écrit

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

DURÉE : 6 heures

INTRODUCTION

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2, K un corps commutatif et 1 l'unité de K; $M_n(K)$ est la K-algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K, que l'on note aussi M_n, de même que l'on sous-entend K dans les définitions suivantes :

i. GL_n, ensemble des éléments inversibles de M_n ;

ii. L_n, ensemble des éléments de GL_n dont chaque colonne contient un et un seul terme non nul;

iii. S_n (resp. Δ_n) formé des éléments de L_n dont tous les coefficients non nuls valent 1 (resp. sont situés sur la diagonale principale).

I_n désigne l'unité de M_n et, pour tout $A \in M_n$, on note ${}^tA$ (resp. $\mathrm{tr}(A)$) la transposée de A (resp. sa trace). Si E est un K-espace vectoriel de dimension finie, L(E) est la K-algèbre de ses endomorphismes et id_E l'unité de L(E); pour tout $f \in L(E)$, on note $\mu(f)$ [resp. $\chi(f)$] le polynôme minimal de f (resp. son polynôme caractéristique). Par ailleurs, si σ est un élément du groupe Σ_n des permutations de $\{1, \dots, n\}$, $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de σ et A_σ la matrice carrée d'ordre n dont, pour $i, j = 1, \dots, n$, l'élément (i, j) vaut 1 si $i = \sigma(j)$ et 0 sinon.

On rappelle enfin que tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel est canoniquement muni d'une structure d'espace affine réel et, si il est de dimension finie, d'une topologie naturelle, celle définie par l'une quelconque de ses normes.

Les cinq parties sont dépendantes, mais on peut traiter chacune en admettant les résultats de celles qui précèdent.

1° *a.* Vérifier que l'application $\sigma \dashrightarrow A_\sigma$ est un homomorphisme de Σ_n dans GL_n et une bijection de Σ_n sur S_n.

b. Établir que tout élément A de L_n s'écrit, de manière unique, sous la forme $A = DA_\sigma$, $\sigma \in \Sigma_n$ et $D \in \Delta_n$, puis que L_n est un sous-groupe de GL_n. Δ_n (resp. S_n) est-il un sous-groupe distingué de L_n ?

c. Déduire de ce qui précède, à l'aide d'une méthode de dénombrement que l'on détaillera, que pour tout nombre premier $q \geqslant 2$ et tout entier naturel m, $m!(q-1)^m$ divise $(q^m - 1)(q^m - q) \ldots (q^m - q^{m-1})$.

2° On suppose, dans cette question seulement, que K est algébriquement clos et on désigne par p la caractéristique de K. Soient E un K-espace vectoriel de dimension n et $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E; pour tout $\sigma \in \Sigma_n$, on note f_σ l'endomorphisme de E dont la matrice dans B est A_σ.

a. Combien vaut le déterminant de f_σ ?

b. Dans le cas particulier où σ est un cycle d'ordre n, établir que $\mu(f_\sigma)(T) = T^n - 1$; combien vaut alors $\chi(f_\sigma)(T)$? Trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur n et p, pour que f_σ soit diagonalisable; lorsque cette condition est vérifiée, expliciter $P \in GL_n$ et $D \in \Delta_n$ tels que $A_\sigma = PDP^{-1}$.

c. σ est maintenant un élément quelconque de Σ_n, déterminer $\mu(f_\sigma)$ et $\chi(f_\sigma)$ en fonction de σ.

3° On conserve les notations de 2°, mais K désigne un corps quelconque de caractéristique nulle; Λ est la droite vectorielle de E engendrée par $e_1 + \ldots + e_n$ et H l'hyperplan d'équation $x_1 + \ldots + x_n = 0$. Un sous-espace E' de E est dit Σ-stable lorsque $f_\sigma(E') \subset E'$ pour tout $\sigma \in \Sigma_n$.

a. Vérifier que Λ et H sont tous deux Σ-stables et supplémentaires dans E, montrer que le projecteur sur Λ parallèlement à H est :

$$p_\Lambda = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} f_\sigma .$$

b. Soit v un élément non nul de H, démontrer que $\{f_\sigma(v) \mid \sigma \in \Sigma_n\}$ est une partie génératrice de H (on pourra utiliser le fait que deux au moins des coordonnées de v sont distinctes).

c. Déterminer tous les sous-espaces Σ-stables de E.

4° Soit $\Gamma = \{f \in L(E) \mid \forall \sigma \in \Sigma_n \quad f \circ f_\sigma = f_\sigma \circ f\}$, démontrer que Γ est la K-sous-algèbre de L(E) engendrée par p_Λ, c'est-à-dire la plus petite sous-algèbre de L(E) contenant id_E et p_Λ.

DEUXIÈME PARTIE

Les notations sont celles de la première partie, mais K est ici le corps des nombres réels. On note $\widetilde{\Omega}_n$ l'ensemble de toutes les matrices $A = (a_{i,j})$ appartenant à M_n, telles que les $2n$ sommes

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}, \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

soient toutes égales entre elles, et on désigne alors par $s(A)$ leur valeur commune.

On dit que A est équilibrée (d'ordre n) lorsque A appartient à $\widetilde{\Omega}_n$, a tous ses coefficients $\geqslant 0$ et vérifie $s(A) = 1$, et on note Ω_n l'ensemble des matrices équilibrées d'ordre n.

ERRATA

page 8 lire

PREMIÈRE PARTIE

1° *a*. Vérifier que l'application $\sigma \longmapsto A_\sigma$ est un homomorphisme de Σ_n dans GL_n et une bijection de Σ_n sur S_n.

b. Établir que tout élément A de L_n s'écrit, de manière unique, sous la forme $A = DA_\sigma$, $\sigma \in \Sigma_n$ et $D \in \Delta_n$, puis que L_n est un sous-groupe de GL_n. Δ_n (resp. S_n) est-il un sous-groupe distingué de L_n ?

c. Déduire de ce qui précède, à l'aide d'une méthode de dénombrement que l'on détaillera, que pour tout nombre premier $q \geqslant 2$ et tout entier naturel m, $m!(q-1)^m$ divise $(q^m - 1)(q^m - q)\dots(q^m - q^{m-1})$.

2° On suppose, dans cette question seulement, que K est algébriquement clos et on désigne par p la caractéristique de K. Soient E un K-espace vectoriel de dimension n et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E; pour tout $\sigma \in \Sigma_n$, on note f_σ l'endomorphisme de E dont la matrice dans B est A_σ.

a. Combien vaut le déterminant de f_σ ?

b. Dans le cas particulier où σ est un cycle d'ordre n, établir que $\mu(f_\sigma)(T) = T^n - 1$; combien vaut alors $\chi(f_\sigma)(T)$? Trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur n et p, pour que f_σ soit diagonalisable; lorsque cette condition est vérifiée, expliciter $P \in GL_n$ et $D \in \Delta_n$ tels que $A_\sigma = PDP^{-1}$.

c. σ est maintenant un élément quelconque de Σ_n, déterminer $\mu(f_\sigma)$ et $\chi(f_\sigma)$ en fonction de σ.

3° On conserve les notations de 2°, mais K désigne un corps quelconque de caractéristique nulle; Λ est la droite vectorielle de E engendrée par $e_1 + \dots + e_n$ et H l'hyperplan d'équation $x_1 + \dots + x_n = 0$. Un sous-espace E' de E est dit Σ-stable lorsque $f_\sigma(E') \subset E'$ pour tout $\sigma \in \Sigma_n$.

a. Vérifier que Λ et H sont tous deux Σ-stables et supplémentaires dans E, montrer que le projecteur sur Λ parallèlement à H est :

$$p_\Lambda = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} f_\sigma .$$

b. Soit v un élément non nul de H, démontrer que $\{f_\sigma(v) \ / \ \sigma \in \Sigma_n\}$ est une partie génératrice de H (on pourra utiliser le fait que deux au moins des coordonnées de v sont distinctes).

c. Déterminer tous les sous-espaces Σ-stables de E.

4° Soit $\Gamma = \{f \in L(E) \ / \ \forall \sigma \in \Sigma_n \quad f \circ f_\sigma = f_\sigma \circ f\}$, démontrer que Γ est la K-sous-algèbre de L(E) engendrée par p_Λ, c'est-à-dire la plus petite sous-algèbre de L(E) contenant id_E et p_Λ.

DEUXIÈME PARTIE

Les notations sont celles de la première partie, mais K est ici le corps des nombres réels. On note $\widetilde{\Omega}_n$ l'ensemble de toutes les matrices $A = (a_{i,j})$ appartenant à M_n, telles que les $2n$ sommes

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}, \qquad i, j = 1, \dots, n$$

soient toutes égales entre elles, et on désigne alors par $s(A)$ leur valeur commune.

On dit que A est équilibrée (d'ordre n) lorsque A appartient à $\widetilde{\Omega}_n$, a tous ses coefficients $\geqslant 0$ et vérifie $s(A) = 1$, et on note Ω_n l'ensemble des matrices équilibrées d'ordre n.

.../...

page 20 (début de page) lire

On rappelle que si s est un nombre réel, $s \geqslant 1$, on note L^s l'espace des classes τ de fonctions complexes mesurables définies sur [0 , 1] et telles que pour toute fonction f de la classe τ, on ait :

$$\int |f|^s \, d\mu < \infty.$$

Comme c'est l'usage, on se permettra dans toute la suite de noter par une même lettre une classe de fonctions et un représentant quelconque de cette classe; c'est ainsi qu'on définit simplement la norme d'un élément f de L^s par :

$$\|f\|_s = \left(\int |f|^s \, d\mu \right)^{\frac{1}{s}}.$$

1° *a.* Soient $f \in L(E)$ et A la matrice de f dans B, vérifier que $A \in \widetilde{\Omega}_n$ si, et seulement si, chacun des deux sous-espaces Λ et H est stable par f; en déduire que $\widetilde{\Omega}_n$ est une $\mathbb{R}$-sous-algèbre de M_n et déterminer sa dimension. L'application $A \longmapsto s(A)$ est-elle un morphisme d'algèbres?

b. Montrer que Ω_n est convexe, compact et stable par multiplication; trouver toutes les matrices d'ordre n qui sont à la fois équilibrées et orthogonales.

2° Expliciter tous les idéaux bilatères de $\widetilde{\Omega}_n$ et déterminer son centre.

3° Démontrer que $\widetilde{\Omega}_n$ est le sous-espace vectoriel de M_n engendré par S_n (on pourra raisonner par récurrence et utiliser la première partie).

TROISIÈME PARTIE

On se propose de montrer que Ω_n est l'enveloppe convexe de S_n. Pour tout $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $\overline{X} = (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)$ l'unique élément de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les propriétés suivantes :

i. $\overline{x}_1 \geqslant \dots \geqslant \overline{x}_n$;

ii. il existe un $\tau \in \Sigma_n$ tel que $\overline{X} = XA_\tau$.

De plus, si $Y = (y_1, \dots, y_n)$ est un autre élément de $\mathbb{R}^n$, la notation $Y \lhd X$ signifie que :

$$\overline{y}_1 + \dots + \overline{y}_k \leqslant \overline{x}_1 + \dots + \overline{x}_k \quad \text{pour } k = 1, \dots, n$$

et on note $Y < X$ lorsqu'on a simultanément :

i. $Y \lhd X$;

ii. $\overline{y}_1 + \dots + \overline{y}_n = \overline{x}_1 + \dots + \overline{x}_n$.

Enfin, $[X]$ désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble des XA_σ, $\sigma \in \Sigma_n$.

1° *a.* La relation $Y < X$ définit-elle un ordre sur $\mathbb{R}^n$?

b. Soient $X_1, \dots, X_r, Y$ des éléments de $\mathbb{R}^n$, montrer que Y appartient à l'enveloppe convexe de $\{X_1, \dots, X_r\}$ si, et seulement si, pour toute forme linéaire Φ sur $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\Phi(Y) \leqslant \max(\Phi(X_1), \dots, \Phi(X_r)).$$

c. En déduire que $[X]$ est exactement formé de tous les $Y \in \mathbb{R}^n$ qui vérifient $Y < X$.

2° Soit $A = (a_{i,j})$ un élément de Ω_n, distinct de I_n ; démontrer qu'il existe un $\sigma \in \Sigma_n$, $\sigma \neq \text{id}$, tel que :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} \ (\sigma(k) \neq k \Rightarrow a_{\sigma(k),k} \neq 0)$$

(on pourra raisonner par l'absurde et utiliser le polynôme caractéristique de A).

3° Soit M un élément de M_n.

a. On suppose que, pour tout $\sigma \in \Sigma_n$, $\sigma \neq \text{id}$, on a $\text{tr}(MA_\sigma) < \text{tr}(M)$; établir qu'alors

(1) $\qquad \forall A \in \Omega_n \quad \text{tr}(MA) \leqslant \text{tr}(M).$

b. Prouver que (1) demeure si l'on suppose seulement que $\text{tr}(MA_\sigma) \leqslant \text{tr}(M)$ pour tout $\sigma \in \Sigma_n$.

c. Démontrer que Ω_n est l'enveloppe convexe de S_n et, plus précisément, que tout élément A de Ω_n peut s'écrire sous la forme

$$A = \sum_{\sigma \in I} \lambda_\sigma A_\sigma ,$$

les λ_σ étant tous > 0, de somme 1 et I étant une partie de Σ_n de cardinal $\leqslant n^2 - 2n + 2$.

4° *a.* Soient $X = (x_1, \ldots, x_n)$ et $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$, montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i. $Y < X$,

ii. il existe un $A \in \Omega_n$ tel que $Y = XA$,

iii. pour toute fonction u, convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u(y_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} u(x_i)$.

b. Soit $M \in M_n$, démontrer que M est équilibrée si, et seulement si, $XM < X$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$.

QUATRIÈME PARTIE

Si $A = (a_{i,j})$ est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans le corps K, on appelle *permanent* de A la quantité

$$\operatorname{per}(A) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} .$$

1° *a.* Expliquer pourquoi per(A) est une fonction n-linéaire symétrique des colonnes de A, énoncer et démontrer une formule permettant le développement d'un permanent par rapport à une colonne. Combien vaut per(A) si A est triangulaire, si A est de la forme $\begin{pmatrix} A' & B \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$, avec $A' \in M_p$, $A'' \in M_q$, $p + q = n$?

b. Dans le cas particulier où A est semi-triangulaire, c'est-à-dire telle que $a_{i,j} = 0$ dès que $j > i + 1$, on note B la matrice d'ordre n dont l'élément (i, j) vaut $a_{i,j}$ si $i \geqslant j$ et $-a_{i,j}$ sinon. Montrer que $\det(A) = \operatorname{per}(B)$.

c. Démontrer par contre que, si $n \geqslant 3$, il n'est pas possible de trouver une suite $(\varepsilon_{i,j})$ d'éléments de $\{-1, 1\}$ telle que pour tout $A = (a_{i,j}) \in M_n$, en notant A_ε la matrice $(a_{i,j}\, \varepsilon_{i,j})$, on ait

$$\det(A) = \operatorname{per}(A_\varepsilon) .$$

2° *a.* Soit $A \in \Omega_n$, établir que

$$0 < \operatorname{per}(A) \leqslant 1$$

et que $\operatorname{per}(A) = 1$ si, et seulement si, A appartient à S_n.

b. En déduire le résultat suivant : si G est un groupe fini et H un sous-groupe de G d'indice r (c'est-à-dire tel que $\operatorname{card}(G) = r \operatorname{card}(H)$), alors il existe des éléments $x_1, \ldots, x_r$ de G qui représentent à la fois toutes les classes à gauche et toutes les classes à droite modulo H.

3° *a.* Soit M une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels $\geqslant 0$; démontrer que $\operatorname{per}(M) = 0$ si, et seulement si, on peut extraire de M une matrice nulle à s lignes et t colonnes, avec $s + t = n + 1$.

b. Déduire de ceci le « lemme des mariages » : si F et G sont deux ensembles finis et γ une application de G dans l'ensemble des parties de F, les conditions suivantes sont équivalentes :

i. il existe une injection Γ de G dans F telle que $\Gamma(x) \in \gamma(x)$ pour tout $x \in G$;

ii. pour toute partie $G' \subset G$, $\quad \operatorname{card}\left(\bigcup_{x \in G'} \gamma(x)\right) \geqslant \operatorname{card}(G')$

(on pourra se ramener au cas où card (F) = card (G)).

CINQUIÈME PARTIE

E désigne maintenant un espace hermitien de dimension n, dont on note $(\ |\ )$ le produit scalaire; pour tout $m = 1, \ldots, n$, F_m désigne le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes m-linéaires sur E, et T_m le dual de F_m.

Si $v_1, \ldots, v_m$ appartiennent à E, on note $t(v_1, \ldots, v_m)$ l'élément de T_m défini par :

$$t(v_1, \ldots, v_m)(\Phi) = \Phi(v_1, \ldots, v_m) \text{ pour tout } \Phi \in F_m.$$

1° *a.* Montrer que $t : E_m \to T_m$ est m-linéaire et qu'il existe sur T_m une structure d'espace hermitien dont le produit scalaire, encore noté $(\ |\ )$, vérifie pour tous $v_1, \ldots, v_m$ et $w_1, \ldots, w_m$ appartenant à E :

(r) $\qquad (t(v_1, \ldots, v_m) \mid t(w_1, \ldots, w_m)) = (v_1 \mid w_1) \ldots (v_m \mid w_m)$

(on pourra d'abord établir que, si $B = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors les $t(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})$, pour $(i_1, \ldots, i_m) \in \{1, \ldots, n\}^m$, forment une base de T_m). Peut-il exister sur T_m plusieurs produits scalaires vérifiant (r)?

b. Si $\sigma \in \Sigma_m$ et $\Phi \in F_m$, on définit Φ^σ par

$$\Phi^\sigma(v_1, \ldots, v_m) = \Phi(v_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, v_{\sigma^{-1}(m)});$$

l'application $\Phi \longmapsto \Phi^\sigma$ est un endomorphisme de F_m dont on note $P(\sigma)$ le transposé. Montrer que $P(\sigma)$ est un endomorphisme unitaire de T_m et que son adjoint est $P(\sigma^{-1})$.

c. On définit :

$$A_m = \{\xi \in T_m \,/\, \forall \sigma \in \Sigma_m \quad P(\sigma)(\xi) = \varepsilon(\sigma)\,\xi\},$$
$$S_m = \{\xi \in T_m \,/\, \forall \sigma \in \Sigma_m \quad P(\sigma)(\xi) = \xi\}.$$

Établir que $\pi_a = \dfrac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \Sigma_m} \varepsilon(\sigma)\, P(\sigma)$ est le projecteur orthogonal sur A_m et expliciter celui sur S_m, qu'on notera π_s. En déduire la dimension de A_m.

2° *a.* Soient $f \in L(E)$ et $m \in \{1, \ldots, n\}$, montrer qu'il existe un unique $f_m \in L(T_m)$ tel que, pour tous $v_1, \ldots, v_m$ appartenant à E, on ait

$$f_m(t(v_1, \ldots, v_m)) = t(f(v_1), \ldots, f(v_m)).$$

Si g est un autre élément de L(E), $(g \circ f)_m$ vaut-il $g_m \circ f_m$ ou $f_m \circ g_m$? Soit f^* l'adjoint de f, a-t-on $(f^*)_m = (f_m)^*$? Vérifier que A_m et S_m sont stables par f_m.

b. Démontrer que, si $v_1, \ldots, v_m$ sont des vecteurs propres linéairement indépendants associés aux valeurs propres de f (non nécessairement distinctes) $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, alors $\pi_a(t(v_1, \ldots, v_m))$ est un vecteur propre non nul pour la restriction, notée $f_{m,a}$ de f_m à A_m. A quelle valeur propre de $f_{m,a}$ est-il associé ?

c. Déduire de ce qui précède l'expression de $\chi(f_{m,a})(T)$ en fonction des valeurs propres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de f (on pourra commencer par le cas où les λ_i sont deux à deux distinctes).

3° Soient f un automorphisme de E et f^* son adjoint.

a. Montrer que toutes les valeurs propres de $f^* \circ f$ sont des réels > 0 ; on note $k_1, \dots, k_n$ leurs racines carrées positives et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de f.

b. Démontrer qu'avec les notations de la troisième partie :

$$(\mathrm{Log}\,|\lambda_1|, \dots, \mathrm{Log}\,|\lambda_n|) < (\mathrm{Log}\, k_1, \dots, \mathrm{Log}\, k_n).$$

c. Établir l'inégalité de Weyl :

$$(|\lambda_1|^s, \dots, |\lambda_n|^s) \lhd (k_1^s, \dots, k_n^s) \text{ pour tout réel } s > 0,$$

(on pourra utiliser une fonction auxiliaire convexe sur $\mathbb{R}^n$).

4° f est toujours un automorphisme de E, mais on suppose de plus que $(f(v) \mid v)$ est un réel > 0 pour tout $v \neq 0$.

a. Que peut-on dire de f et de ses valeurs propres ? Établir que, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale quelconque de E, alors

$$(\mathrm{Log}\,\lambda_1, \dots, \mathrm{Log}\,\lambda_n) \lhd (\mathrm{Log}\,(f(e_1) \mid e_1), \dots, \mathrm{Log}\,(f(e_n) \mid e_n))$$

(on pourra observer que, si $(u_1, \dots, u_n)$ est une base orthonormale de vecteurs propres pour f, la matrice d'élément (i, j) $|(u_i \mid e_j)|^2$ est équilibrée).

b. En déduire l'inégalité suivante : si A et B sont deux matrices hermitiennes définies positives d'ordre n, alors :

$$(\det(\mathrm{A} + \mathrm{B}))^{1/n} \geqslant (\det(\mathrm{A}))^{1/n} + (\det(\mathrm{B}))^{1/n}.$$

5° *a.* Soient $v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_m$ appartenant à E, on note $\mathrm{S}(v, w)$ la matrice carrée d'ordre m dont l'élément (i, j) est $(v_i \mid w_j)$. Montrer que

$$(\pi_s(t(v_1, \dots, v_m)) \mid \pi_s(t(w_1, \dots, w_m))) = \frac{1}{m!} \operatorname{per}(\mathrm{S}(v, w)).$$

b. En déduire que, si M et N sont des matrices carrées quelconques d'ordre n à coefficients complexes, on a :

$$|\operatorname{per}(\mathrm{MN})|^2 \leqslant \operatorname{per}(\mathrm{MM}^*) \operatorname{per}(\mathrm{N}^*\mathrm{N})$$

et que, si A est hermitienne définie positive, alors $\operatorname{per}(\mathrm{A}) \geqslant \det(\mathrm{A})$.

c. Soit $\mathrm{A} \in \Omega_n$, on suppose de plus que A est hermitienne définie positive, démontrer l'inégalité de Van der Wærden :

$$\operatorname{per}(\mathrm{A}) \geqslant \frac{n!}{n^n}.$$

RAPPORT SUR L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

I. Thème du sujet

L'objet du problème était de démontrer, dans un cas particulier, une célèbre inégalité sur les permanents, proposée en 1926 par Van der Wærden et dont la forme générale demeure aujourd'hui encore une conjecture.

Apparue pour la première fois dans un mémoire de Cauchy, la notion de permanent pose des problèmes de calcul et de minoration bien plus délicats que le déterminant ; faute de méthodes véritablement efficaces, on n'en connaissait encore récemment que peu de propriétés significatives et son étude s'était très ralentie. L'apparition de nouvelles méthodes (dont la partie V donne un exemple), la découverte d'applications nombreuses et parfois inattendues, comme la théorie des jeux, les probabilités, diverses questions de physique statistique ou de théorie des champs, ont fait du permanent l'objet de recherches actives et de fréquentes publications.

II. Observations

Les parties I et II concernaient essentiellement la représentation naturelle du groupe des permutations ; s'agissant d'un début de problème, les erreurs les plus fréquentes viennent de l'inattention (matrice diagonale commutant avec toute autre matrice, diagonalisation et valeurs propres, dimension d'un espace vectoriel produit), de raisonnements mal organisés (démontrer que p_Λ est un projecteur, trouver les sous-espaces stables ou les opérateurs d'entrelacement au II 4°, montrer la compacité de Ω_n) ou d'un attrait trop exclusif pour les qualificatifs "évident", "trivial", "clair".

De ces premières questions, traditionnellement plus faciles, les candidats doivent s'attacher à donner des solutions brèves et complètes, sans étourderies ni incohérences, pour gagner un maximum de points tout en conservant par la suite des ressources et du temps. Il faut aller assez vite pour pouvoir aborder après des questions substantielles, mais demeurer convaincant : une question simple ne "paie" qu'à ce prix, et faire sentir en quelques mots pourquoi une propriété est évidente vaut bien mieux que de la proclamer telle ou, à l'inverse, de la noyer sous un flot d'égalités et de raisonnements superflus.

Signalons par ailleurs, au chapitre des satisfactions, une meilleure compréhension des groupes linéaires sur les corps finis et des raisonnements plus convaincants sur les projecteurs qu'au concours 1978.

La partie III faisait démontrer, par une élégante méthode düe à Mirsky, un résultat classique de Birkhoff : les sommets du polyèdre Ω_n sont des matrices de permutation. Point n'était besoin du théorème de Hahn-Banach au 1° b) et, si l'on y tenait, encore fallait-il en justifier soigneusement l'usage, de même qu'au 3° c) la limitation du nombre de coefficients non nuls. Les autres questions faisaient surtout appel à l'ingéniosité des candidats, à leur perspicacité, et demandaient qu'ils puissent utiliser avec efficacité leurs connaissances élémentaires (formes linéaires, polynômes caractéristiques). Si la lecture de plusieurs copies est un plaisir à cet égard, de nombreuses autres laissent l'impression d'une bonne volonté mal concrétisée et d'un entraînement insuffisant ou irréaliste à ce type d'épreuve. La limitation de durée, et les conditions psychologiques qui en découlent, sont un aspect important de l'écrit, aussi ne peut-on vraiment s'y préparer qu'en "temps réel" et non par la simple rédaction de problèmes, en quelque nombre que ce soit. Savoir assimiler rapidement un texte et des notations, organiser son temps, rédiger vite et clairement, sont des qualités essentielles au Concours, et bien des candidats pourront y améliorer considérablement leur score si ils consacrent davantage de temps à les acquérir ou les perfectionner et si, tout au long de leur année de préparation, ils tachent de se faire, puis de conserver, des épreuves une vision aussi exacte et complète que possible.

La notion de permanent apparaissait au IV où quelques questions élémentaires familiarisaient avec son usage, avant que 2° et 3° n'en fassent étudier l'application à deux problèmes de combinatoire. De même qu'au I, il était bon de traiter 1° de façon rapide et convaincante puis, comme au III, de mobiliser son intelligence pour "identifier" le permanent sous les problèmes apparemment fort éloignés qu'il s'agissait de résoudre. En ce domaine, la palme du non-conformisme revient sans conteste à cette copie où le lemme des mariages, établi en premier par la - fastidieuse - méthode de récurrence, vise ensuite (et sans succès) à démontrer le résultat préliminaire d'où il était justement question de le déduire !

En application des résultats de III et IV, et à l'aide d'une structure hermitienne sur les espaces de tenseurs symétriques ou alternés, la partie V faisait démontrer plusieurs inégalités non triviales. Signalons que la relation du 5° a), où le permanent apparaît comme un produit scalaire dans l'espace S_m, est à l'origine de plusieurs résultats importants, et notamment de la "version hermitienne" de la conjecture de Van der Waerden, qui représente le progrès le plus significatif accompli dans cette direction. Comme dans tout problème d'algèbre multilinéaire, les propriétés étudiées en 1° et 2° a) demandaient qu'on réduisît les vérifications à une base, faute de quoi elles devenaient inextricables. Réduction aussi, mais d'une toute autre nature, à une partie dense de L(E), pour la question 2° c), afin d'éviter les problèmes de multiplicité de valeurs propres. Les candidats sont évidemment fort peu nombreux à aborder cette partie, et les réponses satisfaisantes relativement rares ; sans doute un entraînement plus efficace aurait-il aidé les meilleurs à conserver plus intactes leurs forces et à tirer davantage parti de leurs capacités.

C'est au total une impression assez favorable qui se dégage de la lecture des copies. L'intérêt du Concours et l'opportunité d'une préparation sérieuse sont visiblement ressentis par une large majorité de candidats, ainsi que l'absurdité qu'il y a à remettre copie blanche ou à participer en simple figurant ; les connaissances de base semblent mieux assimilées et les erreurs grossières moins fréquentes que les années précédentes.

Au chapitre des progrès possibles, deux points nous paraissent primordiaux. En premier lieu, l'importance d'une préparation réelle à l'écrit doit être plus clairement perçue : il ne s'agit pas seulement d'apprendre des mathématiques, mais de savoir comprendre, résoudre et rédiger un problème de manière convaincante en un minimum de temps ; il ne s'agit pas de posséder le corrigé de nombreuses épreuves de l'Agrégation, mais d'avoir plusieurs fois dans l'année, individuellement et en temps limité, simulé leur déroulement ; il ne s'agit pas d'être érudit mais efficace et des connaissances, aussi étendues soient-elles, ne servent de rien si l'on est hors d'état de les appliquer promptement le jour du concours.

Insistons, en second lieu, sur les bienfaits des exercices de mise en œuvre et d'approfondissement. Par la familiarité qu'ils procurent avec les théories du programme, par les liens qu'ils révèlent entre ses divers chapitres, par les méthodes auxquelles ils habituent et l'ingéniosité qu'ils stimulent, ils rendent les connaissances à la fois plus sûres et plus maniables, donc plus probablement efficaces au moment des épreuves.

Souhaitons, pour conclure, aux futurs candidats, qu'ils concrétisent le mieux possible leur volonté de réussir et, en tirant davantage parti de leurs connaissances et de leurs dons, qu'ils puissent mettre de leur côté un maximum de chances de succès.

III. Répartition des notes

Notes	Nombre de candidats
0	113
1 – 4	394
5 – 8	270
9 – 12	177
13 – 16	141
17 – 20	117
21 – 24	95
25 – 28	71
29 – 32	40
33 – 36	31
37 – 40	15
41 – 48	15
49 – 60	7