Durée : 6 heures

ANALYSE NUMÉRIQUE

0. PRÉLIMINAIRES

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, muni de la no notée $\| \cdot \|$.

Soit r un entier supérieur ou égal à 1; on désigne par E^r l'espace vectoriel des matrices colonnes à r li

$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix}$ avec $u_i \in E$, $1 \leqslant i \leqslant r$. L'élément U de E^r sera noté $U = (u_1, \ldots, u_r)^T$.

On munit l'espace vectoriel E^r de la norme $\| \cdot \|_1$ définie par :

$$\forall U = (u_1, \ldots, u_r)^T, \qquad \| U \|_1 = \sum_{i=1}^{r} \| u_i \| .$$

On note $\mathcal{L}(E)$ (respectivement $\mathcal{L}(E^r)$) l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des opérateurs linéaires de E (resp^t de dans lui-même. On munit ces espaces des normes notées encore $\| \cdot \|$ et $\| \cdot \|_1$ respectivement, définies par :

$$\forall g \in \mathcal{L}(E), \qquad \| g \| = \max_{x \in E,\ x \neq 0} \| g(x) \| / \| x \|$$

$$\forall B \in \mathcal{L}(E^r), \qquad \| B \|_1 = \max_{U \in E^r,\ U \neq 0} \| BU \|_1 / \| U \|_1 .$$

Soit A une matrice carrée d'ordre r d'élément générique $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $1 \leqslant i, j \leqslant r$; on lui associe l'opér linéaire, noté encore A, appartenant à $\mathcal{L}(E^r)$, défini par :

si $U = (u_1, \ldots, u_r)^T$ et si $V = (v_1, \ldots, v_r)^T$ appartiennent à E^r alors $V = AU$ équiva

$(\forall i = 1, \ldots, r,\ v_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} u_j)$.

Q. 1. *Montrer que, pour un tel opérateur* A,

$$\| A \|_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant r} \left(\sum_{i=1}^{r} | a_{ij} | \right) .$$

Q. 2. Étant donnés r nombres réels $a_1, a_2, \ldots, a_r$ on leur associe la matrice carrée d'ordre r no d'élément générique r_{ij}

$$r_{ij} = \delta_{i,\,j+1} + a_j \delta_{1,\,i}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant r, \qquad 1 \leqslant j \leqslant r$$

où :

$$\begin{cases} \delta_{i,\,j} = 1 & \text{si } i = j \\ \delta_{i,\,j} = 0 & \text{si } i \neq j . \end{cases}$$

a. *Montrer que si* R *admet une valeur propre de module* 1 *et de multiplicité supérieure ou égale à* 2, *la suite* $(\mathrm{R}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ *des puissances de la matrice* R *n'est pas bornée*; (*on pourra pour cela préciser la dimension de l'espace propre associé à cette valeur propre de module* 1).

b. *Montrer que, pour qu'il existe une matrice carrée* H *d'ordre* r *à coefficients dans* $\mathbb{C}$, *inversible et d'inverse* H^{-1}, *telle que* $\| \mathrm{H}^{-1} \mathrm{R} \mathrm{H} \|_1 \leqslant 1$ *il faut et il suffit que les valeurs propres de* R *soient toutes de module inférieur ou égal à* 1 *et que les valeurs propres de module* 1 *soient simples.*

c. On suppose maintenant que la matrice R vérifie la condition

$$(\mathrm{D}) \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ est valeur propre simple de R et les autres valeurs propres} \\ \text{de R sont de module strictement inférieur à } 1, \end{array} \right.$$

et on considère l'ensemble $\mathfrak{S}$ des matrices carrées d'ordre r à coefficients complexes telles que :

$$\forall \mathrm{S} \in \mathfrak{S}, \qquad \mathrm{S}\xi = \xi$$

où ξ désigne la matrice colonne de $\mathbb{R}^r$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

Montrer que si R *vérifie la condition* (D), *il existe une matrice inversible* H *et un nombre réel positif* ε *tels que les conditions*

$$\mathrm{S} \in \mathfrak{S} \quad \textit{et} \quad \| \mathrm{S} - \mathrm{R} \|_1 \leqslant \varepsilon \qquad \textit{entraînent} \quad \| \mathrm{H}^{-1} \mathrm{S} \mathrm{H} \|_1 \leqslant 1.$$

I

Soit T un nombre réel positif; pour $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{C}^m([0, \mathrm{T}]; \mathrm{E})$ l'espace des fonctions m fois continûment différentiables de $[0, \mathrm{T}]$ à valeurs dans E et $\mathrm{C}^m([0, \mathrm{T}] \times \mathrm{E}; \mathrm{E})$ l'espace des fonctions m fois continûment différentiables de $[0, \mathrm{T}] \times \mathrm{E}$ à valeurs dans E.

On se donne une fonction $f : (t, y) \rightsquigarrow f(t, y)$ appartenant à $\mathrm{C}^1([0, \mathrm{T}] \times \mathrm{E}; \mathrm{E})$ et on note $\mathrm{D}_y f(t, y)$ la dérivée partielle de f par rapport à y au point (t, y); on supposera dans toute la suite qu'il existe un nombre réel positif L tel que

$$\forall t \in [0, \mathrm{T}], \quad \forall y \in \mathrm{E}, \qquad \| \mathrm{D}_y f(t, y) \| \leqslant \mathrm{L}.$$

On se propose d'approcher la solution du problème différentiel de condition initiale suivant :

$$(\mathrm{P}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Déterminer } y \in \mathrm{C}^1([0, \mathrm{T}]; \mathrm{E}) \text{ vérifiant :} \\ \forall t \in [0, \mathrm{T}], \qquad y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y_0 \text{ donné dans E,} \end{array} \right.$$

où $y'(t)$ désigne la dérivée de la fonction y au point t.

Q. 3. *Montrer que pour tout* $t \in [0, \mathrm{T}]$, *tout* y *et* z de E, *il existe un opérateur* $g(t; y, z)$ *de* $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *tel que*

$$f(t, y) - f(t, z) = g(t; y, z)(y - z)$$

et

$$\| g(t; y, z) \| \leqslant \mathrm{L}.$$

On considère maintenant une subdivision

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots < t_\mathrm{N} = \mathrm{T}$$

de l'intervalle $[0, \mathrm{T}]$ et on note, pour $n = 1, \ldots, \mathrm{N}$, par $h_n = t_n - t_{n-1}$ le $n^{\text{ième}}$ pas.

On se propose de déterminer par récurrence des valeurs approchées $y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_\mathrm{N}$ de la solution $y(\,.\,)$ du problème (P) aux points $t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots, t_\mathrm{N}$. Pour cela on se donne un entier r avec $1 \leqslant r \leqslant \mathrm{N}$, et on suppose déterminées les valeurs approchées $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ $(r \leqslant n \leqslant \mathrm{N})$.

Q. 4. Soit $\pi_{n,r}$ la fonction « polynomiale » de $[0, T]$ à valeurs dans E

$$\pi_{n,r}(t) = \sum_{k=0}^{r} t^k d_{k,n,r}$$

où les « coefficients » $d_{k,n,r}$ appartiennent à E et sont déterminés par les relations :

$$\begin{cases} \forall i = 1, 2, \ldots, r, & \pi_{n,r}(t_{n-i}) = y_{n-i} \\ & \pi_{n,r}(t_n) = z \quad \text{donné dans E.} \end{cases}$$

a. *On pose* $z^* = \dfrac{d}{dt}\pi_{n,r}(t_n)$. *Montrer que* z et z^* *sont liés par une relation de la forme*

$$z = \sum_{i=1}^{r} a_{n,i}\, y_{n-i} + h_n b_n z^*.$$

Calculer les coefficients $a_{n,i}$ *et* b_n *en fonction des abscisses* $t_n, t_{n-1}, \ldots, t_{n-r}$.

b. *Montrer que lorsque le pas* $h_n = h = T/N$ *est constant les coefficients* $a_{n,i}$ *et* b_n *ne dépendent que* i *et* r ; *on les notera respectivement* a_i *et* b.

c. *Montrer que si la subdivision de l'intervalle* $[0, T]$ *vérifie la condition*

(1) *il existe* $\delta > 0$, *tel que* $\forall n = 1, 2, \ldots, N-1, \quad 0 < \dfrac{1}{\delta} \leqslant \dfrac{h_{n+1}}{h_n} \leqslant \delta$,

alors il existe un nombre réel positif $C_1(\delta)$ *tel que, pour tout* n *vérifiant* $r \leqslant n \leqslant N$, on ait :

$$\forall i = 1, 2, \ldots, r, \qquad |a_{n,i}| \leqslant C_1(\delta), \quad |b_n| \leqslant C_1(\delta).$$

d. *Établir les relations*

$$\sum_{i=1}^{r} a_{n,i} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{r} a_{n,i}(t_n - t_{n-i}) = h_n b_n .$$

e. *Montrer que, si* $h_n b_n L < 1$, *il existe un élément unique* y_n *de* E *tel que :*

$$y_n = \sum_{i=1}^{r} a_{n,i}\, y_{n-i} + h_n b_n f(t_n, y_n).$$

Q. 5. Soit $z \in C^{r+2}([0, T]; E)$; on pose, pour $r \leqslant n \leqslant N$

$$\varepsilon_n(z) = z(t_n) - \sum_{i=1}^{r} a_{n,i}\, z(t_{n-i}) - h_n b_n z'(t_n),$$

où z' désigne la dérivée de la fonction z.

a. *Démontrer que, sous l'hypothèse* (1) *de* **Q. 4.** c, *il existe un nombre réel positif* $C_2(\delta)$ *indépendant de* n, *tel que*

$$\| \varepsilon_n(z) \| \leqslant C_2(\delta)\, h^r \int_{t_{n-r}}^{t_n} \| z^{(r+1)}(t) \|\, dt,$$

où on a posé $h = \max\limits_{1 \leqslant n \leqslant N} h_n$ *et où* $z^{(k)}$ *désigne la dérivée* $k^{\text{ième}}$ *de la fonction* z.

b. *Montrer que, sous l'hypothèse* (1), *il existe des nombres réels* $C_3(\delta)$ (*indépendant de* n) *et* $\gamma_{n,r}$ *tels que*

$$\| \varepsilon_n(z) - \gamma_{n,r}\, b_n h_n^{r+1} z^{(r+1)}(t_n) \| \leqslant C_3(\delta)\, h_n^{r+1} \int_{t_{n-r}}^{t_n} \| z^{(r+2)}(t) \|\, dt.$$

Donner une expression simple de $\gamma_{n,r}$ *en fonction de* $t_n, t_{n-1}, \ldots, t_{n-r}$; *préciser la valeur* γ_r *de* $\gamma_{n,r}$ *lorsque le pas* $h_n = h$ *est constant.*

II

On définit par récurrence des valeurs approchées y_n de $y(t_n)$ par :

$$
(\mathrm{P}_h) \begin{cases} y_\mu = \eta_\mu \text{ donné dans E, pour } \mu = 0, 1, \ldots, r-1 \\ y_n = \sum_{i=1}^{r} a_{n,i}\, y_{n-i} + h_n b_n f(t_n, y_n), \quad \text{pour} \quad r \leqslant n \leqslant \mathrm{N} \end{cases}
$$

où les valeurs de démarrage $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{r-1}$ sont calculées par une autre méthode que nous ne préciserons pas ici.

Nous supposons dans tout ce qui suit qu'il existe un nombre réel positif $\nu < 1$ tel que

(2) $$\forall n \geqslant r, \qquad h_n b_n \mathrm{L} \leqslant \nu$$

de sorte que le problème (P_h) admet une solution unique.

On considère maintenant deux suites $(\varepsilon_n)_{r \leqslant n \leqslant \mathrm{N}}$ et $(z_n)_{0 \leqslant n \leqslant \mathrm{N}}$ vérifiant les « équations perturbées »

$$
(\mathrm{Q}_h) \begin{cases} z_0, z_1, \ldots, z_{r-1} \text{ donnés dans E,} \\ z_n = \sum_{i=1}^{r} a_{n,i}\, z_{n-i} + h_n b_n f(t_n, z_n) + \varepsilon_n \qquad \text{pour} \quad r \leqslant n \leqslant \mathrm{N}. \end{cases}
$$

On pose

$$u_n = y_n - z_n \quad \text{et} \quad \mathrm{U}_n = (u_n, u_{n-1}, \ldots, u_{n-r+1})^{\mathrm{T}}.$$

Q. 6. a. *Montrer qu'il existe un opérateur* $\mathrm{G}_n \in \mathcal{L}(\mathrm{E}^r)$ *ne dépendant que de* $g(t_n\,;\, y_n, z_n)$, *une matrice carrée* R_n *d'ordre* r *ne dépendant que des coefficients* $a_{n,i}$ *et un élément* E_n *de* E^r *ne dépendant que de* ε_n, *tels que l'on ait :*

$$(\mathrm{I} - h_n b_n \mathrm{G}_n)\, \mathrm{U}_n = \mathrm{R}_n \mathrm{U}_{n-1} + \mathrm{E}_n, \qquad \textit{pour} \quad r \leqslant n \leqslant \mathrm{N},$$

où I *désigne l'opérateur identité.*

b. *Lorsque le pas* $h_n = h$ *est constant la matrice* R_n *ne dépend pas de* n; *on la notera* R. *Calculer la matrice* R *pour* $r = 2$, 3 *et* 4; *montrer que cette matrice* R *vérifie la condition* (D) *de* **Q. 2.** c.

On suppose désormais que $r = 2$, 3 ou 4.

c. *En déduire qu'il existe un nombre réel positif* α_r *et une matrice carrée d'ordre* r *inversible, notée* H_r, *tels que si la subdivision de l'intervalle* $[0, \mathrm{T}]$ *vérifie la condition*

(3) $$\forall n = 2, \ldots, \mathrm{N}, \qquad \left| 1 - \frac{h_n}{h_{n-1}} \right| \leqslant \alpha_r,$$

alors on a :

$$\forall n = r, \ldots, \mathrm{N}, \qquad \| \mathrm{H}_r^{-1} \mathrm{R}_n \mathrm{H}_r \|_1 \leqslant 1 \quad \textit{et la condition } (1) \textit{ de } \mathbf{Q.\ 4.}\ \mathrm{c.}$$

d. *Montrer qu'il existe un nombre réel positif* C_4 *tel que, pour* $r \leqslant n \leqslant \mathrm{N}$

$$\| \mathrm{H}_r^{-1} (\mathrm{I} - h_n b_n \mathrm{G}_n)^{-1} \mathrm{H}_r \|_1 \leqslant 1 + \mathrm{C}_4 h_n \mathrm{L}.$$

e. *En déduire que, sous l'hypothèse* (3), *il existe un nombre réel positif* C_5 *tel que*

$$\forall n = r, \ldots, \mathrm{N}, \qquad \| \mathrm{U}_n \|_1 \leqslant \mathrm{C}_5 \exp(\mathrm{C}_4 \mathrm{L}\, t_n) \left[\| \mathrm{U}_{r-1} \|_1 + \sum_{i=r}^{n} \| \varepsilon_i \| \right].$$

Q. 7. *On suppose maintenant que* $f \in \mathrm{C}^r([0, \mathrm{T}] \times \mathrm{E}\,;\, \mathrm{E})$. *Montrer que, sous l'hypothèse* (3), *il existe un nombre réel positif* C_6 *tel que*

$$\forall n = r, \ldots, \mathrm{N}, \qquad \| y_n - y(t_n) \| \leqslant \mathrm{C}_5 \exp(\mathrm{C}_4 \mathrm{L}\, t_n) \left[\sum_{\mu=0}^{r-1} \| y_\mu - y(t_\mu) \| + \mathrm{C}_6 h^r \int_0^{t_n} \| y^{(r+1)}(t) \| \, dt \right].$$

III

On se donne maintenant une fonction $\theta \in C^1([0,T]\,;\,\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall\, t \in [0,T], \qquad 0 < \theta(t) \leqslant 1,$$

et un paramètre réel positif h de telle sorte que la subdivision de l'intervalle $[0,T]$ vérifie

$$\forall\, n = 1, \ldots, N, \qquad | h_n - h\theta(t_n) | \leqslant C_7 h_n^2$$

où C_7 est un nombre réel positif indépendant de h.

On se propose ici d'étudier le comportement asymptotique de l'erreur $y_n - y(t_n)$ pour h voisin de zéro où $y(\,.\,)$ désigne la solution du problème (P) et $(y_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ celle du problème (P_h), les valeurs de démarrage y_μ étant construites de telle sorte que :

$$\forall\, \mu = 0, 1, \ldots, r-1, \qquad | y_\mu - y(t_\mu) | \leqslant C_8 h^r$$

où C_8 est un nombre réel positif indépendant de h.

On suppose désormais que $f \in C^{r+1}([0,T] \times E\,;\,E)$. On pose $g(t) = D_y f(t, y(t))$ et, pour $\varphi \in C^1([0\,;\,T]\,;\,E)$ et $e_0 \in E$ donnés, on considère la solution $e \in C^2([0,T]\,;\,E)$ du problème différentiel de condition initiale

$$\begin{cases} e'(t) = g(t)\,e(t) + \varphi(t) & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ e(0) = e_0\,. \end{cases}$$

On lui associe, pour $n = r-1, \ldots, N$, la matrice colonne

$$V_n = (e(t_n), e(t_{n-1}), \ldots, e(t_{n-r+1}))^T.$$

Par ailleurs on choisit dans les équations perturbées (Q_h) $z_n = y(t_n)$ et $\varepsilon_n = \varepsilon_n(y(\,.\,))$ pour $n = r, \ldots, N$, et on pose

$$S_n = (I - h_n b_n G_n)^{-1} R_n$$

où G_n est défini en **Q. 6.** a.

Q. 8. a. *Montrer qu'on peut trouver un nombre réel positif h^* tel que, si $0 < h \leqslant h^*$ et si $n = r, \ldots, N$, il existe un élément F_n de E^r ne dépendant que de $\varphi(t_n)$, vérifiant*

$$\| V_n - S_n V_{n-1} - h_n b_n F_n \|_1 \leqslant C_9\, h . h_n,$$

où C_9 est un nombre réel positif indépendant de h.

b. *En déduire que, pour h^* assez petit, on peut choisir la fonction φ de telle sorte que, si $0 < h \leqslant h^*$ et $W_n = U_n - h^r V_n$, on ait*

$$\| W_n - S_n W_{n-1} \|_1 \leqslant C_{10}\, h_n h^{r+1},$$

où C_{10} est un nombre réel positif indépendant de h.

(On montrera pour cela que $| \gamma_{n,r} - \gamma_r | \leqslant C_{11} h_n$, où C_{11} est un nombre réel positif indépendant de h.)

c. *Montrer que, sous l'hypothèse plus restrictive*

$$\| y_\mu - y(t_\mu) \| \leqslant C_{12} h^{r+1}, \qquad \textit{pour} \quad \mu = 0, 1, \ldots, r-1$$

où C_{12} est un nombre réel positif indépendant de h, il existe une fonction $\omega \in C^2([0,T]\,;\,E)$ telle que, si $0 < h \leqslant h^*$, on ait

$$\forall\, n = 0, \ldots, N, \qquad \| y_n - y(t_n) - h^r \omega(t_n) \| \leqslant C_{13}\, h^{r+1}$$

où C_{13} est un nombre réel indépendant de h.

Q. 9. On suppose maintenant que les valeurs de démarrage y_μ sont telles que

$$\| y_\mu - y(t_\mu) - h^r d_\mu \| \leqslant C_{14}\, h^{r+1}, \qquad \textit{pour} \quad \mu = 0, 1, \ldots, r-1,$$

où $d_\mu \in E$ et C_{14} est un nombre réel positif indépendant de h.

a. *Montrer qu'il existe un nombre réel positif* C_{15} *tel que, si* $0 < h \leqslant h^*$ *avec* h^* *assez petit, on ait*

$$\forall n = r, \ldots, N, \qquad \| S_n - R \|_1 \leqslant C_{15}\, h_n .$$

Soit (X_n), $r - 1 \leqslant n \leqslant N$, une suite d'éléments de E^r ; on notera

$$X_n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_r^n)^T, \qquad \alpha_n = \| x_1^n \|, \; \beta_n = \sum_{i=2}^{r} \| x_i^n \| .$$

b. *Montrer qu'il existe une matrice carrée d'ordre r inversible* H, *et des nombres réels positifs* C_{16} *et* τ *avec* $0 < \tau < 1$ *tels que les relations*

$$X_n = H^{-1} S_n H X_{n-1}$$

entraînent

$$\begin{cases} \alpha_n \leqslant (1 + C_{16}\, h_n)\,(\alpha_{n-1} + C_{16}\, h_n\, \beta_{n-1}) \\ \beta_n \leqslant (1 + C_{16}\, h_n)\,(C_{16}\, h_n\, \alpha_{n-1} + \tau\, \beta_{n-1}). \end{cases}$$

c. *En déduire que les suites* $(\alpha_n)_{r \leqslant n \leqslant N}$ *et* $(\beta_n)_{r \leqslant n \leqslant N}$ *satisfont à une majoration de la forme*

$$\begin{cases} \alpha_n \leqslant \exp\,(2\, C_{16}\, t_n)\, [\alpha_{r-1} + \Psi_n\, h\, \beta_{r-1}] \\ \beta_n \leqslant \exp\,(2\, C_{16}\, t_n)\, [\alpha_{r-1} + \Psi_n\, h\, \beta_{r-1} + \tau^{n-r+1}\, \beta_{r-1}] \end{cases}$$

où l'on précisera la suite $(\Psi_n)_{r \leqslant n \leqslant N}$, ($\Psi_n$ *indépendant de h*).

d. *Montrer qu'il existe une fonction* $\tilde{\omega} \in C^2([0, T]; E)$ *telle que, si* $0 < h \leqslant h^*$, *on ait pour tout* $t^* > 0$ *et pour tout n tel que* $t_n \geqslant t^*$,

$$\| y_n - y(t_n) - h^r\, \tilde{\omega}(t_n) \| \leqslant C_{17}\, h^{r+1}$$

où C_{17} *est un nombre réel positif indépendant de h.*

RAPPORT SUR L'ÉPREUVE D'ANALYSE NUMÉRIQUE

I. Analyse du sujet

Le sujet proposé portait sur la construction de méthodes de résolution numérique de systèmes différentiels avec conditions de Cauchy, plus précisément la méthode de différenciation rétrograde ou de GEAR avec pas d'intégration variable.

L'idée est d'approcher en chaque point d'un réseau sur l'intervalle de résolution $[0,T]$ la dérivée de la solution $y'(t_n)$ par la dérivée du polynôme d'interpolation de degré r construit sur les r+1 valeurs approchées de y aux points $t_n,\dots,t_{n-r}$ pour $n \geqslant r$. Des valeurs de départ $y_o,y_1,\dots,y_{r-1}$ sont données séparément.

Le problème était composé de quatre parties : des préliminaires matriciels nécessaires pour étudier la stabilité et le comportement asymptotique de l'erreur ; la partie I décrivant le procédé de construction de la méthode d'approximation ainsi qu'une étude de l'erreur de consistance c'est-à-dire de l'erreur locale commise lors de l'approximation du système différentiel ; la partie II était consacrée à l'obtention d'une majoration a priori de l'erreur entre la solution y du problème de Cauchy et la solution approchée y_h ; la partie III enfin proposait d'étudier le comportement asymptotique de l'erreur $y_n-y(t_n)$ lorsque $h_n = t_n-t_{n-1} = h\,\Theta(t_n)$ avec h voisin de zéro.

II. Observations générales

Ce problème fait appel à des techniques classiques d'Analyse numérique (normes vectorielles et matricielles, interpolation, équations différentielles) ainsi qu'à des résultats d'Algèbre linéaire de niveau DEUG A2. Nous pensions qu'il serait bien traité ou au moins bien abordé par un grand nombre de candidats ; il n'en a rien été hélas ce qui semble indiquer que les candidats n'attachent pas assez de temps à une préparation sérieuse des options et que, pour la plupart, ils ne savent pas utiliser leurs connaissances mathématiques pour la résolution d'un problème simple d'Analyse numérique.

Nous avons relevé des lacunes importantes notamment :

- en Algèbre linéaire : la réduite de Jordan d'une matrice semble mal connue ; de même les conditions spectrales ou de norme pour que la puissance $n^{\text{ème}}$ d'une matrice converge vers 0 quand n tend vers l'infini
- la formule de Taylor vectorielle avec reste intégral (lacune déjà signalée dans les deux rapports précédents) est ignorée
- les résultats élémentaires sur l'interpolation, en particulier sur la forme de Lagrange du polynôme d'interpolation, ne sont pas connus de beaucoup.

III. Indications sur la solution du problème

Q.1. : Cette question simple sur les normes matricielles a été bien résolue ; il convenait de faire attention que les composantes u_i de U appartenaient à un espace vectoriel E de dimension r.

Q.2. a : On démontre d'abord que la dimension de l'espace propre associé à chaque valeur propre λ de R est de dimension 1 ; puis que la réduite de Jordan $J = P\,R\,P^{-1}$ de R possède un bloc élémentaire d'ordre $\geqslant 2$; on en déduit que J^n n'est pas bornée quand $n \to \infty$ et par suite $R^n = P^{-1}\,J^n\,P$ non plus.

Q.2. b : La condition nécessaire se démontre en deux temps : si λ est une valeur propre de R on a $|\lambda| < 1$; et si λ est tel que $|\lambda| = 1$ et λ de multiplicité $\geqslant 2$ alors R^n n'est pas borné quand $n \to \infty$ d'après Q.2. a, ce qui est contradictoire avec $\|R^n\|_1 = \|H\,(H^{-1}\,R\,H)\,H^{-1}\|_1 \leqslant \|H\|_1 \,.\, \|H^{-1}\|_1$.

Réciproquement la construction de H résulte de la mise sous forme de Jordan de R : $R = P^{-1} J P$ avec $J = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, J_{p+1}, \ldots, J_n)$ avec $|\lambda_i| = 1$, $i = 1, \ldots, p$ et $|\lambda_i| < 1$ pour $i = p+1, \ldots, m$, où on peut choisir

$$J_{k,\varepsilon} = \begin{pmatrix} \lambda_k & \varepsilon & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $|\lambda_k| + \varepsilon < 1$,

$k = p+1, \ldots, m$. (On passe de $J_{k,1}$ à $J_{k,\varepsilon}$ avec $\varepsilon \neq 1$ par $J_{k,\varepsilon} = P_\varepsilon^{-1} J_{k,1} P_\varepsilon$
$P_\varepsilon = \text{diag}(1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^q)$.

Q.2. c : On remarque d'abord que $\lambda = 1$ est valeur propre de R associé à $\xi = (1, \ldots$ et en procédant comme en Q.2. b on construit H tel que $H^{-1} R H = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & R_1 \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$ avec

$\|R_1\|_1 < 1$. En posant $H^{-1} S H = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & S_1 \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$ et en utilisant la continuité de la norme matricielle en fonction des coefficients de la matrice on montre que pour ε assez petit $\|S_1\|_1 < 1$.

Le raisonnement de la réciproque de Q.2 b et de Q.2. c a beaucoup dérouté les candidats semble-t-il.

Partie I.

Q.3. L'existence de $g \in \mathcal{C}(E)$ pour t, y et z fixés résulte de la formule de Taylor avec reste intégral et de la condition de Lipschitz $\|D_y f(t,y)\| \leqslant L$. Attention, lorsque f est à valeurs dans E espace vectoriel de dimension $r > 1$, on ne pouvait pas appliquer la formule des accroissements finis.

Q.4. a et b : Il suffisait d'exprimer $\pi_{n,r}(t)$ comme combinaison linéaire des polynômes de Lagrange associés aux points $(t_{n-r}, y_{n-r}), \ldots (t_{n-1}, y_{n-1})$, (t_n, z) et de dériver $\pi_{n,r}$ en t_n. La suite n'était que du calcul un peu technique mais sans difficultés ; beaucoup de candidats n'ont pas su les maîtriser.

Q.4. c : $a_{n,i}$ et b_n sont des fractions rationnelles de $\frac{h_{n+1}}{h_n}$ d'où la majoration .

Q.4. d : Les relations demandées résultaient du fait que la méthode d'approximation était exacte (i.e sans erreur) en prenant $z = y_{n-i} \equiv 1$ et $y_{n-i} = t_{n-i}$, $z = t_n$ respectivement.

Q.4. e : L'existence et l'unicité de y_n résultaient du théorème du point fixe appliqué à $y \to \sum_{i=1}^{r} a_{ni}\, y_{n-i} + h_n\, b_n\, f(t,y)$.

Q.5. a : La majoration de $\|\varepsilon_n(z)\|$ s'obtenait en développant en série de Taylor avec reste intégral à l'ordre r+1, $z(t_{n-i})$ au voisinage de t_n, en sommant sur i et en remarquant que les termes en $z^{(k)}(t_n)$, $k = 1,\ldots,r$, s'annulaient du fait que la méthode est exacte lorsque $z(.)$ est un polynôme de degré $\leqslant r$, et en majorant le terme en $z^{(r+1)}$ à partir de Q.4. c.

Q.5. b : Démonstration analogue en poussant le développement de Taylor à l'ordre r+2 ; l'expression de $\gamma_{n,r}$ s'obtient en prenant $z(t) = (t-t_{n-r})\ldots(t-t_n)$.

Partie II.

On se proposait d'étudier la stabilité de la méthode et d'obtenir une majoration de l'erreur $y_n - y(t_n)$.

Q.6. a : La relation résulte immédiatement de Q.3 avec

$$R_n = \begin{pmatrix} a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,r} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\, 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad E_n = (-\varepsilon_n, 0, \ldots, 0)^t.$$

Q.6. b : La seule difficulté vient de la vérification de la condition (D) lorsque r = 4 pour laquelle il faut localiser les valeurs propres de R_4.

Q.6. c : Le résultat suit de Q.2. c en remarquant que R_n et R appartiennent à $\mathcal{S}$ et que les coefficients $a_{n,i}$ et b_n sont des fractions rationnelles de $\frac{h_{n+1}}{h_n}$ au voisinage de 1.

Q.6. d : On écrit que $H^{-1}(I - h_n b_n G_n)^{-1} H = (I - h_n b_n H^{-1} G_n H)^{-1}$ puis on majore facilement.

Q.6. e : On majore d'abord $\|H^{-1} U_n\|_1$ en fonction de $\|H^{-1} U_{n-1}\|_1$ et $\|H^{-1} E_n\|_1$ en écrivant

$$(I - h_n b_n G_n)^{-1} = I + h_n b_n G_n (I - h_n b_n G_n)^{-1}$$

et en utilisant Q.6. c et Q.6. d.

On en déduit alors la majoration de $\|U_n\|_1$.

Q.7. La majoration demandée résulte de Q.6. e en prenant $z_n = y(t_n)$ et $\varepsilon_n = \varepsilon_n(y(.))$ où y(.) est la solution du problème de Cauchy, puis en utilisant Q.5. b.

Partie III.

On se proposait d'étudier le comportement asymptotique de l'erreur lorsque le pas h est variable selon une loi $h_n = h\,\theta(t_n) + O(h_n^2)$.

Q.8. a : On calcule explicitement

$$(I - h_n b_n G_n) V_n - R_n V_{n-1}$$

dont seule la première composante est non nulle ; on écrit que $g(t_n, y_n, y(t_n)) = g(t_n) + O(h_n)$ et, en utilisant la définition de e(.) et Q.5. b, le résultat suit avec $F_n = \varphi(t_n)\ (1,0,\ldots,0)^1$.

Q.8. b : De la même manière on obtient la majoration cherchée par un calcul explicite de $W_n - S_n W_{n-1}$ en supposant $|\gamma_{n,r} - \gamma_n| \leqslant C.h_n$ et en prenant $\varphi(t) = \gamma_r\, \Theta(t)^r\, y^{(r+1)}(t)$. La majoration de $\gamma_{n,r} - \gamma_n$ résulte de ce que $\gamma_{n,r}$ est une fraction rationnelle de $\frac{h_{n+1}}{h_n}$ donc continue au voisinage de 1.

Q.8. c : On utilise l'inégalité de stabilité analogue à Q.6 pour $W_n = U_n - h^r V_n$ d'où le résultat avec $\omega(.) = e(.)$.

Q.9. a : On écrit $S_n - R = (S_n - R_n) + (R_n - R)$, on majore $\|S_n - R_n\|_1$ par $h_n L C_1(\delta) / (1 - h_n L C_1(\delta))$, et $\|R_n - R\|_1$ par $C h_n$ en utilisant la continuité des coefficients $a_{n,i}$ en fonction de h_{n+1}/h_n au voisinage de 1.

Q.9. b : On écrit :

$$X_n = H^{-1} R H X_{n-1} + H^{-1}(S_n - R) H X_{n-1}$$

où H est choisi comme en Q.2. b avec $\|R_1\| < 1$; on majore $\|S_n - R\|_1 \leqslant C.h_n$ d'après Q.9. a, d'où l'on déduit les inégalités cherchées pour $h \leqslant h^*$ assez petit.

Q.9. c : On majore $1 + C_{16} h_n$ par $e^{C_{16} h_n}$ et $(1 + C_{16} h_n) C_{16} h_n$ par $e^{2 C_{16} h_n}$ et on démontre par récurrence les inégalités sur α_n et β_n avec $\varphi_n = \varphi_{n-1} + C_{16} \tau^{n-r}$.

Q.9. d : On définit $e_1(.)$ solution du problème de Cauchy $e_1'(t) = g(t)\, e_1(t)$, $e_1(0) = 1$, puis $Q_n = (e_1(t_n), \ldots, e_1(t_{n-r}))^t$. On pose :
$W_n^* = U_n - h^r V_n - \sigma h^r Q_n$, $X_n = H^{-1} W_n^*$ où H est choisi comme en Q.9. b.

On détermine σ de façon que $\|X_{r-1}\| \leqslant C h^{r+1}$ i.e

$$\sigma = \sum_{\mu=0}^{r-1} H^{-1}_{1\mu} C_\mu \text{ d'où :}$$

$$\|X_n\|_1 \leqslant C (h^{r+1} + \tau h^r).$$

Donc pour $t_n \geqslant t^*$ tel que $n \geqslant \frac{t^*}{h}$ on a $\|X_n\|_1 \leqslant C h^{r+1}$ et

$$y_n - y(t_n) - h^r \tilde{\omega}(t_n) = O(h^{r+1}) \text{ avec } \tilde{\omega}(t) = e(t) + \sigma e_1(t).$$

IV. Répartition des notes

Tout candidat ayant traité correctement les préliminaires et construit la méthode d'approximation obtenait la moyenne. Très peu de candidats ont abordé la partie III qui était la partie la plus originale du problème .

Nombre de copies corrigées : 565

Moyenne des notes : 6,2.

0 à 2	3 à 7	8 à 12	13 à 16	17 à 19	20 à 23	24 à 30	31 à 40
258	119	91	41	21	15	13	7