MÉCANIQUE

Durée : 6 heures

MOUVEMENT D'UN MAILLAGE

Première partie. — GÉNÉRALITÉS

Soit $O_1 \vec{x}_1 \vec{y}_1 \vec{z}_1$ un repère absolu orthonormé R_1 et $O \vec{u}_1 \vec{u}_2 \vec{u}_3$ un repère variable R non nécessairement orthonormé. La position de R par rapport à R_1 est définie par les coordonnées α_{i0} du point O et les composantes α_{ij} du vecteur $\vec{u}_j$ $(i, j = 1, 2, 3)$.

On appelle maillage l'ensemble des $(2n + 1)^3$ points matériels M_{klm} de même masse $\frac{\mu}{(2n + 1)^3}$, ayant pour coordonnées k, l, m dans le repère R. (k, l, m entiers relatifs compris entre $-n$ et $+n$). La position du maillage par rapport à R_1 est donc définie par les 12 paramètres α_{ij} $(i = 1, 2, 3;\; j = 0, 1, 2, 3)$.

1° Calculer l'énergie cinétique T du maillage. (On rappelle que la somme des carrés des n premiers entiers est égale à $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; on posera $K = \frac{n^2 + n}{3}$).

On suppose connues les expressions de la puissance virtuelle des forces intérieures $\mathcal{P}_I^*$ et de la puissance virtuelle des forces extérieures $\mathcal{P}_E^*$ qui sont des formes linéaires des dérivées virtuelles $\dot{\alpha}_{ij}^*$:

$$\mathcal{P}_I^* = \sum_{i,j} \mathcal{Q}_{Iij}\, \dot{\alpha}_{ij}^* \qquad \mathcal{P}_E^* = \sum_{i,j} \mathcal{Q}_{Eij}\, \dot{\alpha}_{ij}^*$$

Écrire les équations définissant le mouvement du maillage.

2° On désigne par $\overleftrightarrow{\mathcal{J}}$ le tenseur d'inertie en O du maillage et par $\vec{\sigma}_O$ le moment cinétique en O du maillage. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{\Omega}_1$ tel que $\vec{\sigma}_O = \overleftrightarrow{\mathcal{J}} . \vec{\Omega}_1$. A quelle condition ce vecteur est-il déterminé de façon unique ? Dans la suite du problème, on appellera ce vecteur « rotation instantanée » du maillage.

3° On désigne par $\vec{V}_{klm}$ le vecteur vitesse du point M_{klm}. A tout vecteur $\vec{\Omega}$ on associe un ensemble de vecteurs

$$\vec{V}_1(M_{klm}) = \vec{V}_{000} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}_{klm}$$

Déterminer le vecteur $\vec{\Omega}$ tel que la quantité :

$$\sum_{k,l,m} [\vec{V}_{klm} - \vec{V}_1(M_{klm})]^2$$

soit minimum. Montrer que la solution de ce problème coïncide avec le vecteur $\vec{\Omega}_1$ défini à la question précédente.

4° Soit $O \vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{v}_3$ le repère principal d'inertie du tenseur $\overleftrightarrow{\mathcal{J}}$, en supposant que celui-ci est défini de façon unique. Soit $\vec{\Omega}_2$ la rotation instantanée du repère $O \vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{v}_3$ par rapport à R_1. Montrer que $\vec{\Omega}_2$ est en général différent de $\vec{\Omega}_1$. (On pourra construire un contre-exemple correspondant au cas où $\vec{\Omega}_2 = 0$ et $\vec{\Omega}_1 \neq 0$.)

On désigne par U_{ij} les composantes du vecteur $\vec{u}_j$ sur la base $\vec{v}_i$. Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que $\vec{\Omega}_2 = \vec{\Omega}_1$ est que le système des relations

$$\sum_k \dot{U}_{ik} U_{jk} = 0$$

soit vérifié à tout instant t et pour tout couple i, j tel que $i \neq j$. Montrer que cette circonstance se trouve en particulier réalisée dans les deux cas suivants :

a. Les vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, se déduisent de leur position initiale $\vec{u}_{10}$, $\vec{u}_{20}$, $\vec{u}_{30}$ par le produit d'une rotation $\mathcal{R}(t)$ et d'une multiplication par un scalaire $\lambda(t)$, fonctions du temps. On appellera $\lambda(t)$ la dilatation.

b. L'un des vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, reste orthogonal aux deux autres, ces derniers ayant même longueur (on prendra par exemple $\vec{u}_3\,\vec{u}_1 = \vec{u}_3\,\vec{u}_2 = 0$ avec $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2|$.

5° On appelle vitesse de déformation au point M_{klm} la différence

$$\Delta \vec{V}_{klm} = \vec{V}_{klm} - \vec{V}_1(M_{klm})$$

calculée à partir du vecteur $\vec{\Omega}_1$ défini à la question 2°. On appelle énergie cinétique de déformation du maillage l'énergie cinétique T_Δ calculée pour l'ensemble des vecteurs $\Delta \vec{V}_{klm}$ et énergie cinétique de déplacement T_S celle calculée pour l'ensemble des vecteurs $\vec{V}_1(M_{klm})$. Comparer T, T_S et T_Δ.

6° Appliquer les théorèmes généraux de la dynamique au maillage (théorème du mouvement du centre d'inertie et théorème du moment dynamique). Montrer qu'on peut retrouver ces résultats à partir des équations obtenues à la question 1° en utilisant un ensemble de vitesses virtuelles solidifiant le maillage. Former les conditions liant les $\mathcal{Q}_{Iij}$ et les α_{ij} pour que l'énoncé suivant soit valable : « la puissance virtuelle de l'ensemble des forces intérieures est nulle pour tout champ de vitesses virtuelles solidifiant le système ». On supposera ces conditions toujours réalisées dans la suite du problème.

7° On appelle déformation pure du maillage tout mouvement pour lequel on a constamment $\vec{V}(O) = \vec{\Omega}_1 = 0$. Caractériser une déformation pure par des relations entre les α_{ij} et leurs dérivés $\dot{\alpha}_{ij}$. Caractériser au moyen d'une part du torseur des forces extérieures, d'autre part des données initiales, les problèmes qui ont pour solution un mouvement de déformation pure du maillage. Les forces extérieures peuvent-elles intervenir dans cette déformation pure ?

DEUXIÈME PARTIE. — APPLICATIONS

1° On suppose que les forces intérieures sont des forces attractives proportionnelles à la distance, M_{klm} exerçant sur $M_{k'l'm'}$ la force $f\,\overrightarrow{M_{k'l'm'}M_{klm}}$ (et $M_{k'l'm'}$ exerçant sur M_{klm} la force opposée). f est un coefficient constant. Montrer que ces forces dérivent d'une fonction de force que l'on calculera pour l'ensemble du maillage. On suppose également qu'il existe des forces extérieures dont la puissance virtuelle est définie par les coefficients

$$\mathcal{Q}_{Ei0} = -\,h\alpha_{i0}$$
$$\mathcal{Q}_{Eij} = -\,h(\alpha_{ij} - a_{ij}) \qquad (j = 1, 2, 3)$$

les quantités h et a_{ij} étant des constantes.

Former les équations du mouvement et décrire les mouvements du maillage.

2° On se place dans la situation décrite dans la 1re partie 4°, *a*. On utilise le repère principal d'inertie $O\,\vec{v}_1\,\vec{v}_2\,\vec{v}_3$ et on appelle p, q, r les composantes de la rotation instantanée $\vec{\Omega}_1$ sur ce repère. On suppose que l'ensemble des forces intérieures dérive d'une fonction $\mathcal{U}(\lambda)$ et qu'il n'y a pas de forces extérieures. Enfin on désignera par A, B, C les moments principaux d'inertie du maillage dans la position définie par $\vec{u}_{10}$, $\vec{u}_{20}$, $\vec{u}_{30}$.

Former les équations du mouvement. Montrer qu'on peut en déduire une équation de la forme $\dot{\lambda}^2 = F(\lambda)$. (On précisera l'expression de F). Montrer qu'en posant $P = \lambda^2 p$, $Q = \lambda^2 q$, $R = \lambda^2 r$ et en substituant à la variable t un paramètre τ convenablement choisi, on retrouve pour définir les variations de P, Q, R les équations de Poinsot.

3° On se place dans la situation décrite dans la 1re partie 4°, *b*. On utilise le repère $Oxyz$ où Ox, Oy sont les bissectrices de $O\vec{u}_1$, $O\vec{u}_2$ et où Oz est le support de $\vec{u}_3$. On utilise les paramètres λ_1, λ_2, θ définis par $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = \lambda_1(t)\,a$, $|\vec{u}_3| = \lambda_2(t)\,a$, $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 2\theta$ et les composantes p, q, r de $\vec{\Omega}_1$ sur $Oxyz$. Former les équations différentielles liant les quantités p, q, r, λ_1, λ_2, θ. Montrer que ce système admet deux intégrales premières. On supposera que les forces intérieures dérivent d'une fonction de force $\mathcal{U}(\lambda_1, \lambda_2, \theta)$ et qu'il n'y a pas de forces extérieures.

Première partie

1°) Un petit travail de sommation conduisait à l'expression

$$2T = \mu\left[\sum_i \dot{\alpha}_{i0}^{\,2} + K \sum_{i,j} \dot{\alpha}_{ij}^{\,2}\right]$$

Les équations du mouvement s'en déduisent par application du principe des puissances virtuelles sous la forme

$$\mu\,\ddot{\alpha}_{i0} = Q_{Ii0} + Q_{Ei0} \qquad (i=1,2,3)$$

$$\mu K\,\ddot{\alpha}_{ij} = Q_{Iij} + Q_{Eij} \qquad (i,j=1,2,3)$$

2°) Le tenseur d'inertie ne dépendant que de la répartition des masses à un instant donné, le résultat suivant établi dans les cours de 1^er cycle reste valable pour un maillage : les valeurs propres de la matrice d'inertie sont les moments principaux d'inertie ; ceux-ci sont toujours strictement positifs et donc $\vec{\Omega}_1$ est défini de façon unique par la relation $\vec{\sigma}_0 = \overleftrightarrow{J}\,.\,\vec{\Omega}_1$, à l'exception du cas où toutes les masses sont concentrées sur un axe (les vecteurs $\vec{u}_j$ sont alors colinéaires, on a une condition de compatibilité $\vec{\sigma}_c \cdot \vec{u}_j = 0$ et le vecteur $\vec{\Omega}_1$ est défini à une composante arbitraire près suivant $\vec{u}_j$.)

3°) La somme à étudier étant considérée comme fonction de $\vec{\Omega}$, son gradient est

$$2\left[\sum_{klm}\left\{\overrightarrow{CM}_{klm} \wedge \vec{V}_{klm}\right\} - \frac{1}{\mu}\overleftrightarrow{J}\,.\,\vec{\Omega}\right]$$

comme on le vérifie par exemple par un calcul matriciel. La condition d'extremum conduit donc au vecteur $\vec{\Omega}_1$ déjà défini. Le fait que cet extremum est un minimum résulte de ce que la partie quadratique de la somme initiale est définie positive.

4°) Un contre-exemple est obtenu en supposant que $O\vec{v}_1\vec{v}_2\vec{v}_3$ est fixe et confondu avec $O_1x_1y_1z_1$ ce qui s'exprime par $\sum_k \alpha_{ik}\alpha_{jk} = 0 \quad \forall i,j\ (i \neq j)$

Cette condition implique $\sum_k(\dot{\alpha}_{ik}\alpha_{jk} + \alpha_{ik}\dot{\alpha}_{jk}) = 0$, mais est compatible avec $\sum_k(\dot{\alpha}_{ik}\alpha_{jk} - \alpha_{ik}\dot{\alpha}_{jk}) \neq 0$ c'est-à-dire $\vec{\sigma}_c \neq 0$ donc $\vec{\Omega}_1 \neq 0$.

En partant des U_{ij} on obtient en utilisant les dérivées

$$\dot{\vec{u}}_i = \left(\frac{d}{dt}\vec{u}_i\right)_{rel} + \vec{\Omega}_2 \wedge \vec{u}_i$$

$$\vec{\sigma}_0 = \mu K \sum_i \vec{u}_i \wedge \left(\frac{d\vec{u}_i}{dt}\right)_{rel} + \overleftrightarrow{J}\,.\,\vec{\Omega}_2$$

On aura donc $\vec{\sigma}_0 = \overleftrightarrow{J}\,.\,\vec{\Omega}_2$ si et seulement si

$$\sum_k (U_{ik}\dot{U}_{jk} - \dot{U}_{ik}U_{jk}) = 0$$

Tenant compte du fait que les axes utilisés sont axes principaux d'inertie, on a aussi $\sum_k U_{ik}U_{jk} = 0$ et donc $\sum_k(U_{ik}\dot{U}_{jk} + \dot{U}_{ik}U_{jk}) = 0$ d'où on déduit le résultat demandé.

Ces relations sont vérifiées directement dans le cas a) (la dilatation laisse invariants les axes principaux d'inertie) et il était facile de mettre en place les axes principaux d'inertie dans le cas b), donc d'utiliser les U_{ij}.

5°) Par développement du carré $\left[\Delta \vec{v}_{k\ell m} + \vec{V}_1(M_{k\ell m})\right]^2$

on obtient

$$2T = 2T_\Delta + 2T_S + \frac{2\mu}{(2n+1)^3}\sum_{k\ell m}\left[\vec{V}_{k\ell m} - \vec{V}_1(M_{k\ell m})\right]\vec{V}_1(M_{k\ell m})$$

et le troisième terme se réduit à la somme

$$2\mu K \sum_i \left(\dot{\vec{u}}_i - \vec{\Omega}\wedge\vec{u}_i\right).\left(\vec{\Omega}\wedge\vec{u}_i\right) = \vec{\Omega}\left[\vec{\sigma}_0 - J.\vec{\Omega}\right] = 0$$

On a donc $T = T_\Delta + T_S$

6°) Le théorème du centre d'inertie donne le mouvement de O. Comme les forces extérieures doivent seules intervenir, ceci exige $Q_{Ii0} = 0 \ \forall i$

Le théorème du moment donne $\dfrac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \vec{m}$

On retrouve ces résultats en choisissant pour champ de vitesses virtuelles soit une translation, soit une rotation autour de O.

Les relations demandées entre les Q_{Iij} et les α_{ij} sont

$$\sum_k \left(\alpha_{ki}\, Q_{Ikj} - \alpha_{kj}\, Q_{Iki}\right) = 0 \quad \forall i,j$$

7°) Une déformation pure est définie par

$$\dot{\alpha}_{i0} = 0 \quad \forall i \qquad et \qquad \sum_k \left(\alpha_{ik}\,\dot{\alpha}_{jk} - \alpha_{jk}\,\dot{\alpha}_{ik}\right) = 0 \quad \forall i,j$$

Le torseur des forces extérieures est nul, et les données initiales satisfont à $\vec{V}(0) = 0$, $\vec{\Omega} = 0$; ces conditions sont suffisantes d'après la question précédente. A noter que les forces extérieures peuvent très bien intervenir dans le mouvement (par exemple des forces de compression pour un mouvement de dilatation).

Deuxième partie

1°) La fonction de force est de la forme

$$\mathcal{U} = -\frac{k}{3}\, m^3 (n+1)(2n+1)^4 \left[|\vec{u}_1|^2 + |\vec{u}_2|^2 + |\vec{u}_3|^2\right]$$

Les équations du mouvement sont donc linéaires, et de plus les différents paramètres sont découplés. L'étude des vibrations est classique.

2°) L'énergie cinétique et le moment cinétique se présentent sous la forme

$$2T = \lambda^2\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right) + \dot{\lambda}^2\,\frac{A+B+C}{2}$$

$$\vec{\sigma}_0 = \left(\lambda^2 Ap,\ \lambda^2 Bq,\ \lambda^2 C\right)$$

Les équations du mouvement sont donc

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\lambda^2 Ap\right) + \lambda^2 qr\,(C-B) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\lambda^2 Bq\right) + \lambda^2 rp\,(A-C) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\lambda^2 Cr\right) + \lambda^2 pq\,(B-A) = 0 \end{cases} \qquad avec\ T = U + h$$

On en déduit l'intégrale première

$$A p^2 + B q^2 + C r^2 = \frac{C_1}{\lambda^4} \qquad (C_1 = \text{Constante})$$

puis l'équation définissant les variations de λ :

$$\dot{\lambda}^2 = \frac{2(U+h)}{\frac{A+B+C}{2}} - \frac{C_1}{\lambda^2}$$

Il suffit de compléter le changement de variables indiqué par $d\tau = \lambda^2 d$ pour retrouver les équations du mouvement de Poinsot.

3°)En utilisant d'une part les équations du moment et d'autre part les équations de Lagrange par rapport aux paramètres λ_1 , λ_2 et θ on obtient, en posant $2\mu K a^2 = I$

$$\frac{d}{dt}\left[(\lambda_1^2 \cos^2\theta + \lambda_2^2) I p\right] + I q r (\lambda_1^2 \cos^2\theta - \lambda_2^2) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[(\lambda_1^2 \sin^2\theta + \lambda_2^2) I q\right] + I r p (\lambda_2^2 - \lambda_1^2 \sin^2\theta) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\lambda_1^2 I r\right] - I p q \lambda_1^2 \cos 2\theta = 0$$

$$I \ddot{\lambda}_2 - I \lambda_2 (p^2 + q^2) = \frac{\partial U}{\partial \lambda_2}$$

$$I \ddot{\lambda}_1 - I \lambda_1 (p^2 \cos^2\theta + q^2 \sin^2\theta) = \frac{\partial U}{\partial \lambda_1}$$

$$\frac{d}{dt}(I \lambda_1^2 \dot{\theta}) - I \lambda_1^2 \sin\theta \cos\theta (q^2 - p^2) = \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

Les intégrales premières demandées sont $T = U + h$ et $|\vec{\sigma_0}| = C^{te}$

Observations

Si la première question a été résolue par de nombreux candidats, beaucoup ont perdu du temps ensuite par des maladresses. A la quatrième question, certains ont obtenu la relation intermédiaire citée ci-dessus mais n'ont pas su conclure. L'un a même conclu à une erreur d'énoncé ! La cinquième question a été assez rarement traitée de façon correcte, par contre les deux suivantes ont enregistré plus de succès.

La deuxième partie débutait par une question facile et que ceux qui l'ont abordée ont en général traitée assez correctement. La suite a permis de distinguer quelques rares copies dont le niveau était nettement supérieur à la moyenne.

Résultats

Pour 152 copies de mécanique, les notes se répartissent de la façon suivante :

0	de 1 à 5	de 6 à 10	de 11 à 15	de 16 à 20	plus de 20
16	73	33	16	10	4