 0$ et $h > \delta$

$$E\Big(\sum_{n>0} 1_{]t+\delta,\, t+h]} \circ S'_{K'+n}\Big) \leqslant E\Big(\sum_{n>0} 1_{]t,\, t+h]} \circ S_{K+n}\Big) \leqslant E\Big(\sum_{n>0} 1_{]t,\, t+h+\delta]} \circ S'_{K'+n}\Big)$$

4° Soient t et h réels > 0.

a. Montrer que $N'_{t+h} - N'_t$ et N'_h ont même loi puis démontrer que

$$E\Big(\sum_{k \leqslant K'} 1_{]t,\, t+h]} \circ S'_k\Big) \to 0 \qquad \text{quand} \quad t \to +\infty$$

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(N_{t+h} - N_t > n) \leqslant P(N_h > n)$. En déduire le comportement quand $t \to +\infty$ de $E\Big(\sum_{k \leqslant K} 1_{]t,\, t+h]} \circ S_k\Big)$.

5° Déduire de tout ce qui précède que pour tout réel $h > 0$

$$\frac{E(N_{t+h} - N_t)}{h} \to \frac{1}{m} \qquad \text{quand} \quad t \to +\infty$$

6° On suppose maintenant que $\int x \mu(dx) = +\infty$ et que le support de μ est $[0, +\infty[$. On désigne par λ la mesure borélienne sur $[0, +\infty[$ telle que $\lambda([0, t]) = E(N_t)$ quel que soit $t > 0$.

a. Soient $\beta = \limsup_{t \to +\infty} E(N_{t+1} - N_t) = \limsup_{t \to +\infty} \lambda(]t, t+1])$ et (t_k) une suite tendant vers l'infini telle que $\lim_{k \to +\infty} \lambda(]t_k, t_k + 1]) = \beta$.

En étudiant $\int_{[0,\, t+1]} \lambda(]t - y, t + 1 - y])\, \mu(dy) - \beta$, montrer que pour tout j entier $\geqslant 1$, $\liminf_{k \to +\infty} \lambda(]t_k - j, t_k - j + 2]) \geqslant \beta$.

b. En étudiant alors l'intégrale $\int_{[0,\, t_k]} \mu(]t_k - y, +\infty[)\, \lambda(dy)$ et en tenant compte de la nature de la série $\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(]2i, +\infty[)$, démontrer que $\beta = 0$ et donc que pour tout réel $h > 0$, $\lim_{t \to +\infty} E(N_{t+h} - N_t) = 0$.

RAPPORT SUR L'ÉPREUVE «PROBABILITÉS ET STATISTIQUE»

I. Analyse du sujet

Le problème concernait les processus de renouvellement. Il se proposait notamment de faire établir :

a). Le premier théorème du renouvellement (Feller 1941) : s. est différent de δ_o, alors $\frac{E(Nt)}{t} \longrightarrow \frac{1}{m}$ quand $t \longrightarrow +\infty$ (partie I).

b). Le théorème du renouvellement de Blackwell (1953) : si de plus μ n'est pas portée par un ensemble de la forme $\{nd \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ $(d > 0)$, alors pour tout $h > 0$, $\frac{E(N_{t+h} - N_t)}{h} \longrightarrow \frac{1}{m}$ quand $t \longrightarrow +\infty$. (partie III).

Pour faire établir ce dernier résultat, on se servait d'une méthode probabiliste récemment publiée par Lindvall (1977). Cette méthode utilise une idée ancienne de Doeblin, qui consiste à associer au processus étudié, un processus indépendant de celui-ci, de même loi de renouvellement mais stationnaire : les deux processus "finiront par avoir deux points voisins" et à partir de là, leurs évolutions probabilistes seront "semblables". La méthode ne nécessite que des calculs élémentaires en dehors de l'utilisation de la loi du zéro-un de Hewitt et Savage (partie II). La condition d de la partie III est destinée à éviter de faire établir des résultats assez classiques sur la convolution.

II. Remarques générales

Ce problème, certes long, ne contenait aucune difficulté spéciale pour les candidats ayant une expérience moyenne de la conduite de calculs classiques. Celle-ci semble manquer à bon nombre de candidats. Le rapport de l'an dernier notait que les candidats semblaient plus à l'aise dans des raisonnements de type "théorie de la mesure" que dans les arguments probabilistes. Le caractère fortement probabiliste du problème de cette année explique sans doute la relative difficulté que les candidats ont trouvée à ce problème. De toutes façons "le meilleur reste le meilleur" : le candidat qui a dominé les épreuves écrites communes, a aussi largement surpassé les autres candidats dans l'épreuve "Probabilités et Statistiques", conduisant les calculs avec beaucoup de sûreté et d'énergie.

Au chapitre des erreurs ou méconnaissances versons deux points :

a). Soit μ une mesure σ-finie sur un anneau $\mathscr{R}$ de parties de Ω. Le théorème de Carathéodory affirme notamment que l'unique prolongement de μ en une mesure sur la tribu engendrée $\mathscr{T} = \mathscr{T}(\mathscr{R})$ coïncide sur $\mathscr{T}$ avec la mesure extérieure correspondante :

$$\mu^*(E) = \operatorname{Inf}(\Sigma \; \mu(A_n) \; ; \; E \subset \cup A_n \; , \; A_n \in \mathscr{R})$$

Il en résulte que, le prolongement de μ à $\mathcal{T}$ étant encore désigné par μ, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $A \in \mathcal{T}$ avec $\mu(A) < +\infty$, il existe $B \in \mathcal{R}$ tel que $\mu(A_{\Delta}B) < \varepsilon$.

Dans la partie II (question 1.c) il convenait d'appliquer ce résultat à une probabilité P. Cela a été très rarement fait.

b). Soient B un borélien de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et B_n le cylindre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dont la base est la projection de B sur $\mathbb{R}^n$. Il a été souvent affirmé dans la même question II. 1.c que $B = \bigcap_n B_n$. Cela est faux comme on pourra par exemple s'en persuader en prenant $B = \{x = (x_i) : \Sigma x_i^2 = 1\}$; alors $\bigcap B_n = \{x : \Sigma x_i^2 \leqslant 1\}$.

Remarquons que le Jury a eu, dans cette option, à se plaindre de la qualité de la rédaction de beaucoup de copies. Notons que la concision toujours souhaitable n'empêche pas d'indiquer les étapes d'un raisonnement ou d'un calcul, que les calculs doivent être lisibles, qu'une version exacte d'un raisonnement ou d'un calcul suivant sans commentaire une version erronée de la même partie ne saurait effacer celle-ci (!).

Notons également :

c). Les indices aléatoires n'ont pas toujours été bien compris ni maniés correctement. Par exemple dans la question I.6, pour la partie b), ce qui nécessitait explication est la mesurabilité de S_n^T et non sa positivité, et pour la partie c) l'utilisation du point a) est fondamentale.

d). Certains candidats ont paru peu familiers avec la loi binômiale. Notamment une partie d'entre-eux a perdu du temps pour retrouver (avec plus ou moins de bonheur) la formule donnant $P(S_n = k)$.

III. Corrigé succint du problème

Préliminaire. - L'indépendance de X et Y est équivalente à l'égalité $P_{X,Y} = P_X \otimes P_Y$. La relation demandée résulte alors de l'application du théorème de Fubini.

I.1. - La condition $\mu \neq \delta_o$ implique l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que $\mu([\varepsilon, +\infty[) > 0$. Le résultat de 1.a se déduit alors immédiatement du lemme de Borel-Cantelli ou peut être directement établi par passage au complémentaire.

Alors presque sûrement, la suite croissante (S_n) tend vers $+\infty$ quand $n \longrightarrow +\infty$. L'événement $\{N_t = +\infty\} = \{\lim_n S_n \leqslant t\}$ est de probabilité nulle et l'événement $\bigcap_{t>o} \{N_t < +\infty\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \{N_k < +\infty\}$ (croissance en t de N_t) est de probabilité 1.

On a aussi :

$$\{\lim_{t\to+\infty} N_t < +\infty\} = \bigcup_{n\geqslant 1} \{\lim_t N_t \leqslant n\} = \bigcup_{n\geqslant 1} \{S_n = +\infty\} = \phi.$$

I.2. - D'après la loi des grands nombres de Kolmogorov, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ converge presque sûrement vers m ; il en est de même de $\frac{S_n}{n} = \frac{X_o}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $\frac{S_{n-1}}{n} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{S_{n-1}}{n-1}$.

Mais d'après I.1, presque sûrement $N_t \in \mathbb{N}$ pour tout $t > o$ et $\lim_{t\to+\infty} N_t = +\infty$.

Par définition, on a pour tout $n \geqslant 1$, $\{N_t = n\} = \{S_n > t\} \cap \{S_{n-1} \leqslant t\}$, donc $S_{N_t-1} \leqslant t < S_{N_t}$. En divisant les termes de cette double inégalité par N_t et en tenant compte de ce qui précède, on obtient immédiatement le résultat.

I.3. - La v.a.r. S_n a la loi binômiale de paramètre n et p. Comme on a $\{N_t = k\} = \{S_k > t\} \cap \{S_{k-1} \leqslant t\}$ et que X_k ne prend que les valeurs 0 et 1, on obtient compte tenu de l'indépendance des X_n :

$$P(N_t = k) = P(X_k = 1).P(S_{k-1} = [t])$$

$$= C_{k-1}^{[t]}\, p^{[t]+1}\, q^{k-1-[t]} \qquad \text{si} \quad 0 < t < k$$

et naturellement $P\,(N_t = k) = 0$ si $t \geqslant k$.

$$E(N_t) = \sum_{k\geqslant[t]+1} k\, C_{k-1}^{[t]}\, p^{[t]+1}\, q^{k-1-[t]} = \frac{p^{[t]+1}}{[t]\,!} \sum_{n\geqslant 1} (n+[t])\ldots n\, q^{n-1}$$

On reconnaît ici la dérivée d'ordre $([t]+1)$ d'un développement en série entière classique (!) et on en déduit $E(N_t) = \frac{[t]+1}{p}$.

On peut aussi écrire que

$$E(N_t) = \sum_{k\geqslant[t]+1} \frac{[t]+1}{p}\, C_k^{[t]+1}\, p^{[t]+2}\, q^{k-1-[t]}$$

et noter que $\sum_{k\geqslant[t]+1} P(N_{t+1} = k+1) = 1$.

De façons semblables, on obtient aussi

$$E(N_t.(N_t+1)) = \frac{([t]+1).([t]+2)}{p^2}$$

d'où $E(N_t^2) = E(N_t.(N_t+1)) - E(N_t) = \frac{([t]+1)}{p}\left(\frac{[t]+2}{p} - 1\right)$.

I.4. - Soit $\varepsilon > 0$ tel que $P(X_1 \geqslant \varepsilon) = p > 0$. Si l'on pose $X'_o = 0$ et pour tout $i \geqslant 1$, $X'_i = 1_{\{X_i \geqslant \varepsilon\}}$, on a $\varepsilon X'_i \leqslant X_i$ quel que soit i et $N_t \leqslant N'_{\frac{t}{\varepsilon}} = \sum_{n \geqslant o} 1_{[0,\frac{t}{\varepsilon}]} \circ S'_n$.

Ce que l'on demande en a, se déduit alors de I.3 (on peut remarquer que les résultats de I.3 demeurent si p = 1, ce qui permet d'englober le cas $\mu = \delta_\varepsilon$(!)).

La condition $\sup_{t \geqslant 1} \frac{E(N_t^2)}{t^2} < +\infty$ entraîne l'uniforme intégrabilité de $\frac{N_t}{t}$ (mais non celle de $\frac{N_t^2}{t^2}$ (!)) ; celle-ci jointe à la convergence en probabilité de $\frac{N_t}{t}$ vers $\frac{1}{m}$ implique la partie b. On peut aussi, sans faire appel aux résultats généraux que nous venons d'utiliser, écrire

$$\int \left| \frac{N_t}{t} - \frac{1}{m} \right| dP \leqslant \varepsilon + \int \left| \frac{N_t}{t} - \frac{1}{m} \right| \cdot 1_{\{|\frac{N_t}{t} - \frac{1}{m}| > \varepsilon\}} dP$$

et appliquer Cauchy-Schwarz.

Si $\int x\, \mu(dx) = +\infty$, on a $\frac{E(N_t)}{t} \longrightarrow 0$. Ceci s'obtient en considérant pour $A > 0$, la suite (X_i^A) définie par $X_i^A = X_i$ si $X_i \leqslant A$, $X_i^A = A$ si $X_i > A$.

I.5. - On établit que f définie en a est une densité de probabilité en appliquant à la fonction borélienne $1_{\{t < u\}}(t,u)$ le théorème de Tonelli.

Si μ est densitable, $G(t) = \mu(]t, +\infty[)$ est continue. Alors $G(t) = \int_t^{+\infty} \frac{G(u)}{m} du$ quel que soit $t > 0$, entraîne que G est dérivable sur $]0, +\infty[$ et vérifie l'équation différentielle $G'(t) = - \frac{G(t)}{m}$. La seule probabilité possible est celle de densité $\frac{1}{m} \exp(-\frac{t}{m}) 1_{[0, +\infty[}(t)$ et elle vérifie bien la condition voulue.

Pour la partie b, on écrit :

$$E(N_t) = \sum_{n \geqslant o} E(1_{[0,t]} \circ S_n) = \sum_{n \geqslant o} \nu * \mu_n([0,t])$$

En remarquant que $\nu * \mu_n$ a pour densité $g_n(u) = \int_{[0,u]} f(u-v)\mu_n(dv)$ et en remplaçant $f(u-v)$ par sa valeur, on obtient en trois lignes le résultat. On peut aussi suivant l'autre méthode indiquée, considérer la transformée de Laplace de la mesure borélienne sur $\mathbb{R}_+$, λ, associée à la fonction croissante $t \longrightarrow E(N_t)$. On obtient :

$$\hat{\lambda}(s) = \hat{\nu}(s) \cdot \frac{1}{1-\hat{\mu}(s)} .$$

D'après l'injectivité de la transformée de Laplace, on a : $E(N_t) = \frac{t}{m}$ quel que soit $t > 0 \Leftrightarrow \hat{\nu}(s) = \frac{1 - \hat{\mu}(s)}{m\,s}$ pour tout $s > 0 \Leftrightarrow \nu$ de densité f.

I.6. - On a

$$\{\alpha_T = k\} = \{S_{k-1} \leqslant T < S_k\} \qquad k \in \mathbb{N}$$

et $$\{\alpha_T = +\infty\} = \{\lim S_n \leqslant T\} \subset \{\lim S_n < +\infty\}.$$

Il en résulte le point a.

On peut écrire :

$$S_{\alpha_T + n} = \sum_{k \geqslant o} 1_{\{\alpha_T = k\}} \cdot S_{k+n} + (+\infty) \cdot 1_{\{\alpha_T = +\infty\}}$$

d'où l'on déduit le point b.

Si $B_o, B_1, \ldots, B_{n+1}$ sont des boréliens de $\mathbb{R}_+$, on peut écrire

$\{S_o^T \in B_o\} \cap \{S_1^T - S_o^T \in B_1\} \cap \ldots \cap \{S_{n+1}^T - S_n^T \in B_{n+1}\}$

$= \bigcup\limits_{k \geqslant o} \{\alpha_T = k\} \cap \{S_k - T \in B_o\} \cap \{X_{k+1} \in B_1\} \cap \ldots \cap \{X_{k+n+1} \in B_{n+1}\}.$

D'après le point a et l'indépendance des X_i, les événements $\{\alpha_T = k\} \cap \{S_k - T \in B_o\}$, $\{X_{k+1} \in B_1\}, \ldots, \{X_{k+n+1} \in B_{n+1}\}$ sont indépendants. On en déduit alors rapidement le point c.

Si l'on pose $N_t^T = \sum\limits_{n \geqslant o} 1_{[0,t]} \circ S_n^T$, on a : $E(N_t^T) = \sum\limits_{n \geqslant o} P(S_n - T \in]0,t])$

puis par indépendance de S_n et T

$$= \sum_{n \geqslant o} \int_o^{+\infty} P(S_n \in]u, t+u])P_T(du)$$

$$= \int_o^{+\infty} (E(N_{t+u}) - E(N_u))P_T(du).$$

Alors le point d résulte de 5.b (partie directe et partie réciproque).

I.7. - En écrivant $E(N_{kh}) = E(N_h) + \sum\limits_{n=1}^{k-1} E(N_{(n+1)h} - N_{nh})$ il suffit pour établir le point a, de se rappeler que pour une suite numérique la convergence ordinaire implique la convergence au sens de Cesaro (!).

L'existence de la limite si $\nu = \delta_o$, s'écrit :

$$g(t) = \sum_{n \geqslant o} \mu_n(]t, t+h]) \longrightarrow \frac{h}{m} \quad \text{quand} \quad t \longrightarrow +\infty.$$

Sous cette condition g est de plus bornée sur $[0, +\infty[$, car bornée sur tout intervalle fini. Le point b est alors établi en appliquant le théorème de convergence dominée à

$$E(N_{t+h} - N_t) = \int g(t-u)\, 1_{[0,t+h]}(u)\, \nu(du).$$

II.1. - Pour $C = \Pi_J^{-1}(B)$ avec $B \in \mathscr{B}_n$, on a

$$P_X(C) = P_{X_\sigma}(C) = \mu^{n\otimes}(B)$$

Par Carathéodory, le théorème sur les π et λ systèmes ou 4$^{\text{o}}$ des rappels les probabilités P_X et P_{X_σ} coïncident sur tout $\mathscr{B}_\infty$.

On a donc $P(A_n) = P(A'_n)$ et comme par associativité de l'indépendance A_n et A'_n sont indépendants, on a

$$P(A_n \cap A'_n) = P(A_n).P(A'_n) = [P(A_n)]^2.$$

Comme nous l'avons rappelé dans les remarques générales, pour tout $A \in \mathscr{T}(X)$, il existe une suite (A_n) de la forme $A_n = \{(X_1,\ldots,X_n) \in B_n\}$ telle que $P(A_\Delta A_n) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$. Soient σ_n la permutation de Σ_{2n} telle que $\sigma_n(1) = 2n$, $\sigma_n(2) = 2n-1,\ldots,\sigma_n(2n) = 1$, $\sigma_n(i) = i$ pour $i > 2n$, et A'_n l'événement $\{(X_{\sigma_n(1)},\ldots,X_{\sigma_n(n)}) \in B_n\}$. Si A est un événément symétrique, on a $P(A_\Delta A'_n) = P(A_\Delta A_n)$ et les suites (1_{A_n}) et $(1_{A'_n})$ convergent vers 1_A dans $L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$, et il en est de même de la suite $(1_{A_n \cap A'_n})$. Il suffit alors de passer à la limite dans la formule $P(A_n \cap A'_n) = [P(A_n)]^2$ pour obtenir le résultat de la partie c.

Remarquons que nous avons utilisé l'invariance de A seulement pour les permutations σ_n. On aurait pu utiliser d'autres suites de permutations, en particulier la suite définie par $\sigma'_n(1) = 2n+1$, $\sigma'_n(2) = 2n,\ldots,\sigma'_n(2n+1) = 1$, $\sigma'_n(i) = i$ pour $i > 2n+1$, qui respecte la parité. Cette remarque sera utile pour III 2$^{\text{o}}$.

II.2. - La loi du tout ou rien de Kolmogorov affirme sous l'hypothèse d'indépendance de la suite (X_n), que la probabilité d'un événement asymptotique ne peut être que 0 ou 1. Le résultat précédent (loi du tout ou rien de Hewitt et Savage) est établi sous la condition supplémentaire de l'équidistribution des X_n, mais concerne une famille plus vaste d'événements. Il est en effet immédiat de constater que tout événement asymptotique est symétrique ; par contre $A = \bigcap_{n\geq 1} \{X_n \in B\}$ est symétrique sans être (en général !) asymptotique.

II.3. - Soit $A \in \mathscr{T}(\underline{X})$ un événement symétrique relativement à X. De la même façon que dans 1º et avec les mêmes notations en remplaçant simplement X par $\underline{X}$ et en prenant $\sigma_n(0) = 0$, les suites (1_{A_n}), $(1_{A'_n})$ et $(1_{A_n \cap A'_n})$ convergent dans L^1 vers 1_A. D'après la continuité de l'espérance mathématique conditionnelle, les espérances mathématiques conditionnelles par rapport à X_o des trois suites précédentes convergent dans L^1 vers $E(1_A/X_o)$. En appliquant le résultat du préliminaire, on obtient $E(1_{A_n \cap A'_n}/X_o) = E(1_{A_n}/X_o).(1_{A'_n}/X_o)$ et cette suite converge dans L^1 à la fois vers $E(1_A/X_o)$ et vers $(E(1_A/X_o))^2$. D'où le résultat demandé.

III.1. - $\underline{S}^{S_i}$ (resp. $\underline{S}'^{S_i}$) a la même loi que $\underline{S}$ (resp. $\underline{S}'$) (cf. I.6). $\underline{S}^{S_i}$ et $\underline{S}'^{S_i}$ sont indépendantes comme $\underline{S}$ et $\underline{S}'$. Donc la suite $(Z_k, k \in \mathbb{N})$ a la même loi que la suite $(Z_{i+k}, k \in \mathbb{N})$. Il en résulte que $P(A_o) = P(A_i)$ quantité encore égale à $P(A_\infty)$ en remarquant la décroissance de la suite (A_i).

III.2. - L'événement A_∞ peut s'écrire : il y a une infinité de S_j qui sont suivis à moins de δ par un S'_n. Sur $\{\lim S_n = +\infty\}$, il a même trace que A'_∞ : "il existe une infinité de couples (i_k, j_k) telle que si $k > k'$, alors $i_k > i_{k'}$ et $j_k > j_{k'}$, et $0 < S'_{j_k} - S_{i_k} < \delta$. L'événement A'_∞ n'est pas symétrique par rapport à $\underline{Y}$ mais il est invariant pour les permutations qui laissent invariants 0 et globalement les pairs et les impairs. D'après la remarque faite en II.1 et applicable encore à II.3, on obtient la partie a.

On a $A_1 \supset \bigcup_{n\geq 1} \{0 < S'_n - S_n < \delta\}$. Alors presque-sûrement

$E(1_{A_1}/X'_o) \geq E(\sup_n 1_{\{0<S'_n - S_n<\delta\}}/X'_o) \geq \sup_n E(1_{]0,\delta[}(S'_n - S_n)/X'_o)$. Mais d'après le préliminaire, on a $P_{X'_o}$ presque-sûrement

$$E(1_{]0,\delta[}(S'_n - S_n)/X'_o = x'_o) = \mu_n^s(]-x'_o, \delta - x'_o[).$$

Alors l'utilisation de l'hypothèse d, donne le résultat du point b.

L'événement $A_1 \setminus A_\infty$ étant négligeable, on a $E(1_{A_1}/X'_o) = E(1_{A_\infty}/X'_o)$. D'après les parties b et a, $E(1_{A_1}/X'_o) = 1$ presque-sûrement ; il en résulte que $P(A_o) = P(A_i) = P(A_\infty) = 1$.

III.3. - L'événement $\{K = k\} \cap \{K' = k'\}$ s'exprime à l'aide de $S_o, S_1, \ldots, S_k, S'_o, S'_1, \ldots, S'_{k'}$; il appartient donc à la tribu $\mathcal{T}(X_o, \ldots, X_k, X'_o, \ldots, X'_{k'})$.

Alors pour toutes fonctions boréliennes bornées f et g, on a :

$$E(f(S_K).g(S_{K+n} - S_K)) = \sum_{k,k'} E(f(S_k).g(S_{k+n} - S_k)\, 1_{\{K=k\} \cap \{K'=k'\}}).$$

Mais $E(f(S_k).g(S_{k+n} - S_k) 1_{\{K=k\} \cap \{K'=k'\}} / \mathcal{T}(X_o, \ldots, X_k, X'_o, \ldots, X'_{k'}))$

$$= f(S_k) 1_{\{K=k\} \cap \{K'=k'\}} . \int g(x) \mu_n(dx).$$

$$= E(f(S_k).g(S'_{k'+n} - S'_{k'}) 1_{\{K=k\} \cap \{K'=k'\}} / \mathcal{T}(X_o, \ldots, X_k, X'_o, \ldots, X'_{k'})).$$

En prenant l'espérance mathématique de l'espérance mathématique conditionnelle et en sommant en k et k', on obtient :

$$E(f(S_K).g(S_{K+n} - S_K)) = E(f(S_K).g(S'_{K'+n} - S'_{K'}))$$

d'où la partie a.

Il en résulte en particulier que S_{K+n} et $S'_{K'+n} - S'_{K'} + S_K$ ont même loi. Comme $0 < S'_{K'} - S_K < \delta$, on a

$$1_{]t+\delta, t+h[} \circ S'_{K'+n} \leqslant 1_{]t, t+h[} \circ (S'_{K'+n} - S'_{K'} + S_K) \leqslant 1_{]t, t+h+\delta[} \circ S'_{K'+n}.$$

En prenant l'espérance mathématique dans cette double inégalité puis en sommant en n, on obtient la double inégalité demandée dans la partie b.

III.4. - En utilisant les notations de I.6 pour la suite (X'_n) au lieu de (X_n), on a

$$N'_{t+h} - N'_t = \sum_{n \geqslant o} 1_{]t, t+h]} \circ S'_n = \sum_{n \geqslant o} 1_{]t, t+h]} \circ S'_{\alpha_t + n} = \sum_{n \geqslant o} 1_{]0, h]} \circ S'^{t}_n.$$

Comme les deux suites de v.a. $(S'^{t}_{n}, n \in \mathbb{N})$ et $(S'_n, n \in \mathbb{N})$ ont même loi, il en est de même pour les deux v.a. $N'_{t+h} - N'_t$ et N'_h ; $(P(S'_n = 0) = 0)$.

En partitionnant par l'événement $\{N'_{t+h} - N'_t \leqslant A\}$ et son contraire (A réel $\geqslant 1$) et tenant compte de ce qui précède, on obtient :

$$E(\sum_{k \leqslant K'} 1_{]t,t+h]} \circ S'_k) \leqslant A.P(S'_{K'} > t) + E(N'_h \cdot 1_{\{N'_h > A\}}).$$

Il suffit alors de faire tendre t vers + ∞, puis A vers + ∞ pour obtenir la fin de la partie a.

Toujours avec les notations de I.6 mais cette fois appliquées à (X_n), on a :

$$P(N_{t+h} - N_t > n) = P(S_{\alpha_t+n} \leqslant t+h) = \int_{]t,t+h]} \mu_n([0,t+h-s])P_{S_{\alpha_t}}(ds) \leqslant \mu_n([0,h]) = P(N_h > n).$$

Alors la démonstration se conduit comme dans la partie a.

Pour conclure il faut remarquer que

$$E((N_{t+h} - N_t) \cdot 1_{\{N_{t+h} - N_t > A\}}) \leqslant E(N_h \cdot 1_{\{N_h > A\}})$$

en se rappelant que pour une v.a. W à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $E(W) = \sum_{n \geqslant o} P(W > n)$.

III.5. - En utilisant ce que l'on vient d'obtenir en 3 et 4 et la question I.5, on obtient :

$$\frac{h-\delta}{m} = \lim_{t \to +\infty} E(N'_{t+h} - N'_{t+\delta}) = \lim_{t \to +\infty} E(\sum_{n > o} 1_{]t+\delta,t+h]} \circ S'_{K'+n})$$

$$\leqslant \liminf_{t \to +\infty} E(\sum_{n > o} 1_{]t,t+h]} \circ S_{K+n}) = \liminf_{t \to +\infty} E(N_{t+h} - N_t)$$

$$\leqslant \limsup_{t \to +\infty} E(N_{t+h} - N_t) \quad \text{et de façon analogue}$$

$$\leqslant \lim_{t \to +\infty} E(N'_{t+h+\delta} - N'_t) = \frac{h+\delta}{m} .$$

D'où le résultat demandé.

III.6. - Compte tenu que $\nu = \delta_o$, on a pour tout $t > 0$:

$$\lambda(]t,t+1]) - \beta = \sum_{n \geqslant 1} \mu_n(]t,t+1]) - \beta = \int_{[0,t+1]} \lambda(]t-y, t+1-y])\mu(dy) - \beta.$$

Pour $0 < j < A < t+1$, en se souvenant que $\lambda([0,1])$ majore $\lambda(]t-y, t+1-y])$, on obtient par une majoration grossière :

$$\lambda(]t,t+1]) - \beta \leqslant \lambda([0,1]).\mu([A,+\infty[)+(\lambda(]t-j, t+2-j]) - \beta).\mu([j-1,j[)$$
$$+ (\sup_{\theta \geqslant t-A} \lambda(]\theta,\theta+1]) - \beta).\mu([0,A[).$$

En appliquant ceci à une sous-suite (t_{k_n}) de t_k telle que $\lambda(]t_{k_n} - j, t_{k_n} - j+2]) \longrightarrow \beta'$, puis en passant à la limite en n et en faisant ensuite tendre A vers $+\infty$, on obtient :

$$(\beta' - \beta)\ \mu([j-1, j[) \geqslant 0.$$

D'où la partie a, compte tenu de l'hypothèse sur le support de μ (dont on peut en réalité se passer).

On a $\int_0^{+\infty} \mu(]t,+\infty[)dt = \int_{[0,+\infty[} x\ \mu(dx) = +\infty$; d'où l'on déduit rapidement que $\sum_1^{+\infty} \mu(]2i,+\infty[) = +\infty.$

On a $\int_{[0,t_k]} \mu(]t_k-y,+\infty[)\ \lambda(dy) = 1 \geqslant \sum_{i=1}^{I_k} \int_{]t_k-2i,t_k-2i+2]} \mu(]t_k-y,+\infty[)\lambda(dy)$

($2\ I_k$ est le plus grand entier pair inférieur ou égal à t_k)

$$\geqslant \sum_{i=1}^{I_k} \mu(]2i,+\infty[)\lambda(]t_k-2i,t_k-2i+2]).$$

De là, on déduit aisément (par exemple par Fatou !) que

$$1 \geqslant \beta \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(]2i,+\infty[)$$

et donc que $\beta = 0$.

IV. Statistique des résultats

Nombre de copies corrigées : 550

Notes	$\leqslant 1$	2 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40
Nombre de copies	226	102	93	60	47	11	3	4	4

oral

1. OBSERVATIONS GÉNÉRALES

Les 226 candidats admissibles ont été répartis en deux sous-jurys comportant chacun une commission d'algèbre et une sous-commission d'analyse. Une concertation permanente a assuré une bonne harmonisation de la conception et de l'appréciation des épreuves.

On aura noté que la diminution très sensible du nombre des places mises au concours n'a pas été entièrement répercutée sur le nombre des admissibles. Cette prudence du jury d'écrit a reçu sa justification *a posteriori* dans le fait que les épreuves orales ont permis à certains candidats d'effectuer un redressement spectaculaire.

Dans l'ensemble, la valeur des leçons s'est améliorée, surtout en analyse et il est certain que le niveau moyen des agrégés de 1980 est sensiblement supérieur à celui des lauréats des concours précédents.

2. ÉPREUVE D'ANALYSE, PROBABILITÉS

2.1 Observations générales

Comme dans le rapport précédent (1979), on peut dire que l'organisation technique du déroulement de la leçon est comprise de la grande majorité des candidats ; rares sont ceux qui n'ont pas encore réalisé l'intérêt de la notice d'instructions qui leur est remise.

Le jury a constaté cette année un niveau général de connaissances tout à fait satisfaisant chez nombre de candidats ; en revanche, il a noté un net laisser-aller dans la conception et la présentation matérielle de certaines leçons.

Il est nécessaire de rappeler quelques évidences déjà évoquées dans les rapports précédents : un plan doit être lisible donc bien écrit, compréhensible donc bien exposé, logiquement construit et mathématiquement correct ; les énoncés doivent être rigoureux, l'usage des quantificateurs soigneusement contrôlé, le symbolisme utilisé avec précision (indices dans les sommations, bornes dans les intégrales définies...).

Le jury a en particulier sanctionné très sévèrement les candidats qui ont réduit le plan à un aide-mémoire murmuré comme à regret, le plus hâtivement possible.

L'exposé est lui aussi une partie importante de l'épreuve, que trop de candidats semblent avoir négligée pendant leur préparation. Le choix des sujets proposés demande du soin : ils doivent présenter un contenu. mathématique substanciel sans être excessif, et correspondre au libellé de la leçon ; ainsi la démonstration d'un théorème général n'a guère sa place dans une leçon d'exemples ; de même ne doit-on pas vider un exposé de sa substance en reportant dans un lemme admis l'essentiel d'une démonstration.

De plus, l'exposé doit avoir été préparé de façon suffisamment minutieuse pour que le candidat ne se borne pas à recopier ses notes ou ne se trouve pas confronté à une difficulté imprévue. C'est au cours de l'exposé que le candidat doit montrer sa capacité à convaincre un auditoire de la validité de ses résultats ainsi que du bien-fondé de sa démarche : il ne s'agit donc pas de reproduire mécaniquement une démonstration ou un calcul ; toutes les considérations, en particulier heuristiques, de nature à éclairer la progression de l'exposé, sont appréciées.

Quant aux questions posées par le jury, elles ont pour objet essentiel de vérifier la solidité des connaissances des candidats et leur aptitude à utiliser dans des situations concrètes les notions introduites dans la leçon.

2.2 Remarques particulières

L'analyse statistique des leçons effectivement choisies montre une concentration autour d'un petit nombre de thèmes très généraux, au détriment des leçons d'exemples, d'étude de courbes, de la cinématique, etc. Les jurys pourraient donc être amenés à enrayer cette tendance, par exemple en modifiant la fréquence de certains sujets et leurs couplages. Il est rappelé à ce propos que la préparation à l'oral doit couvrir l'intégralité du programme officiel.

Pour ce qui est des remarques concernant les diverses leçons —dont l'intitulé a peu varié cette année— on se reportera utilement aux rapports précédents, ceux de 1978 et 1979 en particulier.

Les quelques indications qui suivent pourront néanmoins être profitables aux futurs candidats.

* S'agissant des leçons **d'intégration,** le jury est amené à constater que la présentation de l'intégrale de Riemann — le plus souvent faite d'après le même modèle — a conduit certains candidats à des déboires, faute d'une appréciation suffisante de la portée, des limites et des difficultés de cette théorie.

* De nombreuses leçons requièrent l'usage de **récurrences** ; le jury déplore que certains candidats ne sachent pas formuler convenablement une construction ou un raisonnement par récurrence, même quand ils y sont explicitement invités.

* Le jury met en garde les candidats contre la **tentation de se placer dans un cadre trop général** (calcul différentiel, intégration, développements limités, séries, équations différentielles dans les Banach par exemple). En l'absence d'application ou d'exemples véritables une telle attitude apparaît comme gratuite et ne peut que desservir les candidats.

* Enfin, en ce qui concerne les leçons de **probabilités** — qui apparaissent plus souvent que par le passé — le jury a souvent constaté le caractère superficiel des connaissances de certains candidats ; il n'est pas moins grave d'ignorer les diverses notions de convergence utilisées en probabilités que d'ignorer celles qui servent en analyse classique.

2.3 Liste des exposés d'analyse, mécanique et probabilités

1 Applications à l'analyse de la notion de compacité
2 Exemples d'espaces compacts
3 Espaces homéomorphes. Exemples et contre-exemples
4 Connexité. Applications
5 Théorèmes du point fixe. Applications
6 Espaces métriques complets, espaces métriques compacts ; comparaison de ces notions
7 Comparaison des distances dans les espaces métriques. Exemples et contre-exemples
8 Suites de points dans un espace métrique ; suites extraites. Exemples et applications
9 Sous-espaces denses. Illustration par l'approximation des fonctions
10 Exemples d'applications linéaires continues d'un espace vectoriel normé dans un autre ; norme de telles applications
11 Espaces vectoriels normés de dimension finie
12 Géométrie dans un espace vectoriel normé
13 Exemples d'utilisation de la dénombrabilité en topologie et en analyse
14 Donner une construction de R ; en déduire les principales propriétés de R
15 Une caractérisation de R (par certaines de ses propriétés) étant connue, en déduire les autres propriétés fondamentales de R
16 Topologie de la droite numérique R et sous-ensembles remarquables de R
17 Exemples de compactification de R et de C ; utilisation
18 Connexité dans R et fonctions continues
19 Propriétés topologiques de R^n, exemples d'utilisation
20 Limite d'une fonction numérique d'une variable réelle
21 Exemples d'étude de suites de nombres réels
22 Limite, limite inférieure, limite supérieure d'une suite dans R ou $\overline{R}$
23 Approximations d'un nombre réel
24 Étude, sur des exemples, de suites numériques définies par divers types de relations de récurrence
25 Continuité et dérivabilité de fonctions réelles d'une variable réelle ; exemples et contre-exemples
26 Fonctions à variation bornée. Applications
27 Applications réciproques : théorèmes d'existence ; exemples
28 Fonctions implicites : applications
29 Exemples d'utilisation de changements de variable
30 Fonctions convexes d'une ou de plusieurs variables réelles
31 Fonctions convexes d'une variable réelle ; inégalités de convexité
32 Problèmes de prolongement de fonctions ; exemples
33 Applications différentiables. Exemples
34 Fonctions de plusieurs variables réelles : formule des accroissements finis et applications
35 Applications de classe C^k d'un ouvert de R^n dans R^p
36 Les différentes formules de Taylor
37 Problèmes d'extremum
38 Comparaison des fonctions au voisinage d'un point. Développements limités
39 Applications des développements limités et asymptotiques
40 Intégrale des fonctions de variable réelle. Premières propriétés
41 Intégrales impropres
42 Problèmes d'interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples
43 Problèmes de dérivabilité en calcul intégral
44 Fonctions définies par une intégrale. Exemples
45 Fonction exponentielle complexe. Argument d'un nombre complexe
46 Exemples de recherche de primitives et de calcul d'intégrales
47 Méthodes de calcul approché d'intégrales
48 Exemples d'utilisation des intégrales curvilignes
49 Séries. Convergence et convergence absolue. Sommation par paquets, réindexation
50 Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries numériques
51 Continuité, dérivabilité, intégralité de la somme d'une série de fonctions d'une variable réelle
52 Comparaison d'une série et d'une intégrale
53 Différentes notions de convergence d'une suite de fonctions. Exemples
54 Exemples de problèmes d'interversion de limites
55 Domaine de convergence d'une série entière. Propriétés de la somme d'une telle série
56 Exemples de développement d'une fonction en série entière

57 Série de Taylor
58 Solutions des équations différentielles $y' = f(x,y)$; solutions maximales
59 Équations différentielles linéaires ; propriétés générales. Exemples
60 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants
61 Étude détaillée, sur un petit nombre d'exemples, d'équations différentielles non linéaires ; illustrations géométriques
62 Exemples de problèmes conduisant à des équations différentielles
63 Divers modes de définition et de représentation des courbes et surfaces de R^2 et R^3. Exemples
64 Propriétés affines locales des courbes. Branches infinies. Exemples
65 Exemples d'étude de courbes planes
66 Étude locale des courbes planes
67 Étude locale des courbes de R^3
68 Mouvement à accélération centrale
69 Champ des vitesses d'un solide. Composition des mouvements
70 Mouvement d'un repère orthonormé ; application à la théorie des courbes gauches et à la cinématique du solide
71 Mouvement d'un plan sur un plan
72 Méthodes de calcul approché de solutions numériques des équations $f(x) = O$
73 Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynômiales
74 Théorèmes limites fondamentaux en calcul des probabilités
75 Le jeu de pile ou face (variables de Bernoulli indépendantes)
76 Probabilité conditionnelle. Exemples
77 Loi binomiale, loi de Poisson
78 Introduire, sur des exemples, les bases mathématiques du calcul des probabilités

3. ÉPREUVE D'ALGÈBRE, GÉOMÉTRIE

3.1 Observations générales

Les candidats admissibles ont subi cette année les épreuves orales du Concours dans des conditions météorologiques favorables au travail et à la concentration, tandis que la diminution importante du nombre d'admis, rendant la compétition encore plus rude, pouvait selon les cas constituer un stimulant ou une invite au découragement.

De fait, plusieurs d'entre eux, pourtant nantis de connaissances honorables et convenablement préparés au Concours, ont semblé n'être là que par acquis de conscience, déjà résignés à un échec qu'ils estimaient inévitable et n'envisageant même pas qu'une leçon vivante et bien menée, des réactions précises et rapides, puissent changer quoi que ce soit à un destin désormais scellé à leurs yeux. Se présentant en battus, ils ne pouvaient effectivement que l'être tant l'allant et la volonté de convaincre sont, ici comme devant une classe, des qualités essentielles et un sûr gage d'efficacité.

Il faut dénoncer cette absurdité : si l'Agrégation est effectivement un concours difficile et de haut niveau, aucun candidat, dès lors qu'il s'est préparé durant l'année avec tout le soin et l'attention dont il est capable, ne doit accepter - aussi minimes qu'elles puissent alors lui paraître - de compromettre ses chances de succès et d'anéantir sans contrepartie toute une année de travail, sous prétexte que la concurrence est vive et que le rite de la leçon exige, pour y réussir, persévérance et sang-froid.

A fortiori, ceux des candidats admissibles qui ont conservé intacte leur détermination et présenté, comme en témoignent leurs notes, des leçons satisfaisantes sans obtenir toutefois l'admission définitive ne doivent-ils en aucun cas céder au découragement ou au fatalisme, mais comprendre au contraire qu'une année supplémentaire de préparation, en donnant plus de cohérence et de maîtrise à leurs connaissances et davantage de sûreté à leur comportement, a de grandes chances d'être couronnée du succès qu'ils ont cette année manqué de peu.

A tous les futurs candidats, conseillons la lecture des Rapports des années antérieures : sachant plus précisément ce qu'on attend d'eux, ils n'auront que plus de facilité à s'y préparer, et les observations faites chaque année à propos des sujets classiques ne peuvent que guider leurs lectures et diriger efficacement leur réflexion. Renvoyant donc, par exemple, au rapport de 1979 pour tout ce qui concerne les délices vénéneuses de la bibliophilie et les divers aspects du passage devant le jury, on donnera ci-après quelques remarques concernant l'organisation et la matière des leçons, ainsi que l'esprit dans lequel il est possible de les traiter.

Insistons d'abord, avant d'en détailler divers aspects, sur deux impératifs qui s'imposent dans chaque leçon : illustrer et unifier.

Illustrer, d'abord. Le sujet que l'on choisit n'est, ni un catalogue, ni un schéma dogmatique ; il répond à une nécessité, a une cohérence interne et des ramifications. Se borner aux principaux résultats d'une théorie sans en souligner les idées directrices, limiter ses exemples à des cas particuliers banals n'est pas de bonne pédagogie, ni de bonne mathématique. Abstraire, c'est aller à l'essentiel et non pas dessécher, et l'on convainc bien plus sûrement qu'une notion est utile par un exercice qui la met spectaculairement en œuvre qu'en déclarant "ça sert beaucoup", "c'est très intéressant" à chaque endroit d'un plan dépourvu par ailleurs de toute application significative. Un authentique travail de préparation, un effort personnel de réflexion et de recherches, se révèlent bien plus aux motivations et exemples qu'à l'énoncé de théorèmes généraux ou exotiques dont tout montre ensuite que leur découverte est récente, et nulle leur assimilation.

Unifier, ensuite. L'efficacité d'une idée se juge à l'étendue de son rayonnement et, pour en faire ressortir l'intérêt, il est donc indispensable de la montrer en action dans un large éventail de contextes. Sans aller jusqu'aux sciences de la nature et de la vie - bien que rien ne l'interdise et que d'aucuns s'y soient cette année essayés avec quelque bonheur - les exemples et exercices que l'on présente sont d'autant plus convaincants que leur domaine est moins restreint et qu'ils font suivre les prolongements de la théorie étudiée dans des directions plus nombreuses, voire inattendues.

Se refuser, par exemple, sous prétexte que l'on présente une leçon sur les groupes, tout recours à l'algèbre linéaire, l'analyse, la géométrie ou la topologie, est une attitude dommageable à tous égards, un non-sens scientifique en même temps qu'une maladresse pédagogique. Algèbre, analyse et géométrie sont depuis longtemps inextricablement liées, chacune offre aux yeux du chercheur ou de l'enseignant un champ très étendu d'applications ou d'illustrations des autres et, s'agissant plus particulièrement des candidats, une vision globale du programme et la capacité de l'appliquer dans divers contextes est, à l'écrit comme à l'oral, un des plus sûrs atouts possibles.

3.2 Observations particulières sur certains sujets

On trouvera ci-après, sous une forme intentionnellement concise et classé par groupes de leçons, un ensemble de remarques sur les développements qu'appellent les divers sujets, et sur ceux qu'ils peuvent éventuellement recevoir. Sous la dénomination "exemples", sont énumérées, à l'intention des futurs candidats et sans qu'il en résulte pour eux limitation ni contrainte, quelques directions dans lesquelles ils peuvent trouver aux notions qu'ils présentent - outre les exemples usuellement cités, et qui n'ont pas été repris - des illustrations significatives et des conséquences non triviales.

3.2.1 Structures algébriques, théorie des groupes

Faire ressortir comment une structure algébrique quotient permet d'étendre, de compléter, d'enrichir, une structure donnée. Exemples : symétrisé d'un monoïde, anneaux de fractions, corps de rupture d'un polynôme, semi-normes, construction de $\mathbb{R}$, d'espaces projectifs, problèmes de dénombrement, identification et étude d'algèbres de matrices sous forme $K[A] \simeq K[X]/(P)$.

Pour les groupes finis, donner (si on les énonce) des applications non banales aux théorèmes de Cayley et de Cauchy. Exemples : groupe des unités de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sa structure, groupes classiques (GL_n, SL_n, PSL_n) des corps finis, groupes et géométrie (groupes diédraux, groupes des polyèdres réguliers, groupes de "pavages" du plan ou de la sphère), groupes de permutations des racines d'une équation algébrique, calculs élémentaires sur les "petits" groupes (générateurs, sous-groupes, sous-groupes distingués, de Sylow, classes de conjugaison), définition et usage des groupes simples, définition et applications (en géométrie, par exemple) du produit semi-direct ; par ailleurs, les notions de groupe résoluble, nilpotent, le théorème de Jordan-Hölder, ne sont pas à exclure à priori.

Ne pas se limiter au cas fini en ce qui concerne les groupes opérant sur un ensemble. Exemples : algèbre (exemples de représentations linéaires de groupes, classes de congruence ou de similitude pour les matrices, pour les formes quadratiques, opération du groupe S_n sur les polynômes à n indéterminées, automorphismes d'une extension algébrique de $\mathbb{Q}$) ; géométrie (action de sous groupes discrets du groupe orthogonal, recherche de domaines fondamentaux, birapport, éventuellement espaces homogènes) ; analyse (opérateurs de translation de variable ou d'indice dans les espaces de fonctions ou de suites).

La signature d'une permutation ne doit pas être uniquement définie dans le cas des n premiers entiers, et les classes de conjugaison de S_n sont à citer. Exemples : signature des translations d'un groupe fini, matrices de permutation, problèmes de dénombrement et de divisibilité.

3.2.2 Anneaux et corps

Pour ce qui est des anneaux, donner la définition du produit de deux idéaux, et son lien avec l'intersection ; énoncer le lemme chinois pour un anneau commutatif quelconque, connaître les idéaux d'une algèbre de matrices ; on doit faire ressortir les particularités des anneaux euclidiens, principaux, factoriels, et étudier la transmission de ces propriétés aux sous-anneaux, anneaux-quotients, anneaux de fractions, de polynômes, voire de séries formelles. Exemples : nombres décimaux, entiers de Gauss (éléments irréductibles, structure des quotients, applications arithmétiques), propriétés d'un anneau $K[X]/(P)$ lorsque P n'est pas K-irréductible, divisibilité dans des anneaux de fonctions de variable réelle ou complexe, anneaux $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ et leurs applications à des équations diophantiennes simples.

L'étude des corps finis ne doit pas systématiquement être faite dans une clôture algébrique ; indiquer : les automorphismes, l'existence de polynômes irréductibles de degré quelconque, les classes d'équivalence de formes quadratiques non dégénérées (en caractéristique différente de deux). On peut aussi donner quelques propriétés tombant en défaut sur les corps gauches, ou illustrer les notions de corps de décomposition, de corps de nombres algébriques et de k-extension de degré fini. Exemples : corps de fonctions rationnelles, nombre de points d'une conique sur un corps fini.

La construction du corps des nombres complexes doit pouvoir être faite de plusieurs façons, ainsi que la démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss (sans reproduire la lacune que présente, à ce sujet, la démonstration par récurrence d'un ouvrage connu !) ; étudier le groupe de toutes les racines de l'unité, et pas seulement celui des racines n-ièmes. Exemples : détermination des sous-groupes de $\mathbb{C}^*$, de ses sous-groupes fermés ; exemples de sous-corps de $\mathbb{C}$ (éventuellement une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$), homomorphismes du groupe $(\mathbb{C},+)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$; applications géométriques des nombres complexes, application aux extensions finies de $\mathbb{R}$ et à la structure des endomorphismes normaux dans un espace euclidien.

Donner également diverses constructions du corps des quaternions et préciser ce qu'il en advient sur les corps finis, étudier le groupe quaternionique et ses propriétés. Exemples : applications géométriques et au groupe spécial orthogonal.

3.2.3 Polynômes, fractions rationnelles

Préciser et utiliser davantage le lien entre $A[X]$ et $K[X]$ (K, corps des fractions de l'anneau A), donner des exemples non triviaux de polynômes irréductibles à une et deux indéterminées ; on veillera, pour ce qui est des polynômes cyclotomiques, au "trou" que présente un ouvrage bien connu dans la preuve de leur irréductibilité, et en ce qui concerne le lemme d'Eisenstein, à en donner des applications autres que $1+X+\ldots+X^{p-1}$. La division euclidienne doit être généralisée aux polynômes à plusieurs indéterminées, et la réduction des polynômes symétriques illustrée et appliquée explicitement. Exemples : irréductibilité de X^p-X-1 (p premier) sur $\mathbb{F}_p$, sur $\mathbb{Q}$, étude de $(X-a_1)\ldots(X-a_n)\pm 1$ (les a_i étant des entiers relatifs tous distincts) ; règle de Descartes et nombre de racines réelles pour les polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Quant aux fractions rationnelles : K-automorphismes de K(X), calcul de $(A-XI_n)^{-1}$, séries entières, sommes de Newton ; applications à la combinatoire, à l'arithmétique, à la recherche de parties principales.

3.2.4 Espaces vectoriels, dualité, déterminants

Les propriétés élémentaires (existence de base, de supplémentaires, etc.) en dimension finie doivent être démontrées sans le théorème de Zorn, et les formules d'orthogonalité (orthogonal d'une somme, d'une intersection, réciprocité orthogonale) établies en dimension quelconque ; l'étude de L(E), sur $\mathbb{R}$, appelle quelques propriétés topologiques (ensemble des endomorphismes de rang inférieur ou égal à r, etc.) et, sur un corps quelconque, on doit donner plusieurs définitions de la trace et connaître les formes linéaires sur L(E) ; enfin, l'appel aux déterminants n'est pas la seule méthode pour calculer le rang d'une matrice, de même que l'étude des équations linéaires ne doit pas se limiter au cas d'un corps, mais envisager un anneau commutatif (éventuellement intègre, principal). Exemples : déterminants de Vandermonde, circulants, de Gram, résultant, discriminant, semi-continuité du rang, définition intrinsèque de la trace, densité de $GL(n,\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ et de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$. Espaces vectoriels tirés de l'analyse : fonctions dérivables, noyaux d'opérateurs différentiels ou intégraux élémentaires, dualité dans l^p, rang de systèmes de fonctions. Systèmes linéaires : systèmes différentiels linéaires simples, applications à l'interpolation, à la géométrie (polygones, cercle inscrit, etc.), exemples de méthodes itératives de résolution.

3.2.5 Réduction des endomorphismes

Il est important de préciser si les notions introduites (polynôme caractéristique, polynôme minimal, endomorphisme diagonalisable) sont indépendantes du corps de base, et de ne pas supposer systématiquement que celui-ci est algébriquement clos. Donner diverses conditions pour qu'un sous-espace stable par un endomorphisme ait un supplémentaire également stable, et appliquer de façon significative la décomposition en somme d'un diagonalisable et d'un nilpotent qui commutent. Exemples : critères pour l'existence d'un vecteur f-totalisateur (c'est-à-dire dont les transformés successifs par f engendrent tout l'espace), interprétation des divers coefficients du polynôme caractéristique ; applications de la réduction de Jordan aux dénombrements de classes de similitude, au polynôme minimal, au commutant d'une matrice, à ses puissances et à sa substitution dans une série entière, utilisation dans les suites récurrentes linéaires et les systèmes différentiels, similitude de A et ${}^tA$.

3.2.6 Formes bilinéaires, espaces euclidiens et hermitiens

La mention des propriétés topologiques est indispensable dans l'étude des groupes classiques ($SO(n)$, $SU(n)$, $SP(n)$, etc.), et la décomposition de Cartan-Iwasawa n'est pas à exclure ; on doit faire ressortir la généralité de la réduction de Gauss et définir précisément le discriminant, ainsi que les diverses traductions matricielles. Signalons qu'il est inutile de complexifier l'espace pour montrer qu'un endomorphisme normal réel est diagonalisable et que, si l'on énonce le théorème de Witt, il faut (dans le cas euclidien) savoir lier l'indice de Witt à la signature. Exemples : espaces euclidiens définis sur des espaces de fonctions par divers poids (Legendre, Laguerre, Hermite, Tchebicheff, etc.), éventuellement en se limitant au sous-espace engendré par les N premiers polynômes correspondants ; interprétation géométrique des séries de Fourier et de l'inégalité de Hadamard, définition des angles d'Euler dans SO(3) et détermination des sous-groupes abéliens compacts de O(n).

3.2.7 Géométrie

En premier lieu, ne pas esquiver systématiquement les sujets de géométrie, travail et esprit de synthèse y sont particulièrement visibles et bien récompensés ; dans ce but, lier les problèmes d'angles à l'action de O(n) et SO(n) sur les couples de droites et de demi-droites, étudier inversion et groupe circulaire en liaison avec les homographies de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ et en donner des applications géométriques ; par ailleurs, la "figure" dont on cherche le groupe des isométries qui la laissent invariante doit être un pavage du plan ou de la sphère, plutôt qu'un couple de droites ou un triangle, et l'étude de ce groupe faire intervenir les diverses notions du programme. Exemples : cocyclicité, applications conservant les angles, les droites-cercles, le birapport ; courbes unicursales, homographies sur les coniques ; caractérisation des parties d'un espace vectoriel réel de dimension finie qui peuvent être la boule unité d'une norme.

3.3 Liste des exposés d'algèbre et de géométrie

1 - Problèmes de dénombrement. Exemples.

2 - Structures algébriques quotients. Exemples et applications.

3 - Groupes abéliens finis.

4 - Groupes abéliens de type fini.

5 - Groupes finis. Exemples.

6 - Sous-groupes distingués. Exemples. Théorèmes de factorisation.

7 - Parties génératrices d'un groupe. Exemples.

8 - Groupes opérant sur un ensemble. Applications.

9 - Groupes de permutations d'un ensemble fini.

10 - Idéaux d'un anneau unitaire. Anneaux quotients. Exemples.

11 - Etude de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Eléments inversibles. Indicatrice d'Euler.

12 - Anneaux principaux. Anneaux euclidiens. Exemples.

13 - Anneaux factoriels. Exemples et applications.

14 - Corps. Exemples.

15 - Corps de rupture d'un polynôme irréductible. Construction de corps finis.

16 - Quaternions.

17 - Construction du corps des nombres complexes. Groupe multiplicatif. Théorème de d'Alembert-Gauss.

18 - Racines de l'unité dans un corps commutatif.

19 - Diverses propriétés de l'algèbre des polynômes à n indéterminées.

20 - Fonctions-polynômes. Racines. Multiplicités.

21 - Anneaux quotients de l'anneau des polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif.

22 - Polynômes irréductibles à une indéterminée sur un corps commutatif.

23 - Polynômes symétriques. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme.

24 - Résultant de deux polynômes. Discriminant d'un polynôme.

25 - Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Décomposition en éléments simples et applications.

26 - Théorie de la dimension des espaces vectoriels dans le cas fini.

27 - Rang en algèbre linéaire.

28 - Groupe linéaire en dimension finie.

29 - Dualité en algèbre linéaire. Exemples.

30 - Exemples d'utilisation des matrices.

31 - Formes multilinéaires alternées. Applications.

32 - Déterminants.

33 - Equations linéaires.

34 - Réduction de Jordan.

35 - Polynôme caractéristique et polynôme minimal.

36 - Applications de la réduction des matrices.

37 - Formes bilinéaires symétriques ou alternées.

38 - Décomposition en carrés d'une forme quadratique. Classification sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

39 - Groupe orthogonal d'une forme quadratique non dégénérée.

40 - Espaces vectoriels euclidiens en dimension finie.

41 - Groupe orthogonal d'un espace euclidien de dimension finie.

42 - Espaces vectoriels hermitiens en dimension finie.

43 - Groupe unitaire d'un espace vectoriel hermitien de dimension finie sur $\mathbb{C}$.

44 - Dualité dans les espaces vectoriels euclidiens en dimension finie. Adjoint d'un endomorphisme. Réduction d'un endomorphisme symétrique.

45 - Dualité dans les espaces vectoriels hermitiens en dimension finie. Adjoint d'un endomorphisme. Réduction d'un endomorphisme auto-adjoint.

46 - Réduction des endomorphismes normaux dans les espaces vectoriels hermitiens et euclidiens de dimension finie.

47 - Barycentres. Convexité.

48 - Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Symétries orthogonales.

49 - Angles.

50 - Sur des exemples (en dimension 2 ou 3), description et étude du groupe des isométries laissant globalement invariante une partie donnée.

51 - Similitudes.

52 - Torseurs.

53 - Inversion plane. Groupe circulaire.

54 - Cercles et sphères en géométrie.

55 - Droite projective, homographies, involutions.

56 - Espaces projectifs. Groupe projectif.

57 - Application des formes quadratiques à l'étude des coniques dans le plan affine euclidien.

4. BIBLIOTHÈQUE DE L'AGRÉGATION

Les candidats étaient autorisé à apporter tout livre vendu dans le commerce (à l'exclusion des textes dactylographiés ou ronéotypés) et dépourvu de notes manuscrites.

Ils pouvaient en outre consulter sur place les ouvrages suivants :

ARTIN	*Algèbre géométrique* (Gauthier-Villars)
BASS	*Cours de Mathématiques* (Masson) tomes 1 et 2
BERGER	*Géométrie* (Nathan) : index, tomes 1 à 5
BERGER et GOSTIAUX	*Géométrie différentielle* (Colin)
BLANCHARD	*Corps non commutatifs* (Presses Universitaires)
BOURBAKI	Les tomes suivants : *Théorie des ensembles* *Algèbre* *Fonctions d'une variable réelle* *Topologie générale* *Espaces vectoriels topologiques* *Intégration*
BOUVIER et RICHARD	*Groupes* (Hermann)
BROUSSE	*Mécanique* (Colin)
CABANNES H.	*Cours de mécanique générale* (Dunod)
CAGNAC, RAMIS et COMMEAU	*Nouveau cours de Mathématiques spéciales* (Masson)
CAGNAC et THIBERGE	*Géométrie, classes terminales C* (Masson)
CARTAN	*Fonctions analytiques* (Hermann) *Formes différentielles* (Hermann) *Calcul différentiel* (Hermann)
CHAMBADAL et OVAERT	*Cours de mathématiques* (Gauthier Villars) (tome 1 - tome 2 : algèbre et analyse) *Algèbre linéaire et algèbre tensorielle* (Dunod)
CHOQUET	*Cours d'analyse* (Masson) *L'enseignement de la géométrie* (Hermann)
COUTY	*Analyse* (Colin)
DIEUDONNE	*Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* (Hermann) *Sur les groupes classiques* (Hermann) *Calcul infinitésimal* (Hermann) *Éléments d'analyse* (Gauthier Villars) Tomes 1 et 2
DIXMIER	*Analyse M.P.* (Gauthier Villars)
DUBREUIL (M. et Mme)	*Leçon d'algèbre moderne* (Dunod)
DUBUC	*Géométrie plane* (Presses Universitaires)
EXBRAYAT et MAZET	*Algèbre, Analyse, Topologie*
FELLER	*An introduction to probality theory and its applications* (Viley) tomes 1 et 2
FRENKEL	*Algèbre et Géométrie* *Géométrie pour l'élève professeur* (Hermann)
GENET	*Mesure et Intégration* (Vuibert)
GODEMENT	*Algèbre* (Hermann)
HARDY G.H.	*A course of Pure Mathematics* (Cambridge University Press)
HENNEQUIN et TORTRAT	*Théorie des probabilités et quelques applications* (Masson)
HOCQUENGHEM et JAFFARD	*Mathématiques* (Masson) tomes 1 et 2
KERBRAT	*Géométrie des courbes et des surfaces* (Hermann)
KREE	*Introduction aux Mathématiques appliquées* (Dunod)
KRIVINE	*Théorie axiomatique des ensembles* (Presses Universitaires)
LANG	*Introduction aux variétés différentiables* (traduction fançaise) *Algèbre - Linéar Algabra*
Mme LELONG-FERRAND et ARNAUDIES	*Cours de mathématiques,* 4 tomes (Dunod)
Mme LELONG-FERRAND	*Géométrie différentielle* (Masson)
MAC LANE et BIRKHOFF	*Algèbre, structures fondamentales* (traduction française, tome 1 (Gauthier Villars) *Les grands théorèmes* (traduction française)
MALLIAVIN	*Géométrie différentielle intrinsèque* (Hermann)
MARTIN P.	*Géométrie* (Colin)
METIVIER	*Introduction à la théorie des probabilités*
MUTAFIAN	*Le défi algébrique* (Vuibert) tomes 1 et 2
NEVEU J.	*Bases mathématiques de calcul des probabilités* (Masson)

QUEYSANNE	*Algèbre* (Colin)
RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX	*Mathématiques spéciales* (Masson) Tomes 1 et 2 : *algèbre ;* tomes 3 et 4 : *analyse.*
RIESZ et NAGY	*Leçons d'analyse fonctionnelle* (Gauthier Villars)
RUDIN	*Real and complex analysis* (Mac Grandhill)
SAMUEL	*Théorie algébrique des nombres* (Hermann)
SCHWARTZ	*Cours d'analyse* (Hermann) tomes 1 et 2 *Topologie générale et analyse fonctionnelle* (Hermann)
SERRE	*Cours d'arithmétique* (Presses universitaires)
VALIRON	*Cours d'analyse* (Masson) tomes 1 et 2
VAUQUOIS	*Les Probabilités* (Hermann)
WARUSFEL	*Structures algébriques finies* (Hachette)
ZAMANSKY	*Algèbre et analyse moderne* (Dunod)
ZISMAN	*Topologie algébrique* (Colin)

Achevé d'imprimer au C.R.D.P. de Toulouse – Février 1981
Dépôt Légal 1er trimestre 1981