ministère de l'éducation

direction des personnels enseignants
de lycées

Agrégation mathématiques

Rapport de Monsieur RICHE
Inspecteur général de l'Instruction publique,
Président du jury

1979

présentation

1. COMPOSITION DU JURY

M.	RICHE	*Inspecteur général de l'instruction publique, président.*
M.	RAMIS	*Inspecteur général de l'instruction publique, vice-président.*
Mme	AMICE	*Professeur à l'université de Paris VII.*
M.	ANDRE	*Maître assistant à l'université de Nancy I.*
M.	AUQUE	*Maître assistant à l'université de Clermont-Ferrand.*
M.	BADRIKIAN	*Professeur à l'université de Clermont-Ferrand.*
M.	BAYART	*Professeur au lycée Thiers à Marseille.*
M.	BECKER	*Professeur au lycée Montaigne à Bordeaux.*
M.	BLOCH	*Professeur au lycée Louis-le-Grand à Paris.*
M.	BROUE	*Chargé de recherches au centre national de la recherche scientifique à l'université de Paris VII.*
M.	CARMONA	*Professeur à l'université d'Aix-Marseille II.*
M.	CHAMBADAL	*Professeur au lycée Saint-Louis à Paris.*
M.	CHEVALLET	*Professeur au lycée Louis-le-Grand à Paris.*
M.	CUILLERIER	*Professeur au lycée Montaigne à Bordeaux.*
Mme	DELEAU	*Professeur au lycée Descartes à Tours.*
M.	DURREMEYER	*Maître assistant à l'université de Rennes I.*
M.	FOURT	*Maître assistant à l'université de Clermont-Ferrand.*
M.	GENET	*Professeur à l'université des Pays de l'Adour.*
M.	GIORGIUTTI	*Professeur à l'université de Rennes I.*
M.	GOSTIAUX	*Professeur au lycée Saint-Louis à Paris.*
M.	HALBERSTADT	*Maître assistant à l'université de Paris VI.*
M.	HEE	*Assistant à l'université de Paris XI.*
M.	HEINICH	*Maître assistant à l'université de Paris VI.*
M.	HELLEGOUARCH	*Maître de conférences à l'université de Caen.*
M.	HELMER	*Professeur au lycée Clemenceau à Reims.*
M.	KAROUBI	*Professeur à l'université de Paris VII.*
Mme	LEBAUD	*Maître de conférences à l'institut national des sciences appliquées de Rennes.*
M.	LEBAUD	*Maître assistant à l'université de Rennes I.*
M.	LOMBARD	*Maître assistant à l'université de Nancy I.*
M.	MIGNOT	*Professeur à l'université de Rennes I.*
M.	PAVAGEAU	*Professeur au lycée Pothier à Orléans.*
M.	PRADINES	*Maître de conférences à l'université P. Sabatier à Toulouse.*
M.	REINHARD	*Maître de conférences à l'école polytechnique de Paris.*
M.	RISLER	*Maître assistant à l'université de Paris VII.*

M.	ROSEAU	*Professeur à l'université de Paris VI.*
M.	SCHREIBER	*Maître de conférences à l'université d'Orléans.*
M.	SPECTOR	*Professeur à l'université d'Orléans.*
M.	STERN	*Maître assistant à l'université de Paris VII.*
M.	SURATTEAU	*Professeur au lycée Pothier à Orléans.*
M.	THEBAUT	*Professeur au lycée Châteaubriant à Rennes.*
M.	THIBAULT	*Professeur à l'université P. Sabatier à Toulouse.*
M.	VELU	*Chargé de recherches au centre national de la recherche scientifique.*
M.	VIALLARD	*Maître assistant à l'université de Rennes I.*
M.	WIRTH	*Professeur au lycée Saint-Louis à Paris.*

2.- CALENDRIER DES EPREUVES

2.1 Epreuves écrites

- Elles ont eu lieu aux dates suivantes :
  Mathématiques générales : 8 mai de 8 à 14 heures.
  Analyse : 9 mai de 8 à 14 heures.
  Mathématiques appliquées : 11 mai de 8 à 14 heures.

- La liste d'admissibilité a été affichée le 20 juin au lycée Montaigne et 34 rue de Châteaudun.

2.2 Epreuves orales

Elles se sont déroulées du 28 juin au 23 juillet au lycée Montaigne à Paris.
Les résultats définitifs ont été publiés le 24 juillet.

3.-STATISTIQUES DIVERSES

3.1 Résultats généraux

Postes mis au concours	128
Candidats inscrits	2 264
Candidats présents à la première épreuve	1 833
Candidats présents à la dernière épreuve	1 628
Admissibles (* étrangers)	250+1*
Admis	128
Equivalence des épreuves théoriques du C.A.P.E.S.	2

Moyenne sur 20 des points obtenus par :

le premier admissible	19,5
le dernier admissible	8
le premier agrégé	18,8
le dernier agrégé	10,3

3.2 Répartition des notes d'écrit

Le tableau ci-dessous indique le nombre N(m) des candidats qui ont obtenu aux épreuves écrites une moyenne, sur 20, m supérieure (au sens large) à m.

m	18,5	15	12,5	10	8,5	8	7,5	6,5
N(m)	3	14	47	132	207	251	296	388

m	6	5,5	4	2
N(m)	445	514	674	1 011

3.3 Répartition entre les options

	Analyse numérique	Mécanique	Probabilités
Ont composé	730	199	699
Admissibles	120	23	108
Admis	60	12	56

3.4 Situation universitaire des candidats

Dans le tableau suivant, les notations U,J,C,F,T, correspondent aux candidats des E.N.S. : Ulm, Jourdan, Saint-Cloud, Fontenay et E.N.S.E.T. Les autres abréviations sont les suivantes :

E . . . . Etudiants.
I.P.E.S . . . . Elèves des I.P.E.S. et ex élèves-professeurs.
C.P.R. . . . . Stagiaires de C.P.R.
P.C. . . . . Certifiés, Bi-admissibles ou certifiés stagiaires.
A . . . . Assistants.
C.O. . . . . Coopérants ou détachés.
S.N. . . . . Professeurs au service militaire, en congé, en sursis ou en disponibilité.
D . . . . A.E., P.E.G.C., Instituteurs, M.I.-S.E.
MA . . . . Maîtres auxiliaires.
P . . . . Enseignement privé.
I . . . . Ingénieurs.
S . . . . Etrangers.

Candidats	U	J	C	F	T	E	I.P.E.S.	C.P.R.	P.C.
Inscrits	25	31	19	38	48	341	141	348	754
Admissibles	23	21	16	33	35	26	22	32	21
Admis	20	14	11	27	18	10	8	9	4

Candidats	A	C.O.	S.N.	M.A.	P	D	I	S	TOTAL
Inscrits	28	80	86	175	85	58	2	5	2 264
Admissibles	3	6	8	2	2	0	0	1	251
Admis	1	0	4	0	2	0	0	0	128

3.5 Répartition suivant les centres d'écrit

Centres \ Candidats	Inscrits	Ayant composé aux trois épreuves	Admissibles	Admis
Ajaccio	9	4	0	0
Aix-Marseille	85	62	4	1
Amiens	76	53	3	3
Besançon	27	16	3	3
Bordeaux-Pau	36	26	1	1
Caen	32	24	1	1
Clermont	21	18	1	1
Dijon	35	25	4	1
Grenoble	95	74	12	3
Lille	187	136	8	2
Limoges	19	15	0	0
Lyon-St Etienne	100	83	7	2
Montpellier	54	36	3	1
Nancy-Metz	90	63	2	1
Nantes	74	40	3	1
Nice	71	53	3	0
Orléans-Tours	50	34	0	0
Paris-Créteil-Versailles	710	509	176	104
Poitiers	26	21	3	0
Reims	25	20	0	0
Rennes-Brest	72	59	3	1
Rouen	86	59	3	1
Strasbourg	50	38	3	1
Toulouse	81	57	0	0
Alger - Rabat - La Réunion - Cotonou - Abidjan	153	105	8	0

3.6 Affectations des agrégés de 1979

Sur les 128 candidats français admis :

- 3 conservent ou obtiennent une chaire de classe terminale C
- 1 est maintenu sur une chaire ordinaire de lycée
- 13 ont été mis à la disposition de recteurs
- 5 partiront au service national
- 5 partiront en coopération ou bénéficieront d'un détachement
- 3 se trouveront en disponibilité ou bénéficieront d'un congé pour études ou d'un sursis d'intégration
- 1 a été affecté à la D.G.R.S.T.
- 27 suivront un stage de formation professionnelle
- 68 effectueront une année supplémentaire dans une E.N.S.
- 2 ont été nommés ou maintenus dans l'enseignement privé.

écrit

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

Durée : 6 heures

INTRODUCTION

Dans tout le problème, on considère un espace vectoriel euclidien E de dimension finie $n \geqslant 2$, un entier $k \geqslant 2$ et un réel $\gamma \in]\, 0\,, 1\, [$. Les entiers n et k et le réel γ pourront être assujettis à des conditions supplémentaires qui dépendront de la question traitée.

On se propose d'étudier certaines familles finies de vecteurs de E (Partie II) et certains ensembles finis de droites vectorielles de E, appelés épis (Partie III). La Partie I rassemble des résultats préliminaires. Dans la Partie IV, on examine quelques propriétés d'un épi particulier.

NOTATIONS

Si v, v' appartiennent à E, leur produit scalaire est noté $(v \mid v')$, et on pose $\| v \| = \sqrt{(v \mid v)}$. On note L(E) l'algèbre des endomorphismes de E, $L^s(E)$ l'espace des endomorphismes symétriques de E et O(E) le groupe orthogonal de E.

Pour tout $v \in E$, on désigne par p_v l'endomorphisme de E tel que

$$p_v(v') = (v \mid v')\, v \qquad \text{pour tout} \quad v' \in E.$$

On définit une opération de O(E) sur l'ensemble E^k en posant, si $f \in O(E)$ et si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in E^k$, $f . x = \big(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k)\big)$.

Par abus de notation, x pourra aussi désigner la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$.

Si Y est un ensemble, on note Card (Y) le cardinal de Y, $\mathfrak{S}(Y)$ le groupe des permutations de Y et id_Y l'application identique de Y. Si de plus h est un entier naturel, $Y^{(h)}$ désigne l'ensemble des parties de cardinal h de Y.

Si P est un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ et si $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $m(\lambda, P)$ le plus grand entier naturel m tel que $(X - \lambda)^m$ divise P dans $\mathbb{C}[X]$.

On désigne par $\mathcal{M}_k$ l'espace des matrices, à k lignes et k colonnes, à termes réels ; si $A \in \mathcal{M}_k$, on note P_A le polynôme caractéristique de A ;

l'espace des matrices symétriques de $\mathcal{M}_k$ est noté $\mathcal{M}_k^s$; si $B \in \mathcal{M}_k^s$, $\lambda(B)$ désigne la plus petite valeur propre de B.

On note enfin I_k la matrice unité de $\mathcal{M}_k$ et J_k la matrice de $\mathcal{M}_k$ dont tous les termes sont égaux à 1.

PARTIE I

Les questions 1, 2, 3 *sont indépendantes les unes des autres. Les questions* 4 *et* 5 *sont indépendantes des précédentes.*

1. Déterminer le rang et la trace de J_k ; en déduire P_{J_k}. Si α et β sont des réels quelconques, former le polynôme caractéristique et calculer les valeurs propres de la matrice $\alpha I_k + \beta J_k$.

2. a. Soit Q un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$. Démontrer que toute racine complexe de Q est simple.

b. Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{Q}[X]$. Soit λ une racine complexe de P telle que $m(\lambda, P) > \frac{1}{2}$ degré (P). Montrer que λ appartient à $\mathbb{Q}$.

3. Si $f \in L(E)$, $\mathrm{Tr}(f)$ désigne la trace de f. Démontrer que $L^s(E)$, muni de la forme bilinéaire symétrique $(f, f') \longmapsto < f, f' > = \mathrm{Tr}(f \circ f')$, est un espace vectoriel euclidien.

4. A tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in E^k$, on associe la matrice $B_x = \big((x_i \mid x_j)\big)$, élément de $\mathcal{M}_k^s$ $\big((x_i \mid x_j)$ est le terme de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de $B_x\big)$.

L'espace $\mathbb{R}^k$ étant muni du produit scalaire usuel, noté $(\ \mid\ )_{\mathbb{R}^k}$, pour lequel la base canonique $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k)$ est orthonormale, φ_x désigne l'application linéaire de $\mathbb{R}^k$ dans E telle que $\varphi_x(\varepsilon_i) = x_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$. On désigne par φ_x^* l'unique application linéaire de E dans $\mathbb{R}^k$ telle que, pour tout $v \in E$ et tout $w \in \mathbb{R}^k$,

$$\big(w \mid \varphi_x^*(v)\big)_{\mathbb{R}^k} = \big(\varphi_x(w) \mid v\big).$$

a. Montrer que B_x est la matrice de $\varphi_x^* \circ \varphi_x$ dans la base ε. En déduire les égalités $\mathrm{rang}(x) = \mathrm{rang}(B_x) = k - m\big(0, P_{B_x}\big)$. Montrer que $\lambda(B_x) \geqslant 0$, et que l'égalité a lieu si et seulement si la famille $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ est liée.

b. Pour $1 \leqslant i \leqslant k$, on pose $p_i = p_{x_i}$. Montrer que $\varphi_x \circ \varphi_x^* = \sum_{i=1}^{k} p_i$.

En déduire que B_x et $\sum_{i=1}^{k} p_i$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.

5. a. Soit $B \in \mathcal{M}_k^s$. Montrer qu'il existe $x \in E^k$ tel que $B = B_x$ si et seulement si $\lambda(B) \geqslant 0$ et $\mathrm{rang}(B) \leqslant n$.

b. Soient x, y des éléments de E^k. Montrer que $B_x = B_y$ si et seulement si x et y ont même orbite sous l'action de O (E).

PARTIE II

On note U l'ensemble des vecteurs unitaires de E. Une famille $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k) \in U^k$ est dite équiangulaire d'angle $\operatorname{Arc}\cos \gamma$ si $|(u_i \mid u_j)| = \gamma$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant k$.

L'ensemble des familles équiangulaires $u \in U^k$ d'angle Arc cos γ est noté U^k_γ.

On désigne par $\mathcal{A}_k$ l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})$ de $\mathfrak{M}^s_k$ telles que $a_{i,i} = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$ et $a_{i,j} \in \{1, -1\}$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant k$.

A tout $u \in U^k_\gamma$, on associe la matrice $A_u = \dfrac{1}{\gamma}(B_u - I_k)$, de sorte que $A_u \in \mathcal{A}_k$.

On dit qu'une famille équiangulaire $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ est aiguë (resp. obtuse) si $(u_i \mid u_j) > 0$ (resp. $(u_i \mid u_j) < 0$) pour $1 \leqslant i < j \leqslant k$.

6. a. Démontrer que toute famille équiangulaire aiguë est libre.

b. Démontrer l'existence d'une famille équiangulaire aiguë $u \in U^n_\gamma$.

7. a. Soit $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k) \in U^k_\gamma$. Démontrer que si la famille $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ est liée,

$$\lambda(A_u) = -\frac{1}{\gamma} \text{ et } m\left(-\frac{1}{\gamma}, P_{A_u}\right) = k - \text{rang}(u).$$

b. Démontrer l'existence d'une famille équiangulaire obtuse $u \in U^{n+1}_{1/n}$.

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose que U^k_γ n'est pas vide, et on désigne par $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ un élément de U^k_γ ; pour $1 \leqslant i \leqslant k$, on pose $p_i = p_{u_i}$.

8. a. Démontrer que, pour $1 \leqslant i \leqslant k$, p_i appartient à $L^s(E)$.

b. Calculer $< p_i, p_j >$ pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$.

c. Démontrer que $k \leqslant \dfrac{1}{2} n(n+1)$.

9. On désigne par Π le sous-espace vectoriel de $L^s(E)$ engendré par $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$. Montrer que $n \geqslant \dfrac{k}{[1 + (k-1)\gamma^2]}$, et que l'égalité a lieu si et seulement si id_E appartient à Π ; démontrer que $id_E \in \Pi$ implique $k\, id_E = n \sum_{i=1}^{k} p_i$. (On pourra considérer la projection orthogonale de id_E sur Π).

Pour $1 \leqslant i < j \leqslant k$, on note $d_{i,j}$ le nombre d'entiers t tels que $1 \leqslant t \leqslant k$, $t \neq i$, $t \neq j$, et $(u_i \mid u_j)(u_i \mid u_t)(u_j \mid u_t) > 0$. On dit que la famille équiangulaire u est régulière si $d_{i,j}$ est indépendant du couple (i, j).

Si $A_u = (\alpha_{i,j})$, on pose $A_u^2 = (\alpha'_{i,j})$.

10. a. Pour $1 \leqslant i < j \leqslant k$, calculer $\alpha'_{i,j}$ en fonction de k, $\alpha_{i,j}$ et $d_{i,j}$.

b. Montrer que la famille u est régulière si et seulement s'il existe des réels ρ_1, ρ_2 tels que $(A_u - \rho_1 I_k)(A_u - \rho_2 I_k) = 0$.

c. Démontrer que id_E appartient à Π si et seulement si la famille u est liée, de rang n et régulière ; montrer que, dans ce cas, les valeurs propres de A_u sont $-\dfrac{1}{\gamma}$ et $\dfrac{1}{\gamma}\left(\dfrac{k}{n} - 1\right)$ avec les multiplicités respectives $k - n$ et n.

11. Cette question est indépendante des questions 8, 9, 10. — On suppose que la famille $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ est liée et que « k est pair, ou $k - \text{rang}(u) \geqslant 2$ ».

Démontrer que si $\dfrac{1}{\gamma^2}$ est entier, cet entier est impair. (On pourra considérer le polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$ obtenu par réduction, modulo 2, du polynôme caractéristique de A_u^2).

12. Démontrer que si id_E appartient à Π et si k est distinct de $n+1$ et de $2n$, $\dfrac{1}{\gamma}$ est un entier impair.

13. *a.* Démontrer que si $k > 2n$, $\dfrac{1}{\gamma}$ est un entier impair. (On pourra utiliser la question *2.*).

b. Montrer que $n = 6$ implique $k \leqslant 16$.

14. On suppose que $k = \dfrac{1}{2}\,n\,(n+1)$. Montrer que $n+2 = \dfrac{1}{\gamma^2}$. En déduire que si $n > 3$, $n+2$ est le carré d'un entier impair.

PARTIE III

Si $\mathcal{D}$ est un ensemble fini (Card $\mathcal{D} \geqslant 2$) de droites vectorielles de E, on appelle repère de $\mathcal{D}$ toute famille $(u_D)_{D \in \mathcal{D}}$ telle que, pour toute droite $D \in \mathcal{D}$, u_D soit un vecteur unitaire de D ; un tel repère est dit aigu si $(u_D \mid u_{D'}) > 0$ pour tout couple (D, D') de droites distinctes appartenant à $\mathcal{D}$. On dit que $\mathcal{D}$ est un *épi* d'angle $\operatorname{Arc}\cos\gamma$ si $\mathcal{D}$ possède un repère $(u_D)_{D \in \mathcal{D}}$ tel que $|(u_D \mid u_{D'})| = \gamma$ pour tout couple (D, D') de droites distinctes appartenant à $\mathcal{D}$. On appelle « base aiguë » de E tout épi de cardinal n possédant un repère aigu.

On considère dans toute cette partie une « base aiguë » $\mathcal{B}$ de E d'angle $\operatorname{Arc}\cos\gamma$ et un repère aigu $(u_D)_{D \in \mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$, et on suppose que $k > n$. On se propose d'étudier les épis $\mathcal{D}$, de cardinal k, contenant $\mathcal{B}$.

Pour toute partie S de $\mathcal{B}$, on pose $e_S = \sum_{D \in S} u_D$, et on note v_S l'unique élément de E tel que, pour toute droite $D \in \mathcal{B}$, on ait

$$(v_S \mid u_D) = -\gamma \quad \text{si } D \in S, \quad (v_S \mid u_D) = \gamma \quad \text{si } D \notin S.$$

On pose $r = \dfrac{1-\gamma}{2\gamma}$ et $\Phi = X^2 - nX + r^2(n + 2r + 1)$ (Φ est donc un élément de $\mathbb{C}[X]$) ; on considère la condition suivante :

$$(*) \qquad \text{les racines de } \Phi \text{ sont entières.}$$

Lorsque la condition $(*)$ est satisfaite, on note h la plus petite racine de Φ, et on pose

$$z = h - r^2 \quad \text{et} \quad z' = h - r(r+1).$$

15. Soient S, T des parties de $\mathcal{B}$.

a. Calculer $(e_S \mid e_T)$, $\| e_S \|^2$, $(e_{\mathcal{B}} \mid e_S)$, $\| e_{\mathcal{B}} \|^2$ en fonction de n, r, Card(S), Card (T) et Card (S $\cap$ T).

b. Montrer que $v_S = \omega_S\, e_{\mathcal{B}} - \dfrac{1}{r}\, e_S$, où ω_S est un nombre réel que l'on calculera en fonction de n, r et Card (S). Calculer $\| v_S \|^2$ en fonction de n, r et Card(S). Vérifier que $\| v_S \| = 1$ si et seulement si Card (S) est racine de Φ.

c. On suppose que Card(S) = Card (T) et que $\| v_S \| = 1$. Calculer $(v_S \mid v_T - v_S)$ puis $(v_S \mid v_T)$ en fonction de r, Card (S) et Card (S $\cap$ T). En déduire que

$$(v_S \mid v_T) = \gamma \quad \text{si et seulement si } \operatorname{Card}(S \cap T) = \operatorname{Card}(S) - r^2,$$

$$(v_S \mid v_T) = -\gamma \quad \text{si et seulement si } \operatorname{Card}(S \cap T) = \operatorname{Card}(S) - r(r+1).$$

16. Montrer qu'il existe un épi, de cardinal k, contenant $\mathcal{B}$ si et seulement si la condition $(*)$ est satisfaite et s'il existe une partie $\mathcal{S}$ de $\mathcal{B}^{(h)}$ satisfaisant la condition suivante :

$$(**)\left\{\begin{array}{ll}\text{(i)} & \text{Pour tout couple } (\mathrm{S},\mathrm{T}) \text{ d'éléments distincts de } \mathcal{S}, \operatorname{Card}(\mathrm{S}\cap\mathrm{T}) \\ & \quad \text{appartient à } \{z, z'\}. \\ \text{(ii)} & \operatorname{Card}(\mathcal{S}) = k - n.\end{array}\right.$$

Jusqu'à la fin de cette partie, sauf dans la question *19*, on suppose que $\mathcal{O}$ est un épi, de cardinal k, contenant $\mathcal{B}$; h, z, z' sont alors définis comme il a été précisé plus haut.

17. *a.* Montrer que $n \geqslant 2r(2r+1)$.

b. Calculer $z(n-h-r^2)$ en fonction de r.

c. On suppose que $r = 1$ (resp. 2). Démontrer que le couple (n, h) appartient à un ensemble de cardinal 2 (resp. 5) que l'on précisera.

18. On suppose dans cette question que $k \geqslant n+2$ et que r n'est pas entier. Montrer que r n'appartient pas à $\mathbb{Q}$. Soient

$$a = r(r+1) \quad \text{et} \quad b = r^2(n+2r+1).$$

De l'égalité $(n-2a-1)r + b - a(n-1) = 0$, déduire que $n = 3$ et $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

19. On suppose que $n = 3$ (resp. 6). Démontrer qu'il existe un épi de cardinal 6 (resp. 16), et une famille équiangulaire régulière appartenant à U^6 (resp. U^{16}).

20. Dans cette question on suppose que $k = \dfrac{1}{2}n(n+1)$ et $n > 3$.

a. Démontrer que $h^2 - (4r^2+4r-1)h + 2r^3(2r+3) = 0$.

b. On pose $s = 2r - 1$. Démontrer que ou bien $s = 1$, ou bien il existe deux entiers c, d tels que $s = 3c^2$ et $3c^4 + 5c^2 + 1 = d^2$.

En déduire que si $n < 10^4$, $n \in \{7, 23, 839\}$.

On note Γ le stabilisateur de $\mathcal{O}$ dans $\mathrm{O}(\mathrm{E})$ et π l'homomorphisme de Γ dans $\mathfrak{S}(\mathcal{O})$ qui à tout $f \in \Gamma$ associe la permutation de $\mathcal{O}$ induite par f. On pose enfin $\mathrm{G} = \pi(\Gamma)$. Préciser le noyau de π.

21. On suppose que h est distinct de $\dfrac{n}{2}$. On suppose en outre que deux parties quelconques de $\mathcal{B}^{(h)}$ satisfaisant la condition $(**)$ peuvent être transformées l'une en l'autre par un élément de $\mathfrak{S}(\mathcal{B})$.

a. Montrer que G permute transitivement les « bases aiguës » de E contenues dans $\mathcal{O}$.

b. Soit $\mathcal{S}$ une partie de $\mathcal{B}^{(h)}$ satisfaisant la condition $(**)$. Montrer que le stabilisateur de $\mathcal{B}$ dans G est isomorphe au stabilisateur de $\mathcal{S}$ dans $\mathfrak{S}(\mathcal{B})$.

PARTIE IV

Cette partie est indépendante de la PARTIE II

On suppose que $n = 7$, et l'on pose $Y = \{1, 2, \ldots, 7\}$. On considère une « base aiguë » $\mathcal{B} = \{D_1, D_2, \ldots, D_7\}$ de E d'angle $\operatorname{Arc}\cos\left(\frac{1}{3}\right)$, et un repère aigu $(u_D)_{D \in \mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$. Si $i \in Y$, on pose $u_i = u_{D_i}$. Quel que soit (i, j), élément de Y^2, tel que $i < j$, on pose

$$v_{i,j} = \frac{1}{3}\left\{\left(\sum_{t \in Y,\ t \notin \{i,j\}} u_t\right) - 2(u_i + u_j)\right\} \quad \text{et} \quad D_{i,j} = \mathbb{R}v_{i,j}.$$

Enfin on pose $\mathcal{D} = \{D_i \,;\, (i \in Y)\} \cup \left\{D_{i,j} \,;\, \left((i,j) \in Y^2 \text{ et } i < j\right)\right\}$.

22. Montrer que $\mathcal{D}$ est un épi d'angle $\operatorname{Arc}\cos\left(\frac{1}{3}\right)$ et de cardinal 28.

On conserve les notations Γ, π, G introduites dans la partie III, et on note Ω l'ensemble des « bases aiguës » de E contenues dans $\mathcal{D}$. Pour tout $\mathcal{L} \in \Omega$, on désigne par $G_{\mathcal{L}}$ le stabilisateur de $\mathcal{L}$ dans G, et par $\sigma_{\mathcal{L}}$ l'homomorphisme de $G_{\mathcal{L}}$ dans $\mathfrak{S}(\mathcal{L})$ qui à tout $g \in G_{\mathcal{L}}$ associe la permutation de $\mathcal{L}$ induite par g.

23. Démontrer que chacun des ensembles suivants appartient à Ω :

$\mathcal{L}_1 = \{D_1\} \cup \{D_{1,j} \,;\, (2 \leqslant j \leqslant 7)\}$,

$\mathcal{L}_2 = \{D_i \,;\, (1 \leqslant i \leqslant 4)\} \cup \{D_{5,6}, D_{5,7}, D_{6,7}\}$,

$\mathcal{L}_3 = \{D_1, D_2\} \cup \{D_{1,2}\} \cup \{D_{3,j} \,;\, (4 \leqslant j \leqslant 7)\}$,

$\mathcal{L}_4 = \{D_1\} \cup \{D_{1,j} \,;\, (2 \leqslant j \leqslant 4)\} \cup \{D_{5,6}, D_{5,7}, D_{6,7}\}$.

24. Montrer que G permute transitivement les éléments de Ω et que, pour tout $\mathcal{L} \in \Omega$, $\sigma_{\mathcal{L}}$ est un isomorphisme.

25. *a.* Montrer que les orbites des $\mathcal{L}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ sous l'action de $G_{\mathcal{B}}$ forment une partition de $\Omega - \{\mathcal{B}\}$. Montrer que $\operatorname{Card}(\Omega) = 288$.

b. Calculer le cardinal de G.

26. Vérifier que toute partie de cardinal 2 de $\mathcal{D}$ est contenue dans un élément de Ω. Montrer qu'étant donnés des couples (D, D') et (Δ, Δ') de droites de $\mathcal{D}$ tels que $D \neq D'$ et $\Delta \neq \Delta'$, il existe $g \in G$ tel que $g(D) = \Delta$ et $g(D') = \Delta'$.

RAPPORT SUR L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES GENERALES

I.- Thème du sujet

Le thème du problème était l'étude des systèmes de droites équiangulaires (nommés ici épis) dans un espace euclidien. Etant donnés un espace euclidien E de dimension $n \geqslant 2$, un entier $k \geqslant 2$ et un réel $\gamma \in]\,0, 1\,[$, on appelait épi un ensemble D, de cardinal k, formé de droites vectorielles de E faisant deux à deux l'angle Arc cos γ.

Le fait central dans cette étude est que les paramètres n, k et γ ne peuvent être choisis arbitrairement. En particulier, l'existence d'un épi implique :

a) $k \leqslant \frac{1}{2} n(n+1)$,

b) $n \geqslant \frac{k}{1+(k-1)\gamma^2}$,

c) si $k > 2n$, $\frac{1}{\gamma}$ est un entier impair.

Ces résultats étaient obtenus dans la partie II, notamment au moyen de la matrice de Gram d'une famille de vecteurs. La majoration a) conduit naturellement à la question suivante : n étant fixé, quelle est la valeur maximale de k ? Pour quelques petites valeurs de n ($n = 2, 3, 6, 7$), les résultats des parties II, III, IV permettent de déterminer cette valeur maximale ($k = 3, 6, 16, 28$ respectivement). Pour plus de renseignements sur ce sujet, voir : Lemmens and Seidel, «Equiangular lines», Journal of Algebra, 24 (1973) pp. 494-512.

Une autre approche de l'étude des épis consiste à donner des méthodes de construction de certains épis, valables en toute dimension n, quitte à imposer des restrictions aux épis considérés. Ainsi, dans la partie III, on s'intéressait aux épis contenant une «base aiguë»; on était ainsi amené à aborder un problème de nature combinatoire (cf. 16). La conjonction des conditions : «$k = \frac{1}{2} n(n+1)$» et «D contient une base aiguë» aboutissait à la discussion d'une équation diophantienne (cf. 20).

Le troisième aspect du problème était l'étude des symétries d'un épi D, c'est-à-dire du groupe G de D. Dans la partie IV, s'attachant à un épi particulier D — de cardinal $k = 28$ et en dimension $n = 7$ — on déterminait le cardinal de G et on montrait que son opération est doublement transitive sur D. Ce groupe est par ailleurs bien connu ; il est simple et isomorphe au groupe symplectique $Sp_6(F_2)$. De plus, avec les notations de IV, on peut construire, dans E, un système de racines de type E_7 dont le groupe de Weyl est égal à Γ.

Signalons enfin, pour les amateurs d'érudition et en prolongement de la question 20.b, qu'il existe, en dimension $n = 23$, un épi D, de cardinal $k = 276$, contenant une base aiguë, et que le groupe G correspondant est le groupe simple d'ordre $2^{10}.3^7.5^3.7.11.23$, découvert en 1969 par Conway.

II.- Observations

Le problème demandait aux candidats de manifester une bonne connaissance de plusieurs parties du programme. Citons, par exemple, l'ensemble des notions fondamentales de l'algèbre linéaire (rang, polynôme caractéristique et polynôme minimal, valeurs propres, trace, etc.), les espaces euclidiens, la théorie des polynômes, l'arithmétique, la combinatoire, et les groupes opérant sur un ensemble.

A quelques rares exceptions près, les candidats n'ont abordé ni les questions 11 à 14 de II, ni les parties III et IV (sauf les calculs, assez longs il est vrai, des questions 15 et 22). Ceci s'explique, en partie au moins, par la longueur du problème ; cependant il est dommage de constater que de nombreux candidats ont consacré l'essentiel de leurs efforts à la partie I, alors que l'énoncé précisait que cette partie rassemblait des résultats préliminaires.

Il est vrai que la partie I n'était pas «triviale» — ce qui permettait aux bons candidats d'exprimer rapidement leurs qualités —. Ainsi 2 b et 5 nécessitaient une certaine habileté technique. Peu de candidats ont traité correctement 2 a, qui ne demandait pourtant que des connaissances élémentaires sur les polynômes. A ce sujet, il est inadmissible d'affirmer qu'un polynôme irréductible de Q [X] est nécessairement de degré 1 ou 2.

Rappelons que si g est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien E, E possède une base orthonormée formée de vecteurs propres de g. Ce résultat servait tout au long du problème, sous diverses formes. Il permettait notamment de traiter les questions 1, 3, 4 a (avec quelques connaissances simples d'algèbre linéaire). Signalons à ce propos deux erreurs fréquemment rencontrées : il ne faut pas croire que la matrice d'un endomorphisme symétrique par rapport à une base quelconque est symétrique, ou encore la multiplicité d'une valeur propre d'un endomorphisme quelconque est toujours égale à la dimension de l'espace propre correspondant.

La partie I rassemblant des préliminaires, il fallait bien penser que ces résultats servaient par la suite : par exemple, à l'aide de 1, 4 et 5, les questions 6 et 7 pouvaient être traitées très simplement, sans perdre de temps à chercher des solutions détournées, souvent laborieuses.

D'une manière générale rappelons, pour les candidats futurs, que l'enchaînement des questions est important dans ce type de problème. D'ailleurs cet enchaînement peut déjà être entrevu après une lecture minutieuse de l'ensemble du sujet (lecture évidemment indispensable).

Pour terminer, il est clair qu'un candidat sérieux doit entrer dans le vif du sujet en traitant quelques questions substantielles ; ceci implique que les questions plus simples soient traitées avec concision. L'expérience a souvent montré, qu'au demeurant, concision et clarté vont de pair.

Répartition des notes

Notes	Nombre de candidats
0	146
1 — 4	472
5 — 8	270
9 — 12	219
13 — 16	197
17 — 20	157
21 — 24	116
25 — 28	78
29 — 32	80
33 — 36	45
37 — 40	25
41 — 48	22
49 — 60	7

COMPOSITION D'ANALYSE

Durée : 6 heures

PRÉAMBULE

On note $\mathbb{R}$ le corps des réels. Les espaces vectoriels considérés sont réels et non réduits au vecteur nul.

Si E et F sont deux espaces vectoriels normés, on note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F, muni de la norme usuelle :

$$\forall\, u \in \mathcal{L}_c(E, F), \quad \| u \| = \sup \left\{ \frac{\| u(x) \|}{\| x \|},\ x \in E \text{ et } x \neq 0 \right\}.$$

PRÉLIMINAIRES

Les résultats des deux dernières questions de cette partie pourront être utilisés dans la suite du problème, même s'ils n'ont pas été démontrés.

Soit γ une application continue de $[0, 1]$ dans un espace vectoriel normé E. On dit que γ est dérivable en 0 si et seulement si

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} \text{ existe; on la note alors } \gamma'(0).$$

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, Ω un ouvert de E, x_0 un point de Ω et f une application *continue sur* Ω, à valeurs dans F. On dit que f est *quasi différentiable* en x_0 si et seulement si il existe une application linéaire u de E dans F telle que, pour toute application γ continue de $[0, 1]$ dans Ω, dérivable en 0, vérifiant $\gamma(0) = x_0$, l'application $f \circ \gamma$ est dérivable en 0 et $(f \circ \gamma)'(0) = u(\gamma'(0))$.

1° *a.* Montrer que si f, continue sur Ω, est quasi différentiable en x_0, l'application linéaire u est unique. On l'appelle la *quasi-différentielle de* f *en* x_0 et on la note $qf(x_0)$.

b. Montrer que si f, continue sur Ω, est différentiable en x_0, elle y est quasi différentiable et que $qf(x_0) = df(x_0)$, où $df(x_0)$ désigne la différentielle de f en x_0.

c. Énoncer et justifier un théorème relatif à la composition des applications quasi différentiables.

2° On suppose, dans cette question seulement, qu'il existe un réel k tel que

$$\forall\, (x, y) \in \Omega^2, \quad \| f(x) - f(y) \| \leqslant k \| x - y \|.$$

Montrer que s'il existe u linéaire de E dans F telle que pour tout vecteur a de E,

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t} = u(a),$$

alors f est quasi différentiable en x_0.

3° Montrer que si f, continue sur Ω, est quasi différentiable en x_0, alors $qf(x_0)$ est continue de E dans F.

4° Lorsque E est de dimension finie, montrer que toute application f, continue sur Ω, et quasi différentiable en x_0, est différentiable en x_0.

E désignant un espace vectoriel normé, on s'intéresse aux problèmes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ suivants :

$\mathfrak{P}$ $\left\{\begin{array}{l}\text{déterminer l'ensemble P des éléments de E où l'application de E dans } \mathbb{R} : \\ x \longmapsto \| x \|, \text{ est différentiable, et calculer } df(x_0) \text{ pour } x_0 \text{ dans P;}\end{array}\right.$

$\mathfrak{Q}$ $\left\{\begin{array}{l}\text{déterminer l'ensemble Q des éléments de E où l'application de E dans } \mathbb{R} : \\ x \longmapsto \| x \|, \text{ est quasi différentiable, et calculer } qf(x_0) \text{ pour } x_0 \text{ dans Q.}\end{array}\right.$

I

A

Soient $E = \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dans E. On considère les trois normes :

$$\| x \|_\infty = \sup \{ \mid x_i \mid ; 1 \leqslant i \leqslant n \};$$

$$\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid ;$$

$$\| x \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

1° Résoudre, avec soin, le problème $\mathfrak{P}$ pour E muni successivement de chacune de ces trois normes.

2° Préciser dans chaque cas les composantes connexes de P (on en indiquera en particulier le nombre).

B

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $E^* = \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$ son dual, normé (cf. PRÉAMBULE). On note B et S (resp. B^* et S^*) la boule unité fermée et la sphère unité de E (resp. E^*).

Pour chaque x_0 de S, on note L_{x_0} l'ensemble des formes linéaires φ, appartenant à S^*, telles que

$$\forall x \in B, \quad \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0) = 1. \tag{1}$$

On admet que, pour tout x_0 de S, cet ensemble L_{x_0} n'est pas vide.

Toute application l, de S dans S^*, qui, à tout x_0 de S, associe un élément l_{x_0} de L_{x_0} est appelée *fonction de dualité.*

On dit que B est *lisse* en x_0 ($x_0 \in S$) si et seulement si L_{x_0} est de cardinal 1.

On dit que B est *strictement convexe* en x_0 (x_0 élément de S) si et seulement si $B \setminus \{ x_0 \}$ est convexe.

1° Soit $l : S \longrightarrow S^*$ une fonction de dualité. Démontrer que si B est lisse en x_0, alors B^* est strictement convexe en l_{x_0}.

2° Démontrer que, si pour toute fonction de dualité l, B^* est strictement convexe en l_{x_0}, alors B est lisse en x_0.

3° Soient (x, y) un élément de S^2, et λ un réel strictement positif tel que $x + \lambda y$ soit non nul. Soit $z = \dfrac{x + \lambda y}{\| x + \lambda y \|}$. Démontrer que, pour toute fonction de dualité l :

$$l_x(y) \leqslant \frac{\| x + \lambda y \| - 1}{\lambda} \leqslant l_z(y).$$

4° Soient x_0 un élément de S et l une fonction de dualité. Démontrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

a. B est lisse au point x_0,

b. l est continue au point x_0,

c. la norme est différentiable au point x_0.

II

1° Résoudre les problèmes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ lorsque E est un espace euclidien qui n'est pas de dimension finie.

2° Soit F l'espace vectoriel des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels, qui convergent vers 0. On le norme en posant : $\| x \|_\infty = \sup \{ | x_n | \ ; \ n \in \mathbb{N} \}$.

Résoudre les problèmes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ pour F. Quelles sont les composantes connexes de P et Q ?

3° Soit G l'espace vectoriel des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série de terme général $| x_n |$ converge. On le norme en posant :

$$\| x \|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} | x_n | .$$

a. Résoudre le problème $\mathfrak{Q}$ pour G. L'ensemble Q est-il ouvert ? Préciser ses composantes connexes.

b. Résoudre le problème $\mathfrak{P}$ pour G.

III

Dans cette partie, E désigne l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, normé par :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \| x \| = \sup \{ | x(t) | \ ; \quad t \in [0, 1] \}.$$

1° Montrer que si l'application de E dans $\mathbb{R}$: $x \longmapsto \| x \|$, est quasi différentiable en x_0, l'application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$: $t \longmapsto | x_0(t) |$, n'atteint son maximum qu'en un seul point.

2° *a.* Soient a et b deux éléments de E. Montrer que l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $\lambda \longmapsto \| a + \lambda b \|$ admet, en tout point, une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

b. Soit x_0 un élément de E tel que l'application : $t \longmapsto | x_0(t) |$ n'atteigne son maximum qu'en un seul point t_0.

Soient a un élément de E et λ un réel; on note t_λ la borne supérieure de l'ensemble des éléments de $[0, 1]$ où l'application : $t \longmapsto |x_0(t) + \lambda a(t)|$ atteint son maximum.

Montrer que $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} t_\lambda = t_0$.

c. En déduire la solution du problème $\mathcal{Q}$ pour E. L'ensemble Q est-il ouvert ? Quelles sont ses composantes connexes ?

3° Résoudre le problème $\mathcal{P}$ pour E.

RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE

I.- Remarques générales

Le problème propose l'étude de la différentiabilité de l'application norme : $x \longmapsto \|x\|$, de E espace vectoriel normé, dans R.

Après l'étude de propriétés générales, les candidats devaient examiner des cas particuliers, d'abord en dimension finie (I), puis en dimension quelconque (II et III).

Il y avait un certain nombre de questions faciles, ne faisant même pas appel à la définition de la différentiabilité : les 1° a et c, et 2° des préliminaires, notés sur 7. La répartition des notes montre cependant qu'un candidat sur trois environ a obtenu 4 ou plus. Une question se pose alors : que viennent faire des candidats qui n'essayent même pas de résoudre les questions à la portée de tous ?

D'autre part, la résolution du I A ne nécessitait que des connaissances rudimentaires en calcul différentiel et en topologie, connaissances que devraient posséder des titulaires de la maîtrise, certains étant déjà enseignants. Avec les questions faciles des préliminaires, et le I A on pouvait obtenir une vingtaine de points, or il ne reste qu'environ 400 candidats à avoir plus de 15. C'est navrant.

II.- Remarques sur la résolution et la correction

Préliminaires : On peut déplorer un manque de rigueur : nombreux sont les candidats qui construisent une application γ sans s'assurer qu'elle soit à valeurs dans Ω, ou bien composent f différentiable avec γ «dérivable» au sens du texte pour conclure à la différentiabilité de l'application composé $f_o\,\gamma$.

Rares sont les copies où l'on trouve quelque chose de correct sur les questions 3 et 4, très difficiles. Le plus souvent, en introduisant une constante M telle que $\|qf(x_0)(x)\| \leqslant M\|x\|$, on conclut à la continuité de $qf(x_0)$, et dans le 4° on conclut à la différentiabilité grâce à l'existence des dérivées partielles.

Première partie

A — On trouve, pour prouver la différentiabilité, des «divisions par des vecteurs», ce qui est inquiétant pour un concours de ce niveau.

Certains candidats, qui explicitent correctement les composantes connexes ne savent pas les compter; quant à la justification précise de ce que ce sont les composantes connexes elle n'est faite que dans un quart de copies environ. Enfin rares sont les candidats ayant remarqué que $\{o\}$ avait 2 composantes connexes en dimension 1.

B — Cette partie n'est abordée que par les copies acceptables : celles des candidats qui ne sont pas rebutés par la dualité.

Les trois premières questions se faisaient aisément ainsi que l'implication c $\Rightarrow$ a du 4°. Seules les très bonnes copies donnent une solution correcte du 4°.

La suite du problème proposait l'étude de différents cas en dimension infinie, avec des résultats variés pour P et Q. Seuls les bons candidats ont abordé ces parties, aussi les solutions proposées sont-elles correctes.

Deuxième partie

Le 1° n'offre aucune difficulté.

La résolution du I A donnait des indications sur les résultats à trouver au 2° et 3°. Une mise en forme facile permettait de montrer que *pour le* 2° $P = Q = \{x \; ; \; \| x \|_\infty$ n'est atteinte qu'en un indice$\}$; *pour le* 3°, $Q = \{x \; ; \; \forall n \in N, x_n \neq o\}$.

Pour prouver la quasi différentiabilité en un élément de Q, la norme étant lipschitzienne, le 2° des préliminaires servait.

Le fait que P soit vide (3° b), s'obtenait en vérifiant que pour un x_o de Q, la quantité

$$\frac{\| x_o + h \| - \| x_o \| - u\,(x_o)\,(h)}{\| h \|}$$

ne tendait pas vers o lorsque $\| h \|$ tend vers o, (où u désigne la quasi différentielle de la norme en x_o).

Troisième partie

Elle n'a été que très rarement abordée. Le 2° a, question de cours en fait, permettait d'obtenir facilement un point.

Aucun candidat n'a trouvé que l'ensemble Q n'avait cette fois qu'une composante connexe.

III.- Conclusion

Il est navrant de constater qu'un si grand nombre de candidats se destinant à l'enseignement des mathématiques, (quand ils ne les enseignent pas déjà !) ne connaissent même pas la définition d'une application différentiable.

On aimerait trouver dans les copies plus de rigueur dans la rédaction mais également une bonne présentation et une orthographe correcte. Indépendemment du bénéfice que les candidats en tireraient pour leur note, qu'ils pensent aux élèves qu'ils ont ou auront.

IV.- Répartition des notes

Notes	Nombre de candidats
0 à 4	686
5 à 8	231
9 à 12	165
13 à 16	136
17 à 20	133
21 à 24	112
25 à 28	76
29 à 32	59
33 à 36	33
37 à 40	27
41 à 48	48
49 à 60	17
	Total 1 723

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Durée : 6 heures

ANALYSE NUMÉRIQUE

0. NOTATIONS ET DÉFINITIONS

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.

$\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker défini pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ par :

$$\begin{cases} \delta_{i,j} = 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ \delta_{i,i} = 1 \end{cases}$$

$\mathbb{R}$ est le corps des nombres réels, $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

Les espaces vectoriels introduits sont définis sur le corps $\mathbb{R}$. Sauf dans **Q. 3** *a.*, les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire euclidien noté $<.,.>$ et de la norme associée, notée $\|.\|$. $\mathbb{R}^2$ désigne aussi l'espace affine (muni de l'origine $(0,0)$) attaché à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. L'angle des vecteurs x et y appartenant à $\mathbb{R}^2$ est noté $(\widehat{x,y})$.

On appelle triangle T l'enveloppe convexe de trois points non alignés A_1, A_2, A_3, de $\mathbb{R}^2$. On rappelle que si $M \in \mathbb{R}^2$, il existe des nombres réels $\lambda_i^T(M)$ $(i = 1, 2, 3)$ définis de façon unique par :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \lambda_i^T(M)\, \overrightarrow{MA_i} = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \lambda_i^T(M) \qquad\quad = 1 \end{cases}$$

appelés coordonnées barycentriques de M relativement à A_1, A_2, A_3. L'indice T pourra être omis s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le triangle considéré. On désigne par $h(T)$ le diamètre du triangle T et par $\delta(T)$ le diamètre du cercle inscrit dans le triangle T.

ESPACES $C^k(\mathcal{O})$; $C^k(\overline{\mathcal{O}})$.

Pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$, d'adhérence $\overline{\mathcal{O}}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $C^k(\mathcal{O})$ est l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathcal{O}$ qui sont (lorsque $k \geqslant 1$) k fois continûment différentiables dans $\mathcal{O}$.

$C^k(\overline{\mathcal{O}})$ est l'espace vectoriel des restrictions à $\overline{\mathcal{O}}$ des fonctions de $C^k(\mathbb{R}^2)$. Si $v \in C^k(\overline{\mathcal{O}})$ et si $\mathcal{O}$ est borné, on note :

$$\|v\|_{C^k(\overline{\mathcal{O}})} = \sup_{\alpha_1+\alpha_2=k} \left(\sup_{x \in \overline{\mathcal{O}}} \left| \frac{\partial^k v(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2}} \right| \right)$$

où $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$, $x = (x_1, x_2)$.

Pour $M \in \mathcal{O}$, $u \in C^k(\mathcal{O})$, et $1 \leqslant p \leqslant k$, on note $D_M^p u$ la dérivée d'ordre p en M de la fonction u, considérée comme forme p-linéaire symétrique sur $(\mathbb{R}^2)^p$.

On pose

$$\left| D_M^p u \right|^* = \sup \left\{ \left| D_M^p u\,(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(p)}) \right|, \quad x^{(i)} \in \mathbb{R}^2, \quad \| x^{(i)} \| = 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant p \right\}$$

$D_M^1 u$ est noté $D_M u$.

ESPACES $L^p(U)$; $L^\infty(U)$.

Les mesures et les intégrales considérées sont prises au sens de Lebesgue dans $\mathbb{R}^2$.

Soit U un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^2$ dont la mesure est notée mes U.

Dans tout le problème, par commodité de langage, on désignera indifféremment par v une classe de fonctions (pour la relation d'équivalence définie par l'égalité presque partout) ou une fonction appartenant à la classe de v. Si la classe de v contient une fonction continue, on la choisira systématiquement comme représentant de cette classe.

Pour $p \in \mathbb{R}$, $p \geqslant 1$, on note $L^p(U)$ l'espace de Banach des classes de fonctions v définies presque partout (p. p.) sur U, mesurables, dont la valeur absolue est de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable, muni de la norme :

$$\| v \|_{L^p(U)} = \left(\int_U | v(x) |^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\iint_U | v(x_1, x_2) |^p \, dx_1 \, dx_2 \right)^{\frac{1}{p}}$$

$L^\infty(U)$ est l'espace de Banach des classes de fonctions v définies et bornées p. p. sur U, mesurables, muni de la norme :

$$\| v \|_{L^\infty(U)} = \inf \{ \alpha \,;\, \alpha \in \mathbb{R},\ | u(x) | \leqslant \alpha \text{ p. p. dans } U \}.$$

ESPACE $\mathcal{D}(\mathcal{O})$.

Si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on note $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathcal{O}$, indéfiniment différentiables sur $\mathcal{O}$ et à support compact dans $\mathcal{O}$.

On admettra que, pour tout $p \geqslant 1$, $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ est dense dans $L^p(\mathcal{O})$.

Si v est une fonction définie sur U et si $V \subset U$, on note $v|_V$ sa restriction à V.

Soit enfin P_1 l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels à deux variables réelles (x_1, x_2) de degré $\leqslant 1$ et $P_1(U) = \{ p|_U \,;\, p \in P_1 \}$.

I

Dans **Q. 1**, **Q. 2**, **Q. 3**, et sauf précision contraire, les indices i, j utilisés prennent les valeurs 1, 2, 3.

Q. 1 Soit T un triangle de sommets A_1, A_2, A_3.

a. Montrer que si $u \in C^0(\mathbb{R}^2)$ la fonction $\bar{u}_T$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall M \in \mathbb{R}^2, \ \bar{u}_T(M) = \sum_i \lambda_i(M)\, u(A_i)$$

est l'unique élément de P_1 vérifiant

$$\bar{u}_T(A_i) = u(A_i) \quad (i = 1, 2, 3)$$

b. Vérifier que $D_M \lambda_i$ est indépendant de M.

On pose alors $D_M \lambda_i = D \lambda_i$.

Démontrer que

$$\forall M \in \mathbb{R}^2, \ D\lambda_i\left(\overrightarrow{MA_j}\right) = \delta_{i,j} - \lambda_i(M)$$

et

$$\frac{1}{h(\mathrm{T})} \leqslant |\mathrm{D}\lambda_i|^* \leqslant \frac{1}{\delta(\mathrm{T})}$$

c. Soit $u \in \mathrm{C}^2(\mathrm{T})$; montrer, en utilisant une formule de Taylor en M, que :

$$\|u - \bar{u}_{\mathrm{T}}\|_{\mathrm{C}^0(\mathrm{T})} \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{K}_2 h^2(\mathrm{T})$$

et

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}(u - \bar{u}_{\mathrm{T}})\right\|_{\mathrm{C}^0(\mathrm{T})} \leqslant \frac{3}{2}\mathrm{K}_2 \frac{h^2(\mathrm{T})}{\delta(\mathrm{T})}; \quad 1 \leqslant i \leqslant 2$$

où $\mathrm{K}_2 = \sup\limits_{\mathrm{M}\in\mathrm{T}} \left|\mathrm{D}^2_{\mathrm{M}} u\right|^*$.

Q. 2 On identifie $\mathrm{D}\lambda_i$ à l'élément de $\mathbb{R}^2$: $\left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial x_1}, \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_2}\right)$, noté grad λ_i.

On suppose qu'il existe $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $i \neq j$:

(1) $$\cos\left(\widehat{\operatorname{grad}\lambda_i, \operatorname{grad}\lambda_j}\right) \leqslant \sigma_0 < 0$$

a. Montrer qu'il existe $h_0 > 0$ tel que si $h(\mathrm{T}) \in]0, h_0]$, pour tout $i \neq j$:

$$\int_{\mathrm{T}} [< \operatorname{grad}\lambda_i, \operatorname{grad}\lambda_j > + \lambda_i(x)\lambda_j(x)]\, dx < 0$$

b. Caractériser les angles du triangle T, lorsque l'hypothèse (1) est vérifiée.

Q. 3 Soient T et $\hat{\mathrm{T}}$ deux triangles de sommets respectifs A_i et $\hat{\mathrm{A}}_i$.

a. Définir une application affine bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que T soit l'image de $\hat{\mathrm{T}}$ et A_i soit l'image de $\hat{\mathrm{A}}_i$.

b. Soit $v \in \mathrm{P}_1$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathrm{T}, \ v(x) \geqslant 0$$

Montrer que pour tout $p \geqslant 1$:

$$\|v\|^p_{\mathrm{L}^p(\mathrm{T})} \geqslant \mathrm{C}_1 \operatorname{mes}\mathrm{T} \sum_i (v(\mathrm{A}_i))^p$$

$$\text{où} \quad \mathrm{C}_1 = \frac{1}{\operatorname{mes}\hat{\mathrm{T}}} \min\left\{\int_{\hat{\mathrm{T}}} \left(\lambda_i^{\hat{\mathrm{T}}}(\hat{x})\right)^p d\hat{x}\,;\ i = 1, 2, 3\right\}.$$

Q. 4 Soit Φ une fonction décroissante définie pour $t \geqslant k_0 \geqslant 0$ (k_0 nombre réel donné) à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que pour tout k et l vérifiant $l > k \geqslant k_0$ on ait :

$$\Phi(l) \leqslant \frac{\mathrm{C}}{(l-k)^\alpha}(\Phi(k))^\beta$$

C, α, β étant des nombres réels positifs ; $\beta > 1$.

On définit $d \in \mathbb{R}^+$ par :

$$d^\alpha = \mathrm{C}(\Phi(k_0))^{\beta-1}\, 2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}}$$

Montrer que la suite $(\Phi(k_s))_{s\in\mathbb{N}}$ où $k_s = k_0 + d - \frac{d}{2^s}$, vérifie :

$$\forall s \in \mathbb{N},\ \Phi(k_s) \leqslant 2^{\frac{s\alpha}{1-\beta}}\, \Phi(k_0)$$

et en déduire que :

$$\forall t \geqslant k_0 + d \quad , \quad \Phi(t) = 0.$$

II

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière est de mesure nulle; pour $p \in \mathbb{R}$, $p > 1$, on désigne par $W^{1,p}(\mathcal{O})$ l'espace vectoriel des classes de fonctions $u \in L^p(\mathcal{O})$ telles qu'il existe u_1 et u_2 appartenant à $L^p(\mathcal{O})$ vérifiant :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}),\ \int_{\mathcal{O}} u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx = -\int_{\mathcal{O}} u_i(x)\,\varphi(x)\,dx\,;\quad i = 1, 2. \tag{2}$$

Q. 5 *a*. Montrer que si $\mathcal{O}$ est borné et si $u \in C^1(\overline{\mathcal{O}})$ alors $u \in W^{1,p}(\mathcal{O})$ et on peut choisir $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$; $i = 1, 2$.

b. Montrer que pour tout ouvert $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$, si u appartient à $W^{1,p}(\mathcal{O})$, u_1 et u_2 vérifiant (2) sont définis de manière unique.

On dit alors que u_i est la dérivée généralisée de u par rapport à x_i et on la note $\partial_i u$ $(i = 1, 2)$.

c. Montrer que si $\mathcal{O}$ est borné, si $p \geqslant q$, alors $W^{1,p}(\mathcal{O}) \subset W^{1,q}(\mathcal{O})$.

d. Montrer que pour tout ouvert $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$, $W^{1,p}(\mathcal{O})$ muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\mathcal{O})} = \left(\|u\|^p_{L^p(\mathcal{O})} + \sum_{i=1}^{2} \|\partial_i u\|^p_{L^p(\mathcal{O})}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3}$$

est un espace de Banach et que $W^{1,2}(\mathcal{O})$ que l'on notera $H^1(\mathcal{O})$ est un espace de Hilbert, dont le produit scalaire associé à la norme (3) est noté $a(\,.\,,\,.)$.

Q. 6 Soit $W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ l'ensemble des classes de fonctions de $W^{1,p}(\mathcal{O})$ dont le prolongement par 0 dans le complémentaire de $\mathcal{O}$ (dans $\mathbb{R}^2$) appartient à $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$.

$W_0^{1,2}(\mathcal{O})$ est noté $H_0^1(\mathcal{O})$.

Montrer que pour $p > 1$, $W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ muni de la norme (3) est un sous-espace vectoriel fermé de $W^{1,p}(\mathcal{O})$.

III

Soient Ω un ouvert borné convexe de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ polygonale et $h_0 \in \mathbb{R}$ $(h_0 > 0)$. À tout $h \in\,]0, h_0]$ on associe un recouvrement fini de $\overline{\Omega}$ par des triangles de diamètres $\leqslant h$ contenus dans $\overline{\Omega}$, de sorte que l'intersection de deux triangles du recouvrement, lorsqu'elle est non vide, soit un côté ou un sommet commun aux deux triangles.

Un tel recouvrement est appelé triangulation de Ω et noté $\mathcal{C}_h$ (considéré comme un ensemble de triangles).

On supposera dans toute la suite qu'il existe $\sigma > 0$ tel que :

(4) $$\forall h \in]0, h_0] \quad ; \quad \max_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{h(T)}{\delta(T)} \leqslant \sigma$$

On note b_i ($1 \leqslant i \leqslant N$), (resp. b_i ($N+1 \leqslant i \leqslant N+M$)) les sommets des triangles de $\mathcal{T}_h$ appartenant à Ω (resp. à Γ).

Soit W_h l'espace vectoriel des fonctions $w_h \in C^0(\overline{\Omega})$ telles que

$$\forall T \in \mathcal{T}_h \quad , \quad w_h|_T \in P_1(T)$$

Soit V_h le sous-espace de W_h des fonctions de W_h nulles en b_i ; $N+1 \leqslant i \leqslant N+M$.

Q. 7 *a.* Montrer que, pour $1 \leqslant i \leqslant N+M$, il existe une fonction w_i unique vérifiant :

$$\begin{cases} w_i \in W_h \\ w_i(b_j) = \delta_{i,j} \quad , \quad 1 \leqslant j \leqslant N+M \end{cases}$$

b. Montrer que

$$\{ w_i \quad ; \quad 1 \leqslant i \leqslant N+M \} \text{ est une base de } W_h.$$

En déduire une base de V_h.

c. Montrer que

$$\forall p > 1 \begin{cases} W_h \subset W^{1,p}(\Omega) \\ V_h \subset W_0^{1,p}(\Omega) \end{cases}$$

d. On admettra que si $p > 2$, pour tout élément u de $W^{1,p}(\Omega)$, il existe un représentant de la classe de u appartenant à $C^0(\overline{\Omega})$. Montrer alors que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $p > 2$, il existe une fonction unique $\tilde{u}_h \in W_h$ vérifiant

$$\tilde{u}_h(b_i) = u(b_i) \quad ; \quad 1 \leqslant i \leqslant N+M.$$

Q. 8 Montrer que, si $u \in C^2(\overline{\Omega})$, pour tout $p > 2$ il existe $K > 0$ indépendant de h tel que

$$\| u - \tilde{u}_h \|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant K h \| u \|_{C^2(\overline{\Omega})}.$$

IV

On donne pour $p > 2$

(5) $$\begin{cases} f_i \in L^p(\Omega) \qquad i = 0, 1, 2 \\ u_0 \in W^{1,p}(\Omega) \end{cases}$$

On pose pour $r \geqslant 2$

(6) $$\forall v \in W^{1,r}(\Omega), \ L(v) = \int_\Omega \left(f_0(x) v(x) + \sum_{i=1}^{2} f_i(x) \partial_i v(x) \right) dx$$

(7) $$u_{0h} = \sum_{i=N+1}^{N+M} u_0(b_i) w_i$$

On considère pour tout $h \in]0, h_0]$ le problème :

$$(P_h) \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in W_h \text{ vérifiant} \\ \forall v_h \in V_h, \ a(u_h, v_h) = \displaystyle\int_\Omega \left(u_h(x) v_h(x) + \sum_{i=1}^{2} \partial_i u_h(x) \partial_i v_h(x) \right) dx = L(v_h) \\ u_h - u_{0h} \in V_h \end{cases}$$

Q. 9 Montrer que (P_h) admet une solution unique.

Q. 10 On pose, pour $1 \leqslant i, j \leqslant \mathrm{N} + \mathrm{M}$

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a(w_j, w_i) \\ h &= \max_{\mathrm{T} \in \mathfrak{T}_h} h(\mathrm{T}) \\ \sigma(\mathrm{T}) &= \max_{1 \leqslant r < s \leqslant 3} \left(\cos \left(\widehat{\operatorname{grad} \lambda_r^{\mathrm{T}}, \operatorname{grad} \lambda_s^{\mathrm{T}}} \right) \right) \\ \sigma(h) &= \max_{\mathrm{T} \in \mathfrak{T}_h} \sigma(\mathrm{T}) \end{aligned}$$

On suppose dans toute la suite qu'il existe $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall h \in]0, h_0] \qquad \sigma(h) \leqslant \sigma_0 < 0 \tag{8}$$

a. Montrer qu'alors l'hypothèse (4) est vérifiée.

b. Montrer qu'il existe $\bar{h}$ $(\bar{h} > 0)$ tel que si $h \in]0, \bar{h}]$;

$$\left\{ \begin{aligned} & a_{ij} \leqslant 0, \ 1 \leqslant i < j \leqslant \mathrm{N} + \mathrm{M}, \\ & \sum_{j=1}^{\mathrm{N}+\mathrm{M}} a_{ij} > 0 ; \qquad 1 \leqslant i \leqslant \mathrm{N} + \mathrm{M} \end{aligned} \right. \tag{9}$$

Q. 11 *a.* Soient ξ_i $(1 \leqslant i \leqslant \mathrm{N} + \mathrm{M})$ des nombres réels donnés et $\gamma \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$\gamma \geqslant \xi_i \qquad (\mathrm{N} + 1 \leqslant i \leqslant \mathrm{N} + \mathrm{M})$$

On pose $\eta_i = \min(\gamma, \xi_i)$; $1 \leqslant i \leqslant \mathrm{N} + \mathrm{M}$.
Établir que :

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{N}+\mathrm{M}} \sum_{j=1}^{\mathrm{N}+\mathrm{M}} a_{ij} (\xi_i - \eta_i) \eta_j \geqslant 0$$

b. Soit $u_h \in \mathrm{W}_h$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\alpha \geqslant u_h(b_i), \quad \mathrm{N} + 1 \leqslant i \leqslant \mathrm{N} + \mathrm{M}$$

Soit $u_{h,\alpha}$ la fonction de W_h telle que

$$u_{h,\alpha}(b_i) = \min \{ \alpha, u_h(b_i) \} ; \ 1 \leqslant i \leqslant \mathrm{N} + \mathrm{M}$$

On pose

$$v_{h,\alpha} = u_h - u_{h,\alpha}$$

Montrer que $v_{h,\alpha} \in \mathrm{V}_h$ et que

$$a(v_{h,\alpha}, v_{h,\alpha}) \leqslant a(u_h, v_{h,\alpha})$$

Q. 12 On pose

$$\mathrm{E}(\alpha) = \{ x \in \Omega ; \ v_{h,\alpha}(x) > 0 \}$$

a. Vérifier que $\overline{\mathrm{E}(\alpha)}$ (adhérence de $\mathrm{E}(\alpha)$) est, soit vide, soit une réunion de triangles de $\mathfrak{T}_h$.

b. u_h étant la solution de (P_h), montrer que ($v_{h,\alpha}$ étant construit comme dans **Q. 11** *b.*) :

$$\| v_{h,\alpha} \|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leqslant \left(\sum_{k=0}^{2} \| f_k \|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \right) (\mathrm{mes}\ \mathrm{E}(\alpha))^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}$$

c. En admettant que pour tout $q > 2$, il existe $\mathrm{C}_2 > 0$ tel que

$$\forall v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega), \ \| v \|_{\mathrm{L}^q(\Omega)} \leqslant \mathrm{C}_2 \| v \|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$$

montrer que si $\beta > \alpha$ il existe $C_3 > 0$ (indépendant de h) tel que :

$$\| v_{h,\alpha} \|^q_{L^q(\Omega)} \geqslant C_3 (\beta - \alpha)^q \operatorname{mes} E(\beta)$$

En déduire (en utilisant Q. 4), qu'il existe $C_4 > 0$ (indépendant de h) tel que :

$$\forall x \in \overline{\Omega},\ u_h(x) \leqslant \max \left\{ 0, \max_{x \in \Gamma} u_{0h}(x) \right\} + C_4 \left(\sum_{k=0}^{2} \| f_k \|_{L^p(\Omega)} \right)$$

En conclure que

$$\| u_h \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \max_{x \in \Gamma} | u_{0h}(x) | + C_4 \left(\sum_{k=0}^{2} \| f_k \|_{L^p(\Omega)} \right)$$

Q. 13 On suppose (uniquement pour cette question) que :

$$f_0 \leqslant 0, \quad f_1 = f_2 = 0.$$

Montrer que la solution du problème (P_h) vérifie :

$$\forall x \in \overline{\Omega},\ u_h(x) \leqslant \max \left(0, \max_{x \in \Gamma} u_h(x) \right).$$

V

Soit le problème

$$(P) \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \forall v \in H^1_0(\Omega),\ a(u, v) = L(v) \\ u - u_0 \in H^1_0(\Omega) \end{cases}$$

où les données u_0 et L sont définies en (5) et (6).

Q. 14 *a.* Montrer que le problème (P) admet une solution unique.

b. Montrer que si $v \in H^1_0(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ alors :

$$\forall x \in \Gamma, \quad v(x) = 0$$

c. Montrer que si $f_1 = f_2 = 0$, si $f_0 \in C^0(\overline{\Omega})$, si $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ et si u solution de (P) appartient en outr à $C^2(\overline{\Omega})$, alors u vérifie :

$$(R) \begin{cases} u(x) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) = f_0(x) \text{ pour } x \in \Omega \\ u(x) = u_0(x) \text{ pour } x \in \Gamma \end{cases}$$

Q. 15 On considère u solution du problème (P) avec f_0, f_1, f_2 dans $L^p(\Omega)$, $p > 2$. On suppose pour cet question que $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Soit u_h la solution de (P_h).

Montrer en calculant $a(u_h - \tilde{u}_h, v_h)$ qu'il existe $K > 0$ indépendant de h tel que :

$$\| u - u_h \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant K h \| u \|_{C^2(\overline{\Omega})}$$

Q. 16 u (resp. u_h) désigne la solution du problème (P) (resp. (P_h)).

Montrer que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $p > 2$

$$\| u - u_h \|_{H^1(\Omega)} \leqslant 2 \| u - \tilde{u}_h \|_{H^1(\Omega)}$$

Q. 17 Montrer que lorsque h tend vers 0, u_h tend vers u dans $H^1(\Omega)$.

MÉCANIQUE

INTRODUCTION

Un système matériel $\mathcal{S}$ est constitué de n solides (S_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ pouvant être en contact entre eux ou en contact avec p obstacles (Σ_j) $(j = 1, 2, \ldots, p)$ ne faisant pas partie du système. On appelle S_i la surface limitant le solide (S_i) et on suppose qu'en chaque point de S_i il existe un plan tangent dépendant continuement de la position du point. On considère un contact ponctuel entre deux solides appartenant à $\mathcal{S}$ (par exemple (S_1) et (S_2)) et on appelle $\vec{V}_g$ la vitèsse de glissement de (S_2) par rapport à (S_1). On suppose que les actions de contact de (S_2) sur (S_1) se réduisent à un vecteur unique $\vec{R}$ qu'on projette sur la normale commune à S_1 et S_2 suivant le vecteur $\vec{N}$ et sur le plan tangent commun suivant le vecteur $\vec{T}$.

Montrer que, dans un mouvement quelconque du système, la puissance des forces de contact entre (S_1) et (S_2) est nulle dans les trois cas suivants, dont les deux premiers sont classiques :

1. Contact sans glissement;
2. Contact sans frottement;
3. La nature des surfaces en contact permet de supposer qu'à chaque instant les vecteurs $\vec{V}_g$ et $\vec{T}$ sont orthogonaux.

Ces résultats peuvent-ils être étendus, sans restriction, au cas d'un contact entre un solide (S_i) et un obstacle (Σ_j) ?

L'objet du problème est l'étude du troisième cas. On dira qu'une surface S est *rainurée* s'il existe une famille de courbes (Γ) tracées sur S telle que par chaque point de S (à l'exception peut-être d'un nombre fini de points singuliers) passe une courbe (Γ) et une seule et telle que les propriétés suivantes soient satisfaites :

a. La vitesse de glissement est tangente à la courbe (Γ) passant par le point de contact.

b. Il existe une condition de « non frottement le long des rainures » traduite par le fait que $\vec{T}$ reste orthogonal à (Γ).

PARTIE I

1° On étudie les mouvements d'une sphère (S) homogène, de rayon a, de centre C, de masse m, pesante, au contact d'un plan (P) incliné de l'angle α $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ sur le plan horizontal. Le plan (P), fixe, est rainuré suivant une famille de droites parallèles et on choisit dans (P) deux vecteurs unitaires $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$ fixes et orthogonaux, dont le premier est parallèle aux rainures. On complète par le vecteur $\vec{k}_1$ orthogonal à (P) pour définir le repère fixe O, $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$, $\vec{k}_1$ par rapport auquel on étudiera le mouvement de (S) dans les trois cas suivants :

a. Les rainures sont horizontales;

b. Les rainures sont dirigées suivant la ligne de pente de (P);

c. Les rainures sont dirigées suivant la direction faisant dans le plan (P) l'angle β avec les horizontales. On précisera dans ce cas la direction asymptotique de la courbe décrite par C.

2° On considère maintenant le cas où le plan (P) est horizontal ($\alpha = 0$) et fixe, et on étudie les mouvements de la sphère (S) définie à la question précédente au contact de (P). L'une des deux surfaces P ou S est rainurée, les rainures pouvant être des courbes quelconques. Soit A le point géométrique de contact de S et de P (qui est la projection de C sur P). Comparer le moment dynamique de la sphère (S) par rapport au point A avec la dérivée par rapport au temps du moment cinétique par rapport à ce même point A. En déduire trois intégrales premières pour le mouvement de (S). Montrer que la vitesse de glissement reste constante en module.

(On pourra utiliser cette question dans la suite, mais on pourra aussi aborder indépendamment les questions suivantes.)

3° On étudie les mouvements de la sphère (S) au contact avec le plan (P), horizontal, fixe et rainuré. On désigne par O, i_1, j_1, k_1 un repère fixe orthonormé, O, $\vec{i_1}$, $\vec{j_1}$ définissant le plan (P). Les paramètres à utiliser sont : les coordonnées polaires ρ, θ de la projection A de C sur P, et les composantes p, q, r de la rotation instantanée de (S) sur le repère mobile, O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k_1}$ déduit de O, $\vec{i_1}$, $\vec{j_1}$, $\vec{k_1}$ par la rotation d'angle θ et d'axe $\vec{k_1}$.

Former les équations du mouvement de (S) dans les deux cas suivants :

a. Les rainures sont les droites de P passant par O.

b. Les rainures sont les cercles de P centrés en O.

Dans le cas *a.* on écrira l'équation différentielle qui définit les variations de ρ en fonction du temps. On montrera qu'on peut exprimer t, ρ puis les autres paramètres explicitement en fonction de $\dot{\rho} = x$ considéré comme une variable indépendante.

Dans le cas *b.* on ramènera le problème à la résolution d'une équation du type $\dot{\rho}^2 = F(\rho)$; on montrera que C décrit une conique dont on précisera le paramètre et l'excentricité en fonction de la vitesse initiale de glissement v_0, de la constante des aires k et de la vitesse initiale V_1 de C.

4° On étudie les mouvements sur le plan horizontal fixe (P), lisse, d'une sphère (S) de mêmes caractéristiques que la précédente, mais rainurée. Le repère fixe est le même que dans la question précédente. Les paramètres à utiliser sont : les coordonnées cartésiennes x, y de la projection A de C sur P, les angles d'Euler ψ, θ, φ définissant la position d'un repère C, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lié à la sphère par rapport à O, $\vec{i_1}$, $\vec{j_1}$, $\vec{k_1}$. Soit Cz le troisième axe de ce repère. Former les équations du mouvement de (S) dans les deux cas suivants :

a. (S) est rainurée suivant les parallèles, c'est-à-dire les cercles ayant pour axe Cz;

b. (S) est rainurée suivant les méridiens, c'est-à-dire les grands cercles dont le plan contient Cz.

On introduira les composantes r et r_1 de la rotation instantanée de (S) respectivement sur $\vec{k}$ et sur $\vec{k_1}$.

Dans le cas *a.* on ramènera le problème à la résolution d'une équation du type $\dot{\theta}^2 = G(\theta)$ qu'on discutera en fonction de la valeur initiale de la vitesse de glissement v_0 et des valeurs initiales de r et de r_1.

Dans le cas *b.* on formera l'équation différentielle définissant les variations de θ en fonction du temps.

PARTIE II

1° Le système $\mathcal{S}$ est repéré par N paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_N$ soumis à des liaisons non holonômes de la forme :

$$(1) \qquad f_j(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, t) \equiv \sum_{i=1}^{N} a_{ij}\dot{q}_i + a_j = 0$$

où les a_{ij} et les a_j sont des fonctions des N + 1 variables $q_1, \ldots, q_N, t$.

Montrer que les conditions cinématiques imposées par le fait que certaines surfaces S_i et Σ_j de l'introductio soient rainurées sont de la forme (1).

Les liaisons (1) sont dites « satisfaisant à la condition des puissances virtuelles » si la puissance virtuelle de forces de liaison est nulle pour tout champ de vitesses virtuelles compatible avec les liaisons telles qu'elles existe à l'instant t. Montrer que la condition des puissances virtuelles est satisfaite en présence des hypothèses *a.* et *b.* d l'introduction, et ceci aussi bien dans le cas de contacts entre solides appartenant au système $\mathcal{S}$ que de contac avec des obstacles fixes ou mobiles.

En tirer une conclusion quant à l'utilisation de la méthode des multiplicateurs de Lagrange à un systèm comportant des surfaces rainurées.

2° On se place pour cette question dans le cas particulier où :

a. Les relations (1) sont homogènes, c'est-à-dire $a_j = 0$;

b. Il existe une fonction de force U, indépendante du temps, pour l'ensemble des forces exercé sur le système autres que les actions de contact déjà envisagées;

c. L'expression de l'énergie cinétique E est homogène par rapport aux dérivées $\dot{q}_i$ des paramètr

Retrouver à partir des équations de Lagrange avec multiplicateurs l'intégrale première de l'énergie sous la forme $E = U + h$ (h = constante).

3° On abandonne les hypothèses du paragraphe précédent, à l'exception de l'existence d'une fonction de force U, mais qui peut maintenant dépendre du temps. A quelles conditions peut-on obtenir à partir des équations de Lagrange avec multiplicateurs une intégrale première du type de Painlevé?

Application : on reprend la situation étudiée au 3° cas *a.* de la première partie, mais en supposant que le plan (P), rainuré suivant les droites passant par O, est animé d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire constante ω autour de Oz_1, axe passant par O et de vecteur unitaire $\overrightarrow{k_1}$. Étudier le mouvement de la sphère (S).

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

NOTATIONS ET RAPPELS

1° Pour tout entier $n \geqslant 1$ on désignera par Σ_n l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Chaque fois que l'on aura à utiliser une propriété de Σ_n, on l'énoncera avec soin, mais on ne la démontrera pas.

2° Soit $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; on notera Φ^s l'application symétrisée de Φ définie par :

$$(x_1, \ldots, x_n) \rightsquigarrow \frac{1}{n!} \sum_{\Pi \in \Sigma_n} \Phi(x_{\Pi(1)}, \ldots, x_{\Pi(n)}).$$

Φ sera dite symétrique si elle est identique à sa symétrisée.

3° On considérera sur $\mathbb{R}^n$ le produit scalaire usuel défini par

$$< x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{pour tous} \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \quad \text{et} \quad y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Une application linéaire A de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même sera dite unitaire si elle conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$< A(x), A(y) > = < x, y > \quad \text{pour tout} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$\mathbb{R}^n$ sera muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}^n$.

4° Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé ; l'expression « variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ » signifiera :

— soit une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$;
— soit une classe d'équivalence relativement à P de telles applications.

On notera P_X la loi d'une variable aléatoire X.

Sauf mention explicite, chaque fois qu'on considérera une famille de variables aléatoires, on les supposera définies sur un même espace $(\Omega, \mathcal{F})$.

Si X est une variable aléatoire réelle intégrable on désignera par $E\{X\}$ son espérance mathématique et $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ désignera l'espace des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ intégrables (c'est un ensemble de P-classes d'équivalence).

5° Si $\mathcal{G}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$, on désignera par P_g la restriction de P à $\mathcal{G}$. Si $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on notera $E\{X \mid \mathcal{G}\}$ l'espérance conditionnelle de X relativement à $\mathcal{G}$. C'est l'unique élément de $L^1(\Omega, \mathcal{G}, P_g)$ défini par :

$$E\{XY\} = \int E\{X \mid \mathcal{G}\}.\,Y\,dP_g \quad \text{pour toute} \quad Y \in L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, P_g).$$

Si $\mathcal{G}$ est la tribu engendrée par une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, on notera $E\{X \mid Z\}$ au lieu de $E\{X \mid \mathcal{G}\}$, et $E\{X \mid Z = .\}$ désignera l'unique élément de $L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P_Z)$ tel que pour toute $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ borélienne bornée on ait :

$$E\{X g(Z)\} = \int_{\mathbb{R}^n} E\{X \mid Z = z\}\, g(z)\, P_Z(dz).$$

6° Une famille $(X_i)_{i \in I}$ de variables aléatoires réelles est dite indépendante conditionnellement à la sous-tribu $\mathcal{G}$, si pour tout sous-ensemble fini J de I et toute famille $(f_j)_{j \in J}$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ boréliennes bornées on a :

$$E\left\{\prod_{j \in J} f_j(X_j) \mid \mathcal{G}\right\} = \prod_{j \in J} E\{f_j(X_j) \mid \mathcal{G}\}.$$

Cette famille est dite de même loi conditionnellement à $\mathcal{G}$ si pour toute $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne bornée $E\{f(X_i) \mid \mathcal{G}\}$ ne dépend pas de i dans I.

7° Le candidat pourra utiliser dans la suite le résultat suivant :

Soit $(\mathcal{G}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille décroissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$ et soit $\mathcal{G}_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n$. Pour toute $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on a $\lim_{n \to \infty} E\{Y \mid \mathcal{G}_n\} = E\{Y \mid \mathcal{G}_\infty\}$ au sens de la convergence presque sûre.

8° On rappelle enfin que la fonction Γ est définie pour $x > 0$ par

$$x \rightsquigarrow \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt.$$

9° $\mathbb{N}^*$ désignera l'ensemble des entiers strictement positifs.

$\mathbb{R}_+^*$ désignera l'ensemble des réels strictement positifs.

PRÉLIMINAIRES

1° Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ n variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

Soit $\mathcal{G} = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ la tribu engendrée par ces variables.

Soient Z et $\tilde{Z}$ deux variables aléatoires réelles telles que

a. $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\tilde{Z} \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P_g)$;

b. Pour tout n-uple $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ de fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ mesurables bornées on ait :

$$E\{Z.f_1(X_1) \ldots f_n(X_n)\} = E\{\tilde{Z}.f_1(X_1) \ldots f_n(X_n)\}$$

Comparer $\tilde{Z}$ et $E\{Z \mid \mathcal{G}\}$.

2° À quelle condition les $(X_i)_{i \in I}$ sont-elles indépendantes conditionnellement à la tribu $\{\varnothing, \Omega\}$?

À quelle condition sont-elles indépendantes conditionnellement à $\mathcal{F}$?

I

Un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$: $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ est dit *échangeable* si pour toute $\Pi \in \Sigma_n$ il a même loi que le vecteur $X_\Pi = (X_{\Pi(i)})_{1 \leq i \leq n}$. On dira également que les n-variables aléatoires réelles $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ sont échangeables.

1° Soit U une variable aléatoire réelle telle que U et $(-U)$ ont même loi. Montrer que le vecteur aléatoire $(U, -U)$ est échangeable.

2° On suppose que la loi du vecteur échangeable $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Que peut-on dire de la densité de cette loi ?

3° Soient $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ des variables aléatoires indépendantes ayant toutes pour loi la loi uniforme sur $[0, 1]$. Soit $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ une statistique d'ordre pour les U_i ; c'est-à-dire que les Y_i sont des variables aléatoires réelles telles que

— $\forall \omega \quad Y_1(\omega) \leq Y_2(\omega) \dots \leq Y_n(\omega)$;

— $\forall \omega$ l'ensemble $\{Y_1(\omega), \dots Y_n(\omega)\}$ est identique à l'ensemble $\{U_1(\omega), \dots U_n(\omega)\}$.

(On admettra l'existence des Y_i.)

On pose $Y_0(\omega) = 0 \; \forall \omega$ et pour $i = 1, 2, \dots, n$, on pose $X_i = Y_i - Y_{i-1}$. Démontrer que les $X_i \; (i = 1, 2, \dots, n)$ sont échangeables.

4° Montrer que, s'il existe une sous-tribu $\mathcal{G}$ telle que, conditionnellement à $\mathcal{G}$, les variables aléatoires $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ soient indépendantes et de même loi, alors les X_i sont échangeables.

Dans toute la suite de cette partie, on supposera que le vecteur aléatoire X *est échangeable.*

5° Soient J et K deux parties de $\{1, 2, \dots, n\}$ de même cardinal.

Que peut-on dire des vecteurs aléatoires $(X_j)_{j \in J}$ et $(X_k)_{k \in K}$?

6° On suppose que la variable aléatoire X_1 n'est pas presque sûrement égale à une constante et qu'elle est de carré intégrable. Exprimer la variance de la variable $\sum_{j=1}^{n} X_j$ au moyen de n, de la variance σ^2 de X_1 et du coefficient de corrélation b de X_1 et X_2.

En déduire l'inégalité $b \geq -\dfrac{1}{n-1}$.

7° Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes (au sens large) et telles que $E\{f(X_1)\,g(X_1)\}$ et $E\{f(X_1)\,g(X_2)\}$ existent. Démontrer que pour tout couple (j, k) d'éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$:

$$E\{f(X_j)\,g(X_k)\} \leq E\{f(X_j)\,g(X_j)\}.$$

8° Soit Φ une fonction borélienne de $\mathbb{R}_n$ dans $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de $E\{\Phi(X)\}$ et $E\{\Phi^s(X)\}$?

II

Le vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ est dit à *symétrie sphérique* en loi si, pour tout opérateur unitaire A sur $\mathbb{R}^n$, les vecteurs X et A (X) ont même loi. On omettra dans la suite le terme « en loi ».

1° Démontrer que tout vecteur à symétrie sphérique est échangeable.

La réciproque est-elle vraie ?

2° Énoncer une condition nécessaire et suffisante portant sur la fonction caractéristique du vecteur aléatoire X pour que celui-ci soit à symétrie sphérique.

3° Si $\sigma > 0$, on désignera par $\mathcal{N}_\sigma$ la loi gaussienne réelle centrée de variance σ. $\mathcal{N}_0$ désignera la mesure de Dirac sur $\mathbb{R}$ au point zéro.

On suppose qu'il existe une variable aléatoire réelle V, presque sûrement positive ou nulle telle que, pour tout $i = 1, 2, \dots, n$ pour toute $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne bornée, la fonction de $[0, \infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\sigma \rightsquigarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathcal{N}_\sigma(dx)$$

soit un représentant de $E\{f(X_i) \mid V = .\}$. Montrer que, si les X_i sont indépendantes conditionnellement à V, X est à symétrie sphérique.

4° Soit $Y = (Y_1, Y_2)$ un vecteur aléatoire dont la loi est uniformément répartie sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$: $\{z ; \|z\| = 1\}$.

Montrer que X est à symétrie sphérique. Y satisfait-elle aux hypothèses de la question 3° ?

5° Soient $V, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes, les Y_i ayant la loi $\mathcal{N}_\sigma$ $(\sigma > 0)$ et la loi de V ayant la densité suivante (par rapport à la mesure de Lebesgue) :

$$x \leadsto \frac{\exp\left(-\frac{x}{2\sigma}\right) x^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)(2\sigma)^{\frac{m}{2}}} 1_{\mathbb{R}_+^*}(x) \qquad (m > 0).$$

Montrer que le vecteur aléatoire $X = (X_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ tel que $X_j = \frac{Y_j}{\sqrt{V}}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ est à symétrie sphérique.

Expliciter la loi du vecteur $(X_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$. On appellera $\mathcal{C}_n^m$ cette loi.

6° Les notations restant celles de la question ci-dessus, que peut-on dire des variables aléatoires

$$X' = (X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}) \quad \text{et} \quad U_n = \frac{X_n}{\sqrt{1 + \sum_{j=1}^{n-1} X_j^2}} \ ? \qquad (n \geqslant 2).$$

III

On désignera par Σ' l'ensemble des permutations de $\mathbb{N}^*$, et pour tout n entier naturel $\geqslant 1$, on désignera par Σ'_n l'ensemble de celles qui laissent invariants les entiers k tels que $k > n$.

Soit $X = (X_k)_{1 \leqslant k < \infty}$ une suite de variables aléatoires réelles.

Une variable aléatoire réelle Y est dite *n-symétrique* relativement à X (ou simplement n-symétrique quand aucune confusion n'est possible) s'il existe $g : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, mesurable relativement à la tribu produit $\mathcal{B}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{B}^1$, telle que $Y = g \circ X$ et telle que les variables aléatoires $g(X)$ et $g(X_\Pi)$ sont p. s. égales pour toute $\sigma \in \Sigma'_n$.

(On rappelle que si $\Pi \in \Sigma'$: $X_\Pi = (X_{\Pi(n)})_{n \geqslant 1}$.)

On désigne par $(\mathcal{G}_n)$ la suite (décroissante en n) des tribus engendrées par les variables aléatoires n-symétriques.

La suite X est dite échangeable si pour tout $n > 1$, les vecteurs aléatoires $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont échangeables.

Dans toute cette partie on supposera que la suite X est échangeable.

1° On suppose que X_1 est non presque sûrement constante et que $E\{X_1^2\} < \infty$. Donner une borne inférieure non triviale du coefficient de corrélation de X_1 et X_2.

2° Soit $g : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ mesurable et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne.

Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ soit Π_j la permutation de $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\Pi_j(k) = k \text{ si } j \neq k \text{ et } k \neq 1, \quad \text{et} \quad \Pi_j(1) = j, \quad \Pi_j(j) = 1.$$

Comparer, lorsqu'elles existent, les quantités $E\{f(X_1)\, g(X)\}$ et $E\{f(X_j)\, g(X_{\Pi_j})\}$.

3° Soit Y une variable aléatoire réelle n-symétrique et bornée.

On suppose que $E\{|f(X_1)|\} < \infty$. Comparer d'abord les quantités :

$$\mathrm{E}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\mathrm{X}_j)\,.\,\mathrm{Y}\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{E}\{f(\mathrm{X}_j)\,.\,\mathrm{Y}\}.$$

Comparer ensuite les variables aléatoires

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\mathrm{X}_j) \quad \text{et} \quad \mathrm{E}\{f(\mathrm{X}_1)\,|\,\mathcal{G}_n\}.$$

4° Soit $\mathcal{G} = \bigcap_{n \geqslant 1} \mathcal{G}_n$. Démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\mathrm{X}_j) = \mathrm{E}\{f(\mathrm{X}_1)\,|\,\mathcal{G}\} \text{ presque sûrement.}$$

Démontrer que, conditionnellement à $\mathcal{G}$, les variables aléatoires X_i, $_{i\in\mathbb{N}^*}$ ont même loi.

5° Soit maintenant f une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}$ ($k \geqslant 1$). Si $n \geqslant k$, on désignera pas $\mathcal{A}_n^k$ l'ensemble des arrangements des indices $\{1, 2, \ldots, n\}$ pris k à k et par A_n^k le cardinal de cet ensemble. Démontrer que l'on a presque sûrement :

$$\frac{1}{\mathrm{A}_n^k} \sum_{(j_1, \ldots, j_k) \in \mathcal{A}_n^k} f(\mathrm{X}_{j_1}, \ldots, \mathrm{X}_{j_k}) = \mathrm{E}\{f(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_k)\,|\,\mathcal{G}_n\}.$$

6° En déduire que, presque sûrement :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} \sum_{j_1=1}^{n}, \sum_{j_2=1}^{n}, \ldots, \sum_{j_k=1}^{n} f(\mathrm{X}_{j_1}, \mathrm{X}_{j_2}, \ldots, \mathrm{X}_{j_k}) = \mathrm{E}\{f(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_k)\,|\,\mathcal{G}\}.$$

7° Démontrer que, conditionnellement à $\mathcal{G}$, les variables X_i, $i \in \mathbb{N}^*$ sont indépendantes.

IV

Pour résoudre cette partie le candidat pourra admettre les deux résultats suivants :

A

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et $\mathcal{H}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

Soit ξ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Il existe alors une fonction $(\omega, \mathrm{A}) \rightsquigarrow \mathrm{P}_\xi^{\mathcal{H}}(\omega, \mathrm{A})$ de $\Omega \times \mathcal{B}^n$ dans $[0, 1]$ telle que

i. $\forall\, \omega \in \Omega$, $\mathrm{P}_\xi^{\mathcal{H}}(\omega, .)$ est une probabilité sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$.

ii. $\forall\, \mathrm{A} \in \mathcal{B}^n$, $\mathrm{P}_\xi^{\mathcal{H}}(., \mathrm{A})$ est $\mathcal{H}$-mesurable.

iii. Quelle que soit la fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, borélienne bornée, la fonction $\omega \rightsquigarrow \int f(x)\, \mathrm{P}_\xi^{\mathcal{H}}(\omega, dx)$ (dont on démontre facilement la mesurabilité) est un représentant pour la $\mathrm{P}_{\mathcal{H}}$-équivalence de $\mathrm{E}\{f(\xi)\,|\,\mathcal{H}\}$. $\mathrm{P}_\xi^{\mathcal{H}}$ est appelée une version régulière de la loi conditionnelle de ξ par rapport à $\mathcal{H}$.

B

Les seules fonctions $\mathrm{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues, telles que $\mathrm{F}(0) = 1$ et telles que

$$\mathrm{F}\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right) = \mathrm{F}(u)\,\mathrm{F}(v) \quad \forall\,(u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

sont les fonctions $t \rightsquigarrow F(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda t^2\right)$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.

Soit alors $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite échangeable et $\mathcal{H}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ telle que, conditionnellement à $\mathcal{H}$ les X_k soient indépendantes et de même loi. Soit $P^{\mathcal{H}}_{X_1}$ une version régulière de la loi conditionnelle de X_1 par rapport à $\mathcal{H}$.

1° Soit $t \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \Omega$; on pose :

$$F(t, \omega) = \int_{\mathbb{R}} \exp(itx)\, P^{\mathcal{H}}_{X_1}(\omega, dx) \quad (i \in \mathbb{C} : i = (0,1)).$$

Soit $n \geq 1$ et soit $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Démontrer que l'application $\omega \rightsquigarrow \prod_{j=1}^{n} F(t_j, \omega)$ est un représentant de $E\left\{\exp\left(i\sum_{j=1}^{n} t_j X_j\right) \mid \mathcal{H}\right\}$.

En déduire une expression de la fonction caractéristique de la variable aléatoire réelle $\sum_{j=1}^{n} t_j X_j$.

La suite $X = (X_n)_{n \geq 1}$ est dite à symétrie sphérique si, pour tout $n \geq 1$, le vecteur aléatoire $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est à symétrie sphérique. *Dans toute la suite, on supposera* X *à symétrie sphérique.*

2° Démontrer que, pour tout n, l'expression

$$E\left\{\prod_{j=1}^{n} F(t_j, \omega)\right\} \quad \text{(les } t_j \text{ étant réels) ne dépend que de } \sum_{j=1}^{n} t_j^2.$$

3° Soient u et v deux réels et $t = \sqrt{u^2 + v^2}$. Calculer :

$$E\{|F(t, \omega) - F(u, \omega)F(v, \omega)|^2\};$$

et en déduire :

$$P\{\omega ; F(t, \omega) = F(u, \omega)F(v, \omega)\}.$$

4° Démontrer que, pour presque tout ω :

$$F(\sqrt{u^2 + v^2}, \omega) = F(u, \omega)F(v, \omega) \qquad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

En déduire l'existence d'une variable aléatoire U réelle telle que

$$F(t, \omega) = \exp\left(-\frac{1}{2}U(\omega)t^2\right) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

5° Démontrer que U est $\mathcal{H}$-mesurable et que, presque sûrement :

$$E\left\{\exp\left(i\sum_{j=1}^{n} t_j X_j\right) \mid U\right\} = \prod_{j=1}^{n} \exp\left(-\frac{1}{2}U t_j^2\right).$$

Démontrer que, conditionnellement à U, les variables aléatoires X_k, $k \in \mathbb{N}^*$ sont indépendantes et de même loi. Expliciter une version régulière de la loi conditionnelle de X_1 par rapport à la tribu engendrée par U.

6° En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ soit à symétrie sphérique.

7° Démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} X_j^2$ existe presque sûrement. Comparer cette limite à U.

8° Démontrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est à symétrie sphérique si et seulement s'il existe une probabilité μ sur $[0, \infty[$ ayant la propriété suivante :

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $F(t) = \int_{[0,\infty[} \exp(-xt^2)\, d\mu(x)$; alors $\forall n \geq 1$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \rightsquigarrow F\left(\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2}\right)$ est la fonction caractéristique du vecteur aléatoire $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Ce résultat subsiste-t-il pour un vecteur aléatoire $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ à symétrie sphérique ?

9° Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables réelles indépendantes ayant la même loi $\mathcal{N}_\sigma$ $(\sigma > 0)$ et soit V une variable aléatoire réelle indépendante des Z_n et ayant pour loi :

$$x \rightsquigarrow \frac{\exp\left(-\dfrac{x}{2\sigma}\right) x^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)(2\sigma)^{\frac{m}{2}}} 1_{\mathbb{R}_+^*}(x)\,.\,dx.$$

Que peut-on dire de la suite de variables aléatoires définie par $U_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{Z_j^2}{V}$ $(n \geq 1)$.

10° Soit $m \in \mathbb{N}^*$; on considère une suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de lois respectives $\mathcal{C}_1^{n+m-1}$ (voir partie II, question 4°).

On définit la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ par $X_1 = Y_1$ et par la relation de récurrence :

$$X_{n+1} = Y_{n+1} \sqrt{1 + \sum_{j=1}^{n} X_j^2}.$$

Montrer que $\frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} X_j^2$ converge presque sûrement. Quelle est la loi de cette limite ?

11° Avec les mêmes notations, démontrer que $\frac{1}{n} \prod\limits_{j=1}^{n} (1 + Y_j^2)$ converge presque sûrement.

RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE NUMERIQUE

I.— Thème du sujet

Le thème du problème est d'étudier la résolution numérique du problème P de solution u introduit dans V. Une interprétation "classique" de P est donné dans Q.14c (problème R).

On introduit pour cela un problème "voisin" P_h (de solution u_h), appartenant à un espace de dimension finie W_h.

Le but du problème est d'obtenir (par des méthodes de type "principe du maximum" une majoration de $||u-u_h||_{L^\infty(\Omega)}$ (Q.15) montrant que le calcul de u_h, qui se ramène à la résolution d'un système linéaire, donne une valeur numérique de la solution du problème P, lorsque h est assez petit. Pour cela, I fait établir quelques résultats préliminaires, II introduit les notions utiles sur les espaces de Sobolev intervenant dans la définition de (P), III introduit les espaces de dimension finie W_h, V_h intervenant dans la définition de P_h, IV qui est la partie essentielle introduit le problème P_h pour lequel on étudie des majorations a priori de la solution, enfin V introduit le problème P et fait établir des résultats comparant les solutions de P et P_h.

Naturellement aucune connaissance d'analyse numérique n'était nécessaire pour traiter le sujet. Les techniques utilisées portaient pour l'essentiel sur le calcul différentiel, l'intégration et les espaces L^p, la formule de Green, le théorème de représentation de Riesz et un peu d'algèbre linéaire.

II.— Observations générales

Le problème était difficile à résoudre en six heures, cela tient essentiellement à l'absence de programme spécifique pour cette épreuve et un certain nombre de résultats classiques ont dû être établis dans le problème : Q.1, partie II et espaces d'éléments finis V_h et W_h de la partie III. Il a semblé aux correcteurs que les sujets liés à ces questions ont peu été étudiés (ou peu assimilés) dans le cadre des préparations à l'agrégation. La plupart des candidats n'ont pu dépasser Q.7. Dans seulement quelques copies sont abordées Q.9 et Q.14a. Enfin seulement deux copies ont abordé largement la partie IV et ont bénéficié de la note maximum. Tout candidat ayant traité correctement le I a obtenu une note > 20.

Des erreurs graves ont été retrouvées dans un grand nombre de copies, en particulier :

1) L'utilisation d'une formule de Taylor (à 2 variables) suggérée en Q.1c a mis en évidence une ignorance surprenante de cette formule ; notons qu'une remarque voisine a déjà été faite dans le rapport 1978.

2) Le théorème de Fubini (utilisé dans Q.5a) semble très mal connu de la plupart des candidats l'ayant utilisé. Dans la même question, de nombreux candidats n'hésitent pas à écrire une intégrale curviligne sur la frontière de $\mathcal{O}$, dont la seule propriété est d'être de mesure nulle.

Signalons enfin que peu de candidats semblent connaître les propriétés élémentaires des espaces de Banach $L^p(\mathcal{O})$ (inégalité de Hölder, dualité).

III.— Observations sur les questions traitées par les candidats et indications succinctes sur leur solution

Q.1-a : Cette question facile n'a pas toujours été résolue et a donné lieu à beaucoup de verbiage. Il faut préciser clairement que les λ_i sont solution d'un système linéaire de Cramer, dont la matrice ne dépend que des points A_i.

Q.1-b : Les résultats s'obtiennent immédiatement en remarquant que puisque $\lambda_i(M) \in P_1$, pour tout M,N dans $\mathbb{R}^2$:

$$D\lambda_i(\overrightarrow{MN}) = \lambda_i(N)-\lambda_i(M)$$

Q.1-c : La 2e majoration n'a jamais été établie correctement. Il suffisait pour les deux majorations d'utiliser (par exemple) la formule de Taylor (valable pour $M \in T$)

$$u(A_i) = u(M) + D_M u(\overrightarrow{MA_i}) + \frac{1}{2} D^2_{M_i} u(\overrightarrow{MA_i},\overrightarrow{MA_i})$$

où M_i appartient au segment ouvert $]MA_i[$.

Pour obtenir la première majoration on multiplie les deux membres par $\lambda_i(M)$ et on ajoute en tenant compte de : $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i(M)\ D_M u(\overrightarrow{MA_i}) = 0$.

Pour la majoration des dérivées, on calcule par cette formule de Taylor

$$\sum_{i=1}^{3} u(A_i)\ D\lambda_i \quad \text{et on vérifie que} \quad \sum_{i=1}^{3} D\lambda_i = 0$$

$$\text{et que} \quad \sum_{i=1}^{3} D_M u(\overrightarrow{MA_i})\ D\lambda_i = D_M u$$

en vérifiant que les deux formes linéaires prennent les mêmes valeurs pour $\overrightarrow{MA_j}$ $(j=1,2,3)$ qui forment un système de générateurs de $\mathbb{R}^2$.

Q.2-a : Il suffit de majorer en utilisant

$$\langle \mathrm{grad}\lambda_i, \mathrm{grand}\lambda_j \rangle \leqslant \sigma_o\ |D\lambda_i|^*\ |D\lambda_j|^*$$

$$\lambda_i(x)\lambda_j(x) \leqslant 1$$

et de <u>minorer</u> $|D\lambda_i|^*$ par $\frac{1}{h(T)}$ (car $\sigma_o < 0$).

On peut prendre alors $h_o = \sqrt{-\sigma_o}$

Q.2-b : a été assez peu abordé, l'essentiel est de vérifier que grad λ_i est orthogonal au côté opposé au sommet A_i et de <u>préciser son sens</u>.

Q.3-b : Cette question utilise le changement de variables auquel invite Q.3-a, et aussi l'inégalité $(\sum_{i=1}^{3} a_i)^p \geqslant \sum_{i=1}^{3} a_i^p$ avec $a_i \geqslant 0$ $(p \geqslant 1)$ qui n'a été établie en général que pour p entier (ce qui n'est pas le cas).

Q.4 : donnait lieu à une récurrence sans surprise en utilisant dans l'hypothèse $\ell = k_s$ et $k = k_{s-1}$, néanmoins beaucoup de candidats n'ont pu résoudre cette question.

Q.5-a : Cette question a permis de constater des lacunes importantes concernant la théorie de l'intégrale de Lebesgue (cf. observations générales).

On doit vérifier $u \in L^p(\sigma)$ (ce qui est à justifier)

$$\text{et} \qquad \forall \Phi \in \mathcal{D}(\sigma) \qquad \int_\sigma u \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = - \int_\sigma \frac{\partial u}{\partial x_i}\ \Phi$$

$$\text{soit} \quad \forall \Phi \in \mathcal{D}(\sigma) \qquad \int_\sigma \frac{\partial}{\partial x_i} (u\Phi) = 0$$

Il suffit alors de prolonger à $\mathbb{R}^2$ Φ par 0 et u par un élément de $C^0(\mathbb{R}^2)$ pour appliquer le théorème de Fubini.

Q.5-b : On se ramène à vérifier que si pour $u \in L^p(\sigma)$

$$\forall \Phi \in \mathcal{D}(O) \qquad \int_\sigma u \, \Phi \, dx = 0 \qquad \text{alors} \quad u = 0 .$$

La méthode suggérée (densité de $\mathcal{D}(\sigma)$ dans $L^q(\sigma)$) est de considérer la forme linéaire

$$v \longrightarrow \int_\sigma u \, v \, dx$$ définie et continue sur $L^q(\sigma)$ d'après l'inégalité de Holder

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et d'utiliser par exemple la dualité entre L^p et L^q.

Rappelons ici que les résultats ci-dessus font partie du programme officiel d'analyse, mais que la théorie des distributions n'en fait pas partie. De plus, les candidats ayant essayé d'utiliser cette théorie, n'ont souvent réussi qu'à montrer leur ignorance sur ce sujet.

Q.5-d : La plupart des candidats ayant abordé cette question ont remarqué que si (u_n) est une suite de Cauchy dans $W^{1,p}(\Omega)$ (u_n) et $(\partial_i u_n)$ sont des suites de Cauchy donc convergentes dans $L^p(\sigma)$, vers u et v_i respectivement ; il fallait alors vérifier (ce qui a été beaucoup moins abordé) que v_i est la dérivée généralisée de u, soit

$$(1) \qquad \forall \Phi \in \mathcal{D}(O) \qquad \int_\sigma u \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = - \int_\sigma v_i \, \Phi$$

Il suffit alors de faire tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité :

$$\forall \Phi \in \mathcal{D}(O) \qquad \int_\sigma u_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = - \int_\sigma \partial_i \, u_n \, \Phi$$

pour obtenir (1).

Vérifions par exemple que $\lim\limits_{n \to \infty} \int_\sigma (u-u_n) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0$

l'inégalité de Holder permet d'écrire :

$$\left|\int_{\sigma} (u-u_n) \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right| \leqslant \|u-u_n\|_{L^p(\sigma)} \left\|\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right\|_{L^q(\sigma)} \quad (\frac{1}{q} + \frac{1}{q} = 1)$$

Le passage à la limite a donné lieu aussi à des utilisations abusives du théorème de la convergence dominée.

Q.6 : a donné lieu à beaucoup d'erreurs. Il fallait vérifier les points suivants :

Soit $u_n \in W_o^{1,p}(\sigma)$

avec $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ dans $W^{1,p}(\sigma)$

On doit vérifier : $u \in W_o^{1,p}(\sigma)$

Soit $\tilde{u}_n$ (resp. $\tilde{u}$) le prolongement par 0 de u_n (resp. u) en dehors de σ.

Alors $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ et $\tilde{u}_n$ est de Cauchy dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$, le point essentiel étant de vérifier que : $\partial_i \tilde{u}_n$ est le prolongement par 0 de $\partial_i u_n$ en dehors de σ.

Alors $\tilde{u}_n$ converge vers v dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$, il suffit alors de vérifier que $v = \begin{cases} u & \text{dans } \sigma \\ 0 & \text{dans le complémentaire de } \sigma \end{cases}$.

Q.7-a : La construction de W_i se fait de la façon suivante :

Soient $T_1, T_2 \dots T_k$ les triangles de τ_h ayant pour sommet le point b_i, on pose

$$W_i(x) = \lambda_i^{T_\alpha}(x) \qquad x \in T_\alpha \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant k.$$

$$W_i(x) = 0 \qquad \text{dans les autres triangles de } \tau_h.$$

W_i vérifie bien la propriété d'interpolation, il reste à vérifier que $W_i \in C^o(\overline{\Omega})$ ce qui se ramène à vérifier :

- la continuité sur les côtés communs à 2 triangles de τ_h, la continuité à l'intérieur d'un triangle étant assurée ;
- l'existence d'un prolongement de W_i appartenant à $C^o(\mathbb{R}^2)$ (ceci a été très souvent omis).

Q.7-c : Il est faux que $W_h \subset C^1(\overline{\Omega})$ comme beaucoup de candidats l'ont affirmé, on ne peut donc se contenter d'utiliser Q.5-a. Cette question n'a été traitée que dans peu de copies.

Il suffit de vérifier que $\omega_k \in W^{1,p}(\Omega)$

. $\omega_k \in C^0(\overline{\Omega})$ donc est dans $L^p(\Omega)$

. La fonction égale à $\dfrac{\partial \omega_k}{\partial x_i}$ à l'intérieur de chaque triangle de τ_h définit un élément de $L^p(\Omega)$ qui est la dérivée généralisée de ω_k. En effet :

$$\forall \Phi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \int_\Omega \omega_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \sum_{T \in \tau_h} \int_T \omega_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

On utilise alors la formule de Green suivante :

$$\int_T \omega_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = -\int_T \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} \Phi + \int_{\partial T} \omega_k \Phi \nu_i \, ds$$

où s désigne une abscisse curviligne convenable sur la frontière ∂T de T, ν_i le $i^{\text{è}}$ cosinus directeur de la normale extérieure à ∂T.

On obtient la conclusion en constatant que :

$$\sum_{T \in \tau_h} \int_{\partial T} \omega_k \Phi \nu_i \, ds = 0$$

en décomposant la somme ci-dessus en une somme d'intégrales curvilignes sur les côtés des triangles de τ_h. On constate que sur un côté donné ou bien $\Phi = 0$, ou bien on obtient 2 intégrales opposées, selon que ce côté appartient ou non à Γ.

Des idées analogues permettent de montrer que $V_h \subset W_0^{1,p}(\Omega)$.

Q.9 : Peu de candidats se sont aperçus que P_h se ramène à un système linéaire de N équations à N inconnues $u_h(b_i)$ $(1 \leq i \leq N)$ dont l'unicité de la solution (qui est évidente) entraîne l'existence.

IV.— Les notes (sur 40)

Nombre de copies corrigées : 732

Moyenne des notes : 8,2

Répartition des notes :

0 à 4	5 à 9	10 à 14	15 à 19	20 à 24	25 à 29	30 à 34	35 à 40
359	115	101	75	42	23	7	10

RAPPORT SUR L'EPREUVE DE MECANIQUE

Le problème portait sur l'étude d'une liaison non classique satisfaisant à la condition des puissances virtuelles. La première partie pouvait être traitée à l'aide des théorèmes généraux, tandis que la seconde utilisait les méthodes analytiques.

Bien qu'on considère comme un poncif que les correcteurs se plaignent de la faiblesse des candidats, cette remarque ne peut être évitée ici : environ les trois quarts des copies sont d'un niveau très bas et même dans les autres, les fautes graves abondent, montrant des lacunes importantes.

L'introduction portait sur la distinction classique entre la puissance des forces intérieures (qui peut être évaluée dans n'importe quel repère) et celle des forces extérieures (qui dépend du repère). Dans le premier cas (forces exercées entre S_1 et S_2) on pouvait utiliser un repère lié par exemple à S_1, tandis que dans le deuxième cas (forces exercées entre un solide du système et un obstacle extérieur) on était amené à introduire une hypothèse supplémentaire (fixité de l'obstacle par rapport au repère de référence).

Dans la première question, il n'était pas indiqué d'employer les équations de Lagrange, mais si on le faisait, il fallait tenir compte du fait que les paramètres n'étaient pas indépendants (liaison non holonôme). La deuxième question a montré que beaucoup de candidats distinguaient mal la vitesse de glissement de la vitesse du point géométrique de contact A. Cette dernière était simplement $\vec{V}(A) = \vec{V}(C)$ et c'est ce qui permettait d'appliquer simplement le théorème du moment dynamique en A, où le moment des forces appliquées est nul. La vitesse de glissement étant $\vec{V}_g = \vec{V}(C) + \vec{\Omega} \wedge \vec{CA}$, on démontrait que le module de ce vecteur est constant en remarquant que sa dérivée est colinéaire à $\vec{T}$, puisque $m \frac{d\vec{V}(C)}{dt} = \vec{T}$ et que $I \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{CA} \wedge \vec{T}$.

Les questions 3° et 4° ont été assez peu abordées, mais en général seule la mise en équations est correcte. Au 3°, il était possible d'exprimer p et q à l'aide de ρ et de ses dérivées en tenant compte de la question précédente et le théorème de l'énergie conduisait à

$$\dot{\rho}^2 + \rho\ddot{\rho} - 4/7\, v_0 \dot{\rho} = Cte \qquad \text{dans le cas a)}$$

et $$\dot{\rho}^2 + k^2/\rho^2 - 4/7\, v_0 k = Cte \qquad \text{dans le cas b)} \quad (k = \rho^2\dot{\theta})$$

Dans la question 4°a) on obtenait les intégrales r = Cte et r_1 = Cte. il était donc possible d'évaluer $\dot{\varphi}$ et $\dot{\psi}$ en fonction de θ, tandis que la condition V_g = Cte jointe à la liaison permettait d'éliminer x et y dans l'équation de l'énergie. Dans le cas b), la condition r_1 = Cte était seule maintenue, mais il était possible d'éliminer $\dot{\varphi}$ entre l'équation $\ddot{\theta} + \dot{\varphi}\sin\theta\,(r_1 - \dot{\varphi}\cos\theta) = 0$ exprimant la conservation de $|\vec{V}_g|$ et l'équation de l'énergie pour retrouver une équation différentielle en θ.

La deuxième partie reprenait des résultats classiques de mécanique analytique dans le cas de surfaces rainurées. Il est curieux qu'elle n'ait été abordée que dans un dixième des copies environ, alors qu'elle était assez facile; contrairement au cas du préliminaire la puissance virtuelle des forces de liaison entre un solide du système et un obstacle était nulle même dans le cas d'obstacles mobiles puisque le mouvement virtuel du système satisfait aux liaisons "telles qu'elles existent à l'instant considéré". On pouvait donc écrire les équations de Lagrange sans faire intervenir cette puissance inconnue, mais il fallait bien sûr tenir compte au moyen de multiplicateurs des liaisons correspondantes entre les dérivées virtuelles $\dot{q}_i^*$ des q_i déduites de (1) sous la forme $\sum_{i=1}^{N} a_{ij}\, \dot{q}_i^* = 0$. Les questions 2° et 3° étaient destinées à préparer une application faisant intervenir un obstacle mobile, mais celle-ci n'a pas été abordée.

Pour conclure, il est apparu aux correcteurs que beaucoup de candidats n'ont pas suivi une préparation efficace à cette épreuve. On peut suggérer à ceux qui n'ont pas la possibilité de suivre là où ils sont une telle préparation de travailler par correspondance, et en tout cas d'asseoir solidement leurs connaissances sur les notions fondamentales en mécanique en reprenant leurs cours de second et même de premier cycle.

Résultats. Nombre de copies corrigées : 198
Répartition des notes (sur 40)

0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	30 à 35
24	122	12	18	10	8	1	3

RAPPORT SUR L'EPREUVE «PROBABILITES ET STATISTIQUES»

I.— Analyse du sujet :

Le problème était consacré à l'étude des concepts d'échangeabilité et de symétrie sphérique pour les vecteurs aléatoires et les suites de variables aléatoires.

Pour pouvoir composer un problème à la portée des candidats, il a fallu faire un découpage en questions qui gomme quelque peu les points essentiels. Ainsi n'est-il peut-être pas mauvais de mettre en évidence les résultats en fonction desquels le problème était composé :

- Le théorème de DE. FINETTI : Une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est échangeable si et seulement s'il existe un sous-tribu $\mathcal{G}$ de la tribu initiale $\mathcal{F}$ telle que, conditionnellement à $\mathcal{G}$, les (X_n) soient indépendants et de même loi (Partie I question 4, et partie III question 7).

- Si (X_n) est une suite à symétrie sphérique (donc échangeable) la limite :

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} X_j^2$ existe presque sûrement. Désignant par U cette limite, sous l'hypothèse $\{U = x\}$, les (X_n) sont indépendantes ont même loi, à savoir la loi gausienne centrée de variance x (partie IV questions 5 et 7).

- Enfin une caractérisation des suites à symétrie sphérique faisant intervenir la notion de fonction caractéristique, qui n'est pas valable pour les vecteurs à symétrie sphérique (partie IV question 8 et partie II question 4) : d'où l'on déduit que l'infini ne peut être fini !...

L'opinion du jury est que ce problème ne contenait aucune difficulté majeure car les candidats y étaient guidés d'assez près : en particulier les rappels et la partie préliminaire indiquaient la manière de s'y prendre pour obtenir facilement les résultats "théoriques" demandés. Dans le problème, étaient disséminées des applications qui demandaient un peu de calcul mais étaient du niveau D.E.U.G. (ou peu s'en faut !).

II.— Résultats généraux :

Nombre de copies corrigées : 699

Moyenne générale : 6,66 (sur 40)

Moyenne sans tenir compte des zéros : 9,86.

Notes	≤ 1	2 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25
Nombre de copies	301	102	104	92	41	33

Notes	26 à 30	31 à 35	36 à 40
Nombre de copies	15	7	2

Le lecteur aura certainement remarqué qu'il y a plus de la moitié de copies méritant une note ≤ 1, et parmi ces dernières, nombre de copies blanches (en fait 227). Et ce, malgré la relative facilité du problème...

Certaines erreurs signalées l'an passé ne son apparues que rarement cette année. C'est la preuve que le rapport est lu par certains candidats*. Cela nous encourage à signaler une erreur très couramment rencontrée cette année : Si $(\Omega, \mathcal{F})$ est un espace mesurable et si $\mathcal{G}$ est une partie quelconque de $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{F}$; alors deux probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$ qui coïncident sur $\mathcal{G}$ coïncident sur $\mathcal{F}$.

En règle générale les candidats semblent plus à l'aise dans des raisonnements de type "théorie de la mesure" que dans les arguments "probabilistes". Ce qui explique que les applications ont été trop souvent laissées de côté.

III.— Corrigé du problème

Préliminaires :

1° En utilisant le théorème de convergence dominée on voit que

$\mathcal{A} = \{A \text{ tel que } E(1_A . Z) = E(1_A \tilde{Z})\}$ est une classe monotone. En prenant des fonctions de la forme $\prod_{i=1}^{n} 1_{B_i}$ où $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ et par linéarité, il résulte que

* Du moins ceux qui n'ont pas remis de copie blanche.

l'algèbre engendrée par les ensembles $A = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i \in B_i)$ est contenue dans $\mathcal{A}$ donc ; $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$ et comme Z et $\tilde{Z}$ sont $\mathcal{G}$ mesurables on obtient $Z = \tilde{Z}$ P . p.s.

2° a) Pour $\mathcal{G} = \{\phi, \Omega\}$ $E(f o X \mid \mathcal{G}) = E(f o X)$; l'indépendance conditionnelle, par rapport à $\mathcal{G}$, des X_i équivaut donc à $\prod_{i=1}^{n} E(f_i(X_i)) = E(\prod_{i=1}^{n} f_i(X_i))$ pour toutes fonctions boréliennes bornées f_i, ce qui est encore équivalent à dire que les $\{X_i\}_{i=1\ldots n}$ sont indépendantes.

b) Pour $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ $E(f o X \mid \mathcal{F}) = f o X$; ainsi l'indépendance par rapport à la tribu $\mathcal{F}$ se traduit par $\prod_{i=1}^{n} f_i(X_i) = \prod_{i=1}^{n} f_i(X_i)$ donc est toujours vérifiée.

I - 1° Notons $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(x) = (x, -x)$ alors

$P_{(\mathcal{U}, -\mathcal{U})} = \varphi o P_{\mathcal{U}} = \varphi o P_{-\mathcal{U}} = P_{(-\mathcal{U}, \mathcal{U})}$ ce qui suffit à montrer que $(\mathcal{U}, -\mathcal{U})$ est échangeable.

2° Soient f la densité de $(X_1, \ldots, X_n)$ et φ une fonction borélienne bornée. Toute permutation $\Pi \in \sum_n$ se prolonge en une application unitaire $\tilde{\Pi}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ par $x = (x_1, \ldots, x_n) \to \tilde{\Pi}(x) = (x_{\Pi(1)}, \ldots, x_{\Pi(n)})$; alors

$E(\varphi o \tilde{\Pi} o X) = \int \varphi(x)\, dP_{X_\Pi}(x) = \int \varphi(\tilde{\Pi}(x))\, f(x)\, dx$. Comme le Jacobien de la transformation $\tilde{\Pi}$ est égal à ± 1, en faisant le changement de variable $y = \tilde{\Pi}(x)$ il vient $E(\varphi o X_\Pi) = \int \varphi(y)\, f(\tilde{\Pi}^{-1}(x))dx$, ce qui montre que X_Π est à densité, et comme $E(\varphi o X_\Pi) = E_{P_{X_\Pi}}(\varphi) = E_{P_X}(\varphi) = \int \varphi(y)\, f(y)dy$, on a $f = f o \tilde{\Pi}$ p.p. pour tout $\Pi \in \sum_n$: f est p.s. symétrique.

3° Notons que pour $i \neq j$ U_i est P p.s. différent de U_j.

Aussi pour tout f de R^n dans R, mesurable, on a :

$$E(f(Y_1, \ldots, Y_n)) = E(f(Y_1 \ldots Y_n) \sum_{\Pi \in \sum_n} 1_{U_{\Pi_1} < U_{\Pi_2} < \quad < U_{\Pi_n}})$$

$$= \sum_{\Pi \in \sum_n} E(f(U_{\Pi_1} \quad U_{\Pi_n})\ 1_{U_{\Pi_1} < U_{\Pi_2} < U_{\Pi_n}})$$

$$= n!\ E(f(U_1 \ldots U_n)\ 1_{U_1 < U_2 \ldots < U_n})$$

car $(U_1 \dots U_n)$ est échangeable.

La densité de $(Y_1 \dots Y_n)$ est donc $n!\; 1_{y_1 < \dots < y_n} \prod_{i=1}^{n} 1_{0 < y_i < 1}$

Le changement de variables

$$(x_1 \dots x_n) \rightsquigarrow (x_1,\; x_2 - x_1, \dots,\; x_n - x_{n-1}),$$ de jacobien 1 conduit à

la densité de $(X_1 \dots X_n)$:

$$n! \prod_{i=1}^{n} 1_{x_i > 0} \; 1_{\sum_{i=1}^{n} x_i < 1}$$

qui est manifestement symétrique.

4° Soient f_i $(i = 1 \dots n)$ des fonctions boréliennes bornées et $\Pi \in \sum_n$ on a les égalités :

$$E\left(\prod_i^n f_i \circ X_{\Pi(i)}\right) = E\left[E\left(\prod_i^n f_i \circ X_{\Pi(i)} \mid \mathcal{G}\right)\right] = E\left[\prod_i^n E(f_i \circ X_{\Pi(i)} \mid \mathcal{G})\right]$$

le dernier membre est égal à $E\left[\prod_{i=1}^{n} E(f_i \circ X_i \mid \mathcal{G})\right]$ car les X_i ont même loi conditionnelle. En réutilisant l'indépendance conditionnelle on arrive à $E\left[E\left(\prod_i^n f_i \circ X_i \mid \mathcal{G}\right)\right]$ qui est égale à $E\left[\prod_i^n f_i \circ X_i\right]$ ce qui suffit à prouver que $X = (X_1, \dots, X_n)$ est échangeable.

5° Soit $J = \{j_1, \dots, j_p\}$; il existe $\Pi \in \sum_n$ telle que $\Pi(i) = j_i \quad i = 1 \dots p$

Comme X et X_Π ont même loi, leurs lois marginales sur les p-premières coordonnées sont égales donc $X_J = (X_{j_1}, \dots, X_{j_p})$ et $(X_1, \dots, X_p)$ ont même loi. Ce qui montre que X_J et X_K ont même loi si J et K ont même cardinal.

6° Avec la question précédente on voit que $X_i \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_1 \quad i = 1 \dots n$ et

$$(X_1, X_2) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X_i, X_j)$$ pour tout couple $(i,j) \in \{1 \dots n\}^2$ avec $i \neq j$,

d'où $\quad \mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}(X_i) + \sum_{1 \le i \ne j \le n} \mathrm{cov}(X_i, X_j) = n\,\sigma^2(1 + (n-1)b)$.

comme la variance est ≥ 0 on voit que $b \geq \frac{-1}{n-1}$

7° Pour tout $\omega \in \Omega$: $[f \circ X_i(\omega) - f \circ X_j(\omega)]\;[g \circ X_i(\omega) - g \circ X_j(\omega)] \geq 0$.

On en déduit par passage à l'espérance que :

$$E[f(X_i)\, g(X_i)] + E[f(X_j)\, g(X_j)] \geq E[f(X_i)\, g(X_j)] + E[f(X_j)\, g(X_i)]$$

et comme $(X_1, \dots, X_n)$ est échangeable il reste après simplification :

$$E(f(X_i)\, g(X_j)) \le E(f(X_i)\, g(X_i)).$$

8° On a $E(\Phi^s o X) = \frac{1}{n\,!} \sum_{\Pi \in \Sigma_n} E(\Phi o X_\Pi) = \frac{1}{n\,!} \sum_{\Pi \in \Sigma_n} E(\Phi o X) = E(\Phi o X)$

et ceci sous la condition que $\Phi o X$ ait une espérance.

II - 1° On a vu en I. - 2° que l'application $\tilde{\Pi}$ induite par $\Pi \in \Sigma_n$ est unitaire donc tout vecteur à symétrie sphérique est échangeable.

La réciproque est fausse;par exemple dans le cas réel tout vecteur est échangeable par contre, l'application $x \to -x$ étant unitaire, X et $-X$ n'ont pas toujours même loi (exemple $X \equiv 1$).

2° Si φ désigne la fonction caractéristique de X à symétrie sphérique on a ; $\varphi_{AX}(u) = \varphi_X({}^tAu) = \varphi_X(u)$; donc X est à symétrie sphérique si et seulement si $\varphi oA = \varphi$ pour tout A unitaire. Remarquons que cette condition est équivalente à $\varphi(u)$ ne dépend que de $||u||$.

3° $\varphi_X(u) = E\,[e^{i \sum_{j=1}^{n} u_j X_j}] = E\,[E(e^{i \sum_1^n u_j X_j} \mid V)]$

$$= E\,[\prod_{j=1}^{n} E(e^{i u_j X_j} \mid V)] \quad \text{(avec l'indépendance conditionnelle)}$$

$$= E\,[\prod_{j=1}^{n} e^{-u_j^2 \frac{V}{2}}] = E(e^{-||u||^2 \frac{V}{2}})$$ ce qui, avec la question précédente, montre que X est à symétrie sphérique.

4°a) Une transformation unitaire laisse la mesure uniforme sur le cercle invariante, donc Y est à symétrie sphérique.

b) Désignons par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$; alors P_{Y_1} est équivalente (même ensembles nuls) à la trace de la mesure de Lebesgue sur $[-1, +1]$ donc $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $P_{Y_1}(A) = 0 \Leftrightarrow \lambda(A \cap [-1, +1]) = 0$.

Supposons les conditiions du 3° réalisées on aurait $E(1_A o Y_1) = E\,[E(1_A o Y_1 \mid V)]$ d'où $P_{Y_1}(A) = 0 \Leftrightarrow \lambda(A) = 0$ ce qui est manifestement, en contradiction avec l'expression précédente.

5° Le vecteur $(V, Y_1, \ldots, Y_n)$ a pour densité :

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})\,(2\sigma)^{\frac{m}{2}}\,(2\Pi\sigma)^{\frac{n}{2}}} \left[e^{-\frac{v+\sum_{j=1}^n y_j^2}{2\sigma}} \right] v^{\frac{m}{2}-1}\, 1_{(v \geq 0)} .$$

Effectuons le changement de variables $v_1 = v$, $x_j = \frac{y_j}{\sqrt{v}}$ dont la matrice jacobienne est triangulaire, de déterminant $v^{-n/2}$. La densité de $(V, X_1, \ldots X_n)$ est

donc $$\frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})(2\sigma)^{\frac{n+m}{2}}\,\Pi^{n/2}} \left[e^{-\frac{v}{2\sigma}\left(1+\sum_i^n x_j^2\right)} \right] v^{\frac{n+m}{2}-1}\, 1_{\mathbb{R}_+}(v).$$

La densité de $(X_1, \ldots, X_n)$ s'obtient en intégrant par rapport à v ; ce qui mène à

$$\frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\,\Pi^{n/2}} \frac{1}{\left(1+\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{\frac{n+m}{2}}}$$ sur $\mathbb{R}^n$. Cette densité est invariante pour tout opérateur unitaire . $(X_1, \ldots X_n)$ est donc à symétrie sphérique.

6° En effectuant le changement de variables $x_i' = x_i$ $i < n$ et $u_n = x_n\left(1+\sum_i^{n-1} x_j^2\right)^{-1/2}$ de jacobien $\left(1+\sum_{j=1}^{n-1} x_j^2\right)^{-1/2}$ on obtient la densité de $(X_1, \ldots, X_{n-1}, \mathcal{U}_n)$:

$$\frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\,\Pi^{\frac{n}{2}}} \left(1+\sum_{j=1}^{n-1} x_j^2\right)^{-\frac{n-m+1}{2}} \left(1+u_n^2\right)^{-\frac{n+m}{2}}$$

Les vecteurs $(X_1, \ldots, X_{n-1})$ et $\mathcal{U}_n$ sont indépendants et de lois respectives $\mathcal{C}^m_{n-1}$ et $\mathcal{C}^{n+m-1}_1$.

III. - 1° On a montré en I - 6° que $b \geq \frac{-1}{n-1}$ pour tout $n \geq 2$, donc $b \geq 0$.

2° Une probabilité définie sur $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}))$ est univoquement déterminée par ses projections fini - dimensionnelles (et non pas unidimensionnelles). Il en résulte que, pour tout $\Pi \in \sum_n'$, X et X_Π ont même loi. Ainsi notant h l'application mesurable $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \to h(x) = f(x_1)\, g(x)$ alors $E(h(X)) = E(h(X_\Pi))$

pour tout $\Pi \in \sum'_n$ et tout n (lorsque l'espérance existe). En particulier pour $\Pi = \Pi_j$ on obtient le résultat cherché.

3° a) Par hypothèse on peut écrire $Y = goX$ ou goX_Π p.s pour tout $\Pi \in \sum'_n$ donc $E(foX_j.Y) = E(f(X_j).g(X)) = E(f(X_j).g(X_{\Pi_j}))$ pour tout $j \leq n$, et avec III - 2° on obtient $E(f(X_j).Y) = E(f(X_1)Y)$;

D'où (1) $E[\frac{1}{n} \sum_1^n f(X_k)Y] = E(f(X_1).Y) = E(f(X_j).Y) \quad 1 \leq j \leq n.$

b) La fonction $x \to \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$ est évidemment n-symétrique et en prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{G}_n$ dans l'égalité (1) on voit que :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n foX_k = E(f(X_j) \mid \mathcal{G}_n) \text{ p.s pour tout } 1 \leq j \leq n.$$

4° En utilisant le 7° des rappels, on peut écrire, pour tout j :

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq j}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n foX_k = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq j}} E(foX_j \mid \mathcal{G}_n) = E(foX_j \mid \mathcal{G})$$

ce qui montre que les v.a. X_j ont, conditionnellement à la tribu $\mathcal{G}$, même loi.

5° En prenant comme permutation $\Pi \in \sum'_n$: $\Pi(i) = j_i \quad i \leq k$

où $(j_i)_{i=1...k} \in \mathcal{A}_n^k$ on a, avec la relation établie en III - 2°,

$$E[f(X_1,\ldots,X_k)\, g(X)] = E[f(X_{j_1},\ldots,X_{j_k})\, g(X_\Pi)] .$$

De même qu'au 3° on trouve pour Y n-symétrique bornée et $f(X_1,\ldots, X_k)$ intégrable

$$E[\frac{1}{A_n^k} \sum_{(j_i)\in\mathcal{A}_n^k} f(X_{j_1},\ldots, X_{j_k})\, Y] = E[f(X_{j_1},\ldots, X_{j_k})\, Y]$$

et comme $\frac{1}{A_n^k} \sum_{(j_i)\in\mathcal{A}_n^k} f(x_{j_1},\ldots,x_{j_k})$ est n-symétrique, on obtient pour tout

$(j_1,\ldots, j_k) \in \mathcal{A}_n^k$: $E[f(X_{j_1},\ldots, X_{j_k}) \mid \mathcal{G}_n] = \frac{1}{A_n^k} \sum_{(j_i)\in\mathcal{A}_n^k} f(X_{j_1},\ldots,X_{j_k})$.

6° Posons $\alpha_1 = \sum_{(j_i)\in\mathcal{A}_n^k} f(X_{j_1},\ldots, X_{j_k})$; $\alpha = \sum_{j_1=1}^n \ldots \sum_{j_k=1}^n f(X_{j_1},\ldots,X_{j_k})$

et $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$. Remarquons que si $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}^k$ alors $\left|\frac{\alpha_2(\omega)}{n^k - A_n^k}\right|$ est uniformément borné en ω, n et $\frac{A_n^k}{n^k} \to 1$ pour $n \to \infty$.

En utilisant ces remarques et la relation $\frac{1}{n^k}\alpha = \frac{A_n^k}{n^k}\left[\frac{\alpha_1}{A_n^k} + \left(1-\frac{A_n^k}{n^k}\right)\left(\frac{\alpha_2}{n^k - A_n^k}\right)\right]$

on voit que $\frac{1}{n^k}\alpha \to E\,[f(X_1,\ldots,X_k)\mid \mathcal{G}]$.

ou de même $\frac{1}{n^k}\alpha \to E[\,f(X_{j_1},\ldots,X_{j_k})\mid \mathcal{G}\,]$ pour tout k et tout $(j_1,\ldots j_k) \subset \mathbb{N}^*$

7° Soient $J = \{j_1,\ldots j_k\}$ une partie finie de $\mathbb{N}$ et f_i $i=1\ldots k$ des fonctions boréliennes bornées. "L'égalité" du 6° montre que :

$$E\left(\prod_{i}^{n} f_i(X_i)\,.\mid \mathcal{G}\right) = \lim_{n\,\infty}\frac{1}{n^k}\sum_{j_1=1}^{k}\cdots\sum_{j_k=1}^{k} f_1(X_{j_1})\ldots f_k(X_{j_k})$$

$$= \lim_{n\,\infty}\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_i(X_j) = \prod_{i=1}^{k}\lim_{n\,\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_i(X_j)$$

$$= \prod_{i=1}^{k} E(f_i(X_i)\mid \mathcal{G})$$: Les (X_i) sont donc indépendants conditionnellement à $\mathcal{G}$.

IV - 1° $E(\exp(i\sum_{j=1}^{n} t_j X_j)\mid \mathcal{H}) = \prod_{j=1}^{n} E(\exp(it_j X_j)\mid \mathcal{H})$ avec l'indépendance conditionnelle;ou encore avec iii) de $A = \prod_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}} \exp\,(it_j x)\, P_{X_j}\,(\omega,\,dx)$ p.s. Et, comme les X_j ont même loi conditionnelle, on obtient l'égalité recherchée :

$$E(\exp(i\sum_{j=1}^{n} t_j X_j)\mid \mathcal{H}) = \prod_{j=1}^{n} F(t_j,.)\quad P\ \ \text{p.s.}$$

La fonction caractéristique de $\sum_{j=1}^{n} t_j\, X_j$ est $\varphi(t) = E(\exp(i\sum_{j} t\, t_j\, X_j))$.

En conditionnant par rapport à $\mathcal{H}$: $\varphi(t) = E(\prod_{j=1}^{n} F(tt_j,\omega))$.

2° Si $(X_1,\ldots, X_n)$ est à symétrie sphérique sa fonction caratéristique qui est d'après IV - 1°, $E(\prod_{j=1}^{n} F(t_j,\omega))$ ne dépend que de $\sum_{j=1}^{n} t_j^2$, d'après II - 2°,

3° Notons φ_4 la fonction caractéristique de (X_1,X_2,X_3,X_4). D'après II- 2°,

$\varphi_4(t_1,t_2,t_3,t_4) = g\,(\sum_{i=1}^{4} t_i^2)$. On a $E(F(t,\omega)\,F(-t,\omega)) = g\,(t^2+(-t^2)+0+0)$

et $E(F(t,\omega)\,F(-u,\omega)\,F(-v,\omega)) = g\,(2t^2)$

de même $E(F(u,\omega).\,F(v,\omega).F(-u,\omega).\,F(-v,\omega)) = g\,(2t^2)$.

D'où $E\,[\,|F(t,\omega) - F(u,\omega)\,F(v,\omega)|^2] = 0$ pour $t^2 = u^2 + v^2$.

Par conséquent l'ensemble $A_{u,v} = \{\omega | F(t,\omega) = F(u,\omega)\ F(v,\omega)\}$ est de probabilité 1.

4° Soit (u_n, v_n) une suite dense dans $\mathbb{R}^2$ et $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{u_n,v_n}$ alors $P(A) = 1$ et comme $F(t,\omega)$ est pour tout ω fixé, continue en t ; en prenant $\omega \in A$:

$F(\sqrt{u_n^2+v_n^2},\omega) = F(u_n,\omega).\ F(v_n,\omega)$ et par continuité, pour tout $\omega \in A$

$F(\sqrt{u^2+v^2},\omega) = F(u,\omega).\ F(v,\omega)$. On en déduit (pour $u=-v$) que F est réelle.

D'après la partie B, il existe pour tout $\omega \in A$, un nombre $\mathcal{U}(\omega)$, nécessairement réel car F est réelle, tel que $F(t,\omega) = \exp(-\frac{1}{2}\mathcal{U}(\omega)t^2)$. Posons $\mathcal{U}(\omega)=0$ si $\omega \notin A$.

5° L'expression ci-dessus définissant $\mathcal{U}(\omega)$, montre de manière évidente, que si $F(t,.)$ est mesurable pour une certaine tribu, il en est de même pour $\mathcal{U}(.)$; ainsi $\mathcal{U}$ est $\mathcal{H}$-mesurable.

En outre $E(\exp i \sum_{j=1}^{n} t_j X_j | \mathcal{U}) = E(E(\exp i \sum_j t_j X_j | \mathcal{H}) | \mathcal{U})$

$$= E(\prod_{j=1}^{n} F(t_j, \omega) | \mathcal{U}) = E(\prod_j \exp(-\frac{\mathcal{U} t_j^2}{2}) | \mathcal{U}) = \prod_{j=1}^{n} e^{-\frac{\mathcal{U} t_j^2}{2}}$$

Ce qui prouve que, conditionnellement en $\mathcal{U}$, les variables aléatoires $(X_1,\dots X_n)$ sont indépendantes et de fonctions caractéristiques (conditionnelles) :

$\varphi_{X_i/\mathcal{U}}(t) = e^{-\frac{\mathcal{U} t^2}{2}}$, donc de même loi conditionnelle qui est d'ailleurs $\mathcal{N}_{\mathcal{U}(\omega)}$.

6° (X_n) est à symétrie sphérique si et seulement si il existe une v.a. $\mathcal{U}$, telle que conditionnellement à $\mathcal{U}$, les X_n sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}_{\mathcal{U}(\omega)}$. La partie ci-dessus montre le caractère nécessaire de cette assertion et la partie II- 3° montre qu'elle est suffisante

7° La suite (X_i) est échangeable, (II - 1°), et comme $E(X_i^2)$ existe prenons comme fonction f : $f(x) = x^2$ dans III - 4° : $\lim_{n \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j^2 = E(X_1^2 | \mathcal{G})$ p.s.

Enfin, dans la partie IV, prenons $\mathcal{H} = \mathcal{G}$. Or IV - 4° montre que la loi conditionnelle de X_1 par rapport à $\mathcal{H}$ est $\mathcal{N}_{\mathcal{U}(\omega)}$ donc $E(X_1^2 | \mathcal{H}) = \mathcal{U}$ p.s.

8° La condition est nécessaire : on prend pour μ la loi de la v.a. $\mathcal{U}$ obtenue en IV - 4° . La fonction caractéristique de $(X_1, \dots, X_n)$ est :

$$E[E(\exp(i \sum_{j=1}^{n} t_j X_j) | \mathcal{H})] = E(\exp -\frac{1}{2} \sum_j t_j^2 \mathcal{U})$$ ou encore,

avec $t^2 = \sum_1^n t_j^2$, $\int_{[0,\infty[} \exp(-xt^2)d\mu(t)$.

La condition est suffisante car alors $(X_1,\ldots,X_n)$ est à symétrie sphérique, II - 2°, pour tout n donc la suite est à symétrie sphérique.

Enfin le résultat est faux pour un vecteur : contre exemple II - 4°.

9° La suite de v.a. $X_j = \frac{Z_j}{\sqrt{V}}$ est telle que $(X_1,\ldots,X_n)$ suit la loi $\mathcal{C}_n^m$, et est donc à symétrie sphérique : $\mathcal{U}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j^2$ converge donc, p.s, vers $E(X_j^2 \mid V) = \frac{1}{V}E(Z_j^2 \mid V)$ ou encore $\frac{\sigma}{V}$ car Z_j est indépendante de V.

10° On montre aisément, par récurrence, et en utilisant II - 6°, que $(X_1,\ldots,X_n)$ suit la loi $\mathcal{C}_n^m$. Nous sommes ramenés à la question précédente et $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j^2$ converge p.s. vers $E(X_1^2 \mid \mathcal{G})$ qui a même loi que $\frac{\sigma}{V}$, c'est-à-dire, de densité :

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})2^{\frac{m}{2}}} \exp(-\frac{1}{2x}).\, x^{-\frac{m}{2}-1} \quad 1_{\mathbb{R}_+}(x)$$

11° L'égalité suivante se prouve facilement par récurrence :

$$\prod_{j=1}^n (1+Y_j^2) = 1 + \sum_{j=1}^n X_j^2 .$$

Ainsi $\lim_{n\infty}\frac{1}{n}\prod_{j=1}^n (1+Y_j^2) = \lim_{n\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j^2 = E(X_1^2 \mid \mathcal{G})$ p.s.

oral

1. OBSERVATIONS GENERALES

Les 251 candidats admissibles ont été répartis selon deux sous-jurys, comportant chacun une commission d'algèbre et une commission d'analyse.

Le tableau suivant indique la répartition des notes (sur 80)

	Aban-dons	0 à 7	8 à 15	16 à 23	24 à 31	32 à 39	40 à 47	48 à 55	56 à 63	64 à 71	72 à 79
Algèbre	9	3	17	15	28	33	42	46	39	14	5
Analyse	8	4	13	21	31	34	41	37	33	23	6

2. RAPPORT DES COMMISSIONS D'ANALYSE

2.1.– Observations générales

L'organisation technique du déroulement de la leçon est maintenant comprise par la plupart des candidats, mis à part une demi-douzaine d'entre-eux, sur le cas desquels il semble inutile d'insister, vu qu'ils ne lisent manifestement pas les rapports du jury, ni même vraisemblablement la notice d'instructions qui leur est remise.

Signalons cependant qu'il est encore trop fréquent qu'un seul sujet d'exposé soit véritablement proposé, d'une façon plus ou moins détournée, soit que ce sujet se trouve artificiellement scindé en deux ou trois, ou encore présenté sous diverses variantes, soit encore que les autres sujets soient dépourvus de toute substance, ou sans rapport avec le thème de la leçon. Rappelons que la commission est alors en droit d'imposer un sujet de son choix. Il va de soi également que les choix proposés ne doivent pas esquiver systématiquement les théorèmes fondamentaux de la leçon, au profit de points marginaux.

On attend que le candidat montre par son plan qu'il a réfléchi à l'ensemble du sujet, qu'il sait en faire la synthèse et présenter de manière cohérente l'intérêt des notions introduites et l'enchaînement des résultats. Cet effort de synthèse, qui est exigé, n'est pas compatible avec le fait de suivre servilement un unique ouvrage de référence, ce dont le jury ne saurait se contenter. Par ailleurs l'encyclopédisme, ou la prétention à une exhaustivité chimérique, n'est pas la qualité essentielle d'un plan, qui peut être situé à différents niveaux, pourvu qu'ils soient cohérents. Quel que soit ce niveau, et tout particulièrement s'il est élémentaire, les énoncés doivent être illustrés d'exemples et de «contre-exemples» nombreux.

L'exposé, plus encore que le plan, doit être pour le candidat le moment privilégié pour faire valoir ses qualités pédagogiques, en jouant le jeu de s'adresser à un auditoire qui est censé découvrir le sujet, même s'il est légitime de lui supposer des facultés d'assimilation plus rapides que celles d'un auditoire réel. On attend donc d'un exposé qu'il soit vivant et attractif, que son débit ne soit ni trop lent ni trop rapide, et suffisamment varié, que son ossature et ses articulations ressortent clairement, que les justifications des affirmations, même simples, soient données, en faisant un sort différent à celles qui sont immédiates et à celles qui sont délicates, ou font intervenir de façon cruciale les hypothèses.

Par ses questions, le jury cherche à vérifier que les notions introduites par les candidats sont vraiment assimilées, et qu'ils savent les appliquer ; il ne peut manquer de déceler le cas des candidats qui ont recopié hâtivement des énoncés sur lesquels ils n'ont jamais médité, dans des ouvrages qu'ils viennent d'ouvrir pour la première fois. Indiquons d'autre part que, s'il est légitime, pour un candidat, de se limiter, dans les choix des exposés détaillés qu'il propose, au strict programme de l'oral, il est abusif, au niveau des exemples et des applications, que les rudiments et les énoncés fondamentaux de chapitres entiers figurant au programme d'écrit soient délibérément ignorés.

Pour compléter ces observations générales, il est vivement recommandé de relire attentivement celles qui ont été détaillées dans les précédents rapports, notamment celui de 1978, que nous ne répéterons pas.

2.2.— Remarques particulières sur certains sujets

De façon générale, les leçons d'exemples brillent souvent par la pauvreté de ceux-ci, sacrifiés à de prétendus «rappels», qui envahissent la quasi-totalité du plan, ou limités à quelques trivialités.

La Commission a su gré à un candidat ayant à traiter la leçon 63, d'avoir joué le jeu en proposant des exemples variés et instructifs, et lui a pardonné de n'avoir pas toujours très bien dominé le traitement de certains d'entre eux.

En particulier, la leçon 50 ne saurait être interprétée comme «Première leçon sur les séries», les différentes leçons où figurent les mots «compact» ou «compacité» être confondues avec «Généralités sur les compacts», et la leçon 46 être traitée comme la leçon 41 !

Les leçons où intervient la connexité donnent trop souvent lieu (outre l'oubli, regrettable même lorsqu'il n'est qu'un lapsus, d'un «non vides» dans la phrase définissant les connexes) à des confusions entre les ouverts d'un sous-espace et ceux de l'espace ambiant, révélatrices d'une incompréhension profonde de la question.

On ne devrait pas avoir à rappeler ici que le fait d'être complet n'est pas une propriété topologique des espaces métriques, mais il serait souvent utile, dans beaucoup d'applications, de remarquer qu'en revanche la propriété de satisfaire aux conclusions du théorème de Baire est invariante par homéomorphisme.

Dans la leçon 15, on aimerait voir apparaître d'autres sous-ensembles remarquables de $\mathbb{R}$ que les intervalles, et d'autres exemples de compacts que l'ensemble de Cantor.

Dans la leçon 16, il serait souhaitable que, sans entrer dans des développements systématiques, on s'interroge sur le sens du mot «compactification».

Le traitement de la leçon 22 ne devrait pas totalement ignorer l'aspect topologique dans l'étude du développement en fractions continues.

Le théorème des fonctions implicites a souvent donné lieu à un fâcheux mélange de deux énoncés, conduisant à une quantification incorrecte des voisinages qui interviennent du côté «source» et du côté «but», et montrant une incompréhension des rôles joués par la connexité des voisinages et la continuité de la fonction implicite dans l'unicité de celle-ci.

Un mélange analogue s'observe, dans la leçon 59, entre un énoncé d'existence et d'unicité locales et un énoncé global, valable sur un intervalle spécifié à l'avance ; il n'est pas rare qu'un candidat énonce l'un et démontre l'autre, sans même s'en rendre compte.

La leçon 58 a été trop souvent traitée comme la leçon 35, en laissant ignorer jusqu'au bout ce que peut bien être une série de Taylor, les fonctions considérées étant d'ailleurs supposées tout au long seulement n fois dérivables !

La plupart des leçons de calcul intégral peuvent valablement se limiter à l'intégration de fonctions à valeurs réelles ou complexes, surtout lorsqu'aucune application de théories plus générales n'est proposée.

Dans de nombreuses leçons, on déplore une ignorance alarmante des rudiments de la théorie des fonctions holomorphes, qui serait pourtant une source de nombreuses applications.

On trouvera d'autres indications importantes dans les précédents rapports, notamment celui de 1978.

2.3. – Liste des exposés d'analyse, de mécanique et de probabilités

1) Applications à l'analyse de la notion de compacité.
2) Exemples d'espaces compacts.
3) Espaces homéomorphes. Exemples et contre-exemples.
4) Connexité. Applications.
5) Théorème du point fixe. Applications.
6) Espaces métriques complets, espaces métriques compacts ; comparaison de ces notions.
7) Suites de points dans un espace métrique ; suites extraites. Exemples et applications.
8) Sous-espaces denses. Illustration par l'approximation des fonctions.
9) Exemples d'applications linéaires continues d'un espace vectoriel normé dans un autre ; normes de telles applications.
10) Espaces vectoriels normés de dimension finie.
11) Géométrie dans un espace vectoriel normé (par exemple : convexité, projecteurs, sous-espaces de dimension ou de codimension finie ; cas des espaces de Hilbert).
12) Exemples d'utilisation de la dénombrabilité en topologie et en analyse.
13) Donner une construction de R ; en déduire les principales propriétés de R.
14) Une caractérisation de R (par certaines de ses propriétés) étant connue, en déduire les autres propriétés fondamentales de R.
15) Topologie de la droite numérique R et sous-ensembles remarquables de R.
16) Exemples de compactifications de R ; utilisation des symboles ∞, $+\infty$, $-\infty$.
17) Parties connexes de R et applications entre de telles parties.
18) Propriétés topologiques de R^n, exemples d'utilisation.
19) Limite d'une fonction numérique d'une variable réelle.
20) Exemples d'étude de suites de nombres réels.
21) Limite, limite inférieure, limite supérieure d'une suite dans R ou $\overline{R}$.
22) Approximations d'un nombre réel.
23) Etude, sur des exemples simples, de suites numériques définies par divers types de relations de récurrence.
24) Continuité et dérivabilité de fonctions réelles d'une variable réelle ; exemples, contre-exemples.
25) Fonctions à variation bornée. Applications.
26) Applications réciproques : théorèmes d'existence ; exemples.
27) Fonctions implicites. Applications.
28) Exemples d'utilisation de changements de variable.
29) Fonctions convexes d'une ou de plusieurs variables réelles.
30) Fonctions convexes d'une variable réelle ; inégalités de convexité.
31) Problèmes de prolongement de fonctions ; exemples.
32) Applications différentiables. Exemples.
33) Fonctions de plusieurs variables réelles : formule des accroissements finis et applications.
34) Différentiabilité d'ordre k des applications d'un ouvert de R^n dans R^p ; dérivées partielles.
35) Les différentes formules de Taylor.
36) Problèmes d'extremum.
37) Comparaison des fonctions au voisinage d'un point. Développements limités.
38) Applications des développements limités et asymptotiques.
39) Fonction exponentielle complexe. Argument d'un nombre complexe.
40) Exemples de fonctions satisfaisant à une équation fonctionnelle simple.
41) Intégrale des fonctions de variable réelle. Premières propriétés.
42) Intégrales impropres.
43) Problèmes d'intervension d'une limite et d'une intégrale. Exemples.
44) Problèmes de dérivabilité en calcul intégral.
45) Fonctions définies par une intégrale. Exemples.

46) Calcul des intégrales.
47) Méthodes de calcul effectif ou approché d'intégrales et de sommes de séries.
48) Intégrales curvilignes. Exemples d'applications.
49) Séries. Convergence et convergence absolue. Sommation par paquets, réindexation.
50) Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries numériques.
51) Continuité, dérivabilité, intégrabilité de la somme d'une série de fonctions d'une variable réelle.
52) Comparaison d'une série et d'une intégrale.
53) Différentes notions de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions. Exemples.
54) Exemples d'utilisation du critère de convergence de Cauchy.
55) Exemples de problèmes d'intervention de limites.
56) Domaine de convergence d'une série entière. Propriétés de la somme d'une telle série.
57) Exemples de développement d'une fonction en série entière.
58) Série de Taylor.
59) Solutions des équations différentielles $y' = f(x,y)$; solutions maximales.
60) Equations différentielles linéaires ; propriétés générales. Exemples.
61) Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.
62) Etude détaillée, sur un petit nombre d'exemples, d'équations différentielles non linéaires ; illustrations géométriques.
63) Exemples de problèmes conduisant à des équations différentielles.
64) Sous-variétés différentiables de R^2 et de R^3. Exemples de représentations paramétriques et de représentations implicites.
65) Propriétés affines locales des courbes. Branches infinies. Exemples.
66) Exemples de tracés de courbes $\overrightarrow{OM} = \vec{f}(t)$.
67) Exemples de tracés de courbes $\rho = f(\theta)$.
68) Etude métrique des courbes planes.
69) Courbure et torsion des courbes en géométrie euclidienne de dimension trois. Recherche des courbes dont la courbure et la torsion sont des fonctions données de l'arc.
70) Mouvement à accélération centrale.
71) Champ des vitesses d'un solide. Composition des mouvements.
72) Mouvement d'un repère orthonormé ; applications à la théorie des courbes gauches et à la cinématique du solide.
73) Mouvement d'un plan sur un plan.
74) Méthodes de calcul approché de solutions numériques des équations $f(x) = 0$.
75) Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales.
76) Théorèmes limites fondamentaux en calcul des probabilités.
77) Le jeu de pile ou face (variables de Bernoulli indépendantes).
78) Probabilité conditionnelle. Exemples.
79) Loi binomiale, loi de Poisson.
80) Introduire, sur des exemples, les bases mathématiques du calcul des probabilités.

3. EPREUVE D'ALGEBRE, GEOMETRIE

3.1.— Observations générales

Instruits sans doute par les précédents rapports, les candidats ont semblé, en majorité, avertis des règles de l'épreuve et familiers de son déroulement ; de fait, au cours de ces «figures imposées» que sont la présentation du plan et le développement d'une de ses parties, ils ont tout intérêt à une utilisation efficace du tableau et du temps, qui leur permette de mieux mettre en évidence la solidité de leurs connaissances et le sérieux de leur préparation.

Si, par conséquent, les plans squelettiques ou démesurément longs, les propositions d'exposé indigentes, ont été relativement rares, il est un autre aspect de l'épreuve dont manifestement l'intérêt et les risques n'ont pas été perçus : la possibilité de consulter des ouvrages au cours de leur préparation, improprement mise à profit par de nombreux candidats, les a conduits à des plans incohérents, mosaïques de présentations contradictoires, ou dont l'érudition - et parfois le vocabulaire - les dépassaient nettement. De même, le jury a trop souvent subi des exposés calqués sur les livres classiques jusqu'à la citation textuelle - voire, hélas, jusqu'aux lacunes et obscurités -.

Outre la désagréable impression d'anonymat et de stéréotype qu'elles peuvent laisser, de telles attitudes augurent mal des qualités de synthèse et de sens critique qu'on est en droit d'attendre chez un enseignant ; il va de soi qu'aucune insuffisance ne peut ainsi se dissimuler et qu'au contraire les risques sont grands de trébucher sur un plan mal assimilé et des connaissances fraîchement acquises.

Que les candidats ne cherchent donc pas dans les manuels des suppléants, mais des compléments : autant il est déraisonnable d'y puiser servilement la matière ou l'architecture d'une leçon, autant il peut être fructueux d'en tirer applications, exercices, variantes de démonstrations et remarques historiques. Un tel usage suppose bien entendu une certaine familiarité avec l'ouvrage consulté, et on ne peut guère escompter que des déboires en choisissant des livres inconnus sur le seul vu du rapport que présente leur titre avec les sujets tirés.

Disons un mot du choix de ceux-ci : leur libellé et la nature des couplages donnent à chaque fois de grandes latitudes quant au style et au niveau de la leçon ; il apparaît pourtant que certains d'entre eux - notamment les sujets «géométriques» 51... 66 - provoquent un refus systématique, parfois même accompagné d'une pointe de condescendance. Faut-il rappeler que la matière dont ils traitent est historiquement à l'origine d'une bonne part des sujets «abstraits» d'algèbre, linéaire ou non, et qu'on peut présenter à leur propos des leçons au moins aussi érudites ou valorisantes que sur ces derniers ? Certains candidats, parfois brillamment classés à l'écrit, semblent l'avoir compris ; il faut, hélas, constater que la bonne volonté ne suffit pas et le jury, pourtant acquis d'avance à ce non-conformisme, n'a pu le récompenser, tant les connaissances présentées étaient décousues, la géométrie des Grecs, celles de Desargues et de Riemann semblant en permanence se tourner le dos.

Ce cloisonnement du savoir apparaît d'ailleurs comme un fait général ; les meilleurs candidats eux-mêmes hésitent à rapprocher des notions dont la parenté est pourtant claire mais qu'ils ont étudiées à des moments différents, privent ainsi leur plan de ses exemples les plus fructueux et le réduisant - surtout si le sujet est «général» comme (3), (4), (11), (30) - à une énumération, peu révélatrice des structures et dont l'esprit de synthèse est absent. Le programme de l'Agrégation est pourtant riche de telles possibilités et c'est en étudiant chaque notion à la lumière des autres qu'on se préparera le mieux à en sentir, puis à en faire ressentir, l'unité et l'usage. Il est remarquable que ces aptitudes à donner d'une théorie des applications non triviales et à opérer entre notions d'apparences éloignées des rapprochements instructifs soient bien souvent pour le chercheur la source de découvertes ; nombre de théorèmes célèbres sont nés de la sorte et, à cet égard, la préparation du Concours - outre, bien sûr, son intérêt intrinsèque - apparaît aussi comme une très efficace initiation à la recherche.

Si, comme on l'a dit, les connaissances des candidats sont cloisonnées, c'est une infranchissable muraille qui doit séparer, à leurs yeux, algèbre et analyse. Certes, passant une épreuve d'algèbre, ils n'ont pas à présenter un plan ou des propositions d'exposé consacrés à l'analyse, mais il y a loin de ces «détournements de sujet» - d'ailleurs fort rares et toujours sanctionnés - à l'attitude naturelle, quoique peu fréquente, qui consiste à illustrer par des exemples tirés de l'analyse fonctionnelle [(32), (36), (43), (44), (50), (54)], des équations différentielles [(35), (37)], voire de la géométrie différentielle [(28), (30), (31), (33)] des théories qui en sont parfois issues et y ont en tous cas certaines de leurs plus belles applications. Aussi les candidats ont-ils tout avantage à un effort de synthèse : une meilleure motivation des notions introduites et des applications moins restrictives ne peuvent qu'influencer favorablement le jury, puisqu'elles sont à la fois une marque de réflexion personnelle et des qualités importantes chez un enseignant.

Pareilles remarques valent aussi pour l'ensemble des leçons : le manque d'exemples significatifs est en effet général et réduit bien des plans à n'être que des catalogues de notions abstraites et sans débouchés. Dans les «chemins» de la pensée mathématique, les définitions sont bien souvent des carrefours ; nombre de candidats semblent malheureusement les placer en plein désert tant leur introduction est dénuée d'à propos et leur usage de portée. Comment traiter des sujets tels que (2), (11), (28), sinon en y faisant ressortir comment la notion, pourtant élémentaire, de quotient, de dimension ou d'idéal fournit la réponse à des questions variées et difficiles, puis - c'est le problème de la structure - pourquoi elle permet de les résoudre, pourquoi elle est en fait leur commune substance ? A un moindre degré, une illustration trop conventionnelle de notions comme (29), (42) leur donne l'aspect de théories autarciques, coupées du reste des mathématiques et se suffisant à elles-mêmes, alors que de nombreuses et instructives applications à l'arithmétique, l'analyse ou la géométrie peuvent en être trouvées à d'autres chapitres du programme.

En fait, si trop de candidats limitent leurs exemples à des illustrations et leurs applications aux questions connexes, c'est la plupart du temps par manque de familiarité avec le sujet qu'ils traitent : on le voit aux propositions d'algorithmes «pratiques» - et, en fait, inextricables - en (27) ou (44) par exemple ; aux difficultés à particulariser sur des cas simples les théorèmes généraux énoncés (signature de formes quadratiques ou de permutations, générateurs de sous-groupes, factorisation de polynômes) ; ou encore aux problèmes que souleva (38), leçon élémentaire mais non abordée dans les livres, qui fut l'objet des pires violences «Jordanisantes» et ne reçut pas une fois un traitement correct. De même, si les corps finis sont amplement cités en (16), (20), (23), leur apparition en (31), (43) ou comme application de (3), (4), (5) aux sous-groupes classiques de $GL(n,\mathbb{F}_q)$ provoque souvent la surprise, parfois la réprobation, mais rarement des réponses satisfaisantes. Le jury ne réclame pas aux futurs agrégés une érudition sans faille, il en attend par contre une certaine curiosité intellectuelle, qu'ils puissent examiner pour chaque point du programme les notions fournies par les autres points, et notamment illustrer celui-là à l'aide de ceux-ci. Prêt à accepter divers niveaux ou points de vue - en particulier sur des sujets tels que (9), (33), (58) -, il souhaite que l'option choisie soit cohérente et capable de convaincre : le candidat qui a introduit les sous-groupes de Sylow [(3)] doit savoir trouver ceux de S_4 et, s'il s'est aventuré dans les déterminants non commutatifs, qu'il évite de battre la campagne sur ceux d'ordre deux ; de même, le théorème de Witt [(43)] ne doit pas constituer un cul de sac ni les formules d'orthogonalité et transposition [(32)] paraître des mécanismes purement formels et dénués d'intérêt.

Qu'il faille encore les attribuer au manque de maîtrise des notions introduites ou bien à l'inattention, les nombreuses imprécisions et inexactitudes dont souffrent tant de définitions et d'énoncés ne sont pas plus acceptables : il est faux que tout idéal premier d'un anneau principal soit maximal ou tout élément d'un anneau factoriel produit d'irréductibles ; on n'a pas bien compris l'algorithme de Gauss [(44)] avant de pouvoir le traduire en termes de base duale, ni assimilé les formes bilinéaires si l'on transpose systématiquement les formules matricielles qui les concernent. Il est au demeurant naturel qu'appelés à payer d'exemple dans leur métier, les candidats se refusent dès leur préparation au concours le flou et le laisser-aller qu'ils interdiront - ou interdisent déjà - à juste titre à leurs élèves.

L'organisation de son plan, le choix de ses exemples, relèvent pour le candidat de l'exercice écrit puisqu'ils ont pour cadre les trois heures de préparation ; lors de son passage, au contraire, il va devoir convaincre le jury : de ses qualités d'exposition et du bien fondé de ses options par la présentation du plan, de la solidité de ses connaissances pendant l'exposé, de leur étendue, enfin, en réponse aux questions.

Présentation du plan, d'abord. Qu'il doive tenir intégralement au tableau semble un fait acquis - au prix éventuel de quelques contractions ou contorsions -, encore faut-il écrire lisiblement, mettre en évidence les résultats essentiels et séparer les divers paragraphes ; l'usage d'abréviations compréhensibles est tout à fait licite sous réserve qu'il ne dégénère pas en sténographie, quant à celui des notes, le «par cœur» est suicidaire et la copie textuelle révélatrice, l'idéal étant bien sûr qu'une familiarité suffisante avec le sujet permette de ne les utiliser que comme canevas. Des explications orales sont les bienvenues pour motiver, justifier, commenter les notions ou théorèmes pendant qu'on les écrit, voire pour alléger de détails annexes un plan particulièrement long, et plusieurs candidats amassent, à ce moment de l'épreuve, un capital précieux, par l'impression qu'ils donnent de vivre leur exposé, d'en sentir les articulations et la cohérence. A l' inverse, on ne saurait trop déconseiller à d'autres, parfois favorablement placés à l'écrit, le ton indifférent, détaché ou monocorde qu'ils croient bon d'adopter, en parfaite contradiction avec le plan riche et bien conçu qu'ils présentent, et dont à ce compte le jury finit par se demander s'ils ont réellement saisi la portée.

Exposé d'un point du plan, ensuite. Il s'agit souvent, mais non nécessairement, d'un théorème important, particulièrement en rapport avec le sujet. Cette étape, normalement sans embûches puisqu'un choix préalable revient au candidat, s'avère en fait redoutable et les victimes des «impasses» ou du mirage livresque sont légion, tellement une démonstration comprise se distingue d'une démonstration apprise et des connaissances trop fraîches, ou une érudition de façade, résistent mal à la plus bénigne des questions. Proposer en exposé une décomposition de fraction rationnelle dont on s'épargne ensuite tous les calculs en recopiant ses notes relève de l'inconscience, et on a peine à voir certains, manifestement intelligents, s'enliser sans fin dans des résultats classiques dont, sans doute par inadvertance, ils ont mal saisi l'intérêt et négligé l'étude et qui prennent là, si l'on peut dire, une cruelle revanche. A l'opposé, le jury a pu témoigner sa satisfaction devant des démonstrations, de niveaux fort divers mais qui avaient en commun la clarté, la vivacité et la maîtrise ; la plupart du temps menées sans notes, bien structurées - grâce éventuellement à des lemmes intermédiaires - et dont manifestement leurs auteurs n'avaient pas découvert l'existence trois heures auparavant.

Questions du jury, enfin. Au moins aussi révélatrices que les deux premières parties et intervenant en fin d'épreuve, elles ont d'abord trait au plan, dont il faut préciser des points ou rectifier des inexactitudes, et à l'exposé, pour lequel on envisagera éventuellement d'autres démonstrations ou des hypothèses affaiblies. Les autres questions visent, dans le cadre de la leçon, à cerner au mieux la culture mathématique du candidat et ses capacités de réaction ; la vivacité, l'attention, la précision apportée aux réponses sont, là encore, des atouts importants, ainsi que l'espèce d'enthousiasme et d'entrain communicatif que le jury a parfois enregistré avec plaisir, de même qu'il déplorait à rebours chez certains la dévalorisation intempestive d'idées originales par le désintérêt manifeste avec lequel elles étaient énoncées. Quant au savoir, toute érudition solide et en situation est évidemment la bienvenue et, si certains candidats trop prudents ont presque dû être contraints à l'aveu de connaissances pourtant assurées et qui n'auraient certes pas déparé leur plan, d'autres, qui avaient cédé trop facilement aux délices de la bibliophilie ont vu se transformer en failles béantes les brèches tant bien que mal colmatées lors de l'exposé ; le jury stupéfait découvrant alors, par exemple, des définitions fort peu orthodoxes d'anneau euclidien, de forme bilinéaire, de transvection ou de réduite de Jordan, ainsi que des théorèmes encore plus exotiques qu'il renonce à citer.

S'il faut une conclusion, elle sera empruntée au simple bon sens : une préparation sérieuse et étalée dans le temps, une certaine familiarité préalable avec les ouvrages qu'on consultera au jour de l'épreuve, la volonté résolue de convaincre, sont des conditions nécessaires et - presque - suffisantes pour réussir au concours. Est-il besoin de dire qu'elles comptent aussi parmi les qualités de base chez un enseignant ?

3.2.— Liste des exposés d'algèbre et de géométrie

1 — Problèmes de dénombrement. Exemples.
2 — Exemples de structures algébriques quotients.
3 — Groupes finis. Exemples.
4 — Sous-groupes distingués. Applications.
5 — Parties génératrices d'un groupe . Exemples.
6 — Groupes abéliens finis.
7 — Groupe opérant sur un ensemble. Applications.
8 — Groupe des permutations d'un ensemble fini.
9 — Etude de quelques exemples d'anneaux-quotients.
10 — Etude de Z/nZ.
11 — Idéaux d'un anneau unitaire.
12 — Anneaux euclidiens. Exemples et applications.
13 — Anneaux principaux. Exemples et applications.
14 — Anneaux factoriels. Exemples et applications.
15 — Applications des nombres premiers.
16 — Corps. Exemples.
17 — Divers constructions du corps des nombres complexes. Théorème de d'Alembert-Gauss.
18 — Racines de l'unité.
19 — Algèbre des polynômes à une indéterminée sur un anneau commutatif.
20 — Factorisation dans l'anneau des polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.
21 — Fonctions polynômes d'une variable. Racines. Multiplicité.
22 — Anneaux-quotients de l'anneau des polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif.
23 — Polynômes irréductibles à une indéterminée sur un corps commutatif.
24 — Dérivations dans l'anneau des polynômes à une ou plusieurs indéterminées. Formule de Taylor.
25 — Polynômes symétriques.
26 — Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme sur un corps algébriquement clos. Applications.
27 — Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle à une indéterminée sur un corps commutatif. Cas de R et C.
28 — Théorie de la dimension des espaces vectoriels dans le cas fini.
29 — Sous-espaces vectoriels. Somme de sous-espaces. Espaces-quotients.
30 — Rang en algèbre linéaire.
31 — Groupe linéaire en dimension finie.
32 — Dualité dans les espaces vectoriels. Applications.
33 — Formes multilinéaires alternées. Exemples.
34 — Définition et propriétés des déterminants.
35 — Applications des déterminants.
36 — Equations linéaires.
37 — Réduite de Jordan sur les corps algébriquement clos.
38 — Décomposition d'un espace vectoriel en somme directe de sous-espaces stables indécomposables pour un endomorphisme.
39 — Polynôme caractéristique et polynôme minimal d'un endomorphisme.
40 — Applications de la réduction des matrices en algèbre linéaire.
41 — Formes bilinéaires alternées en dimension finie. Groupe symplectique.
42 — Vecteurs et sous-espaces isotropes relatifs à une forme bilinéaire symétrique ou alternée.
43 — Décomposition en carrés d'une forme quadratique. Classification sur R et C.
44 — Formes quadratiques. Groupe orthogonal.
45 — Espaces vectoriels euclidiens en dimension finie.
46 — Groupe orthogonal d'un espace euclidien de dimension finie.
47 — Espaces vectoriels hermitiens en dimension finie.
48 — Groupe unitaire.
49 — Dualité dans les espaces vectoriels euclidiens en dimension finie. Adjoint d'un endomorphisme. Réduction d'un endomorphisme symétrique.

50 — Dualité dans les espaces vectoriels hermitiens en dimension finie. Adjoint d'un endomorphisme auto-adjoint.
51 — Produit vectoriel. Produit mixte. Applications.
52 — Barycentres.
53 — Applications affines et groupe affine en dimension finie.
54 — Parties convexes d'un espace affine réel. Enveloppes convexes.
55 — Symétries orthogonales.
56 — Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie.
57 — Diverses notions d'angle en géométrie métrique (dimensions 2 et 3).
58 — Etude, sur des exemples en dimensions 2 et 3, des isométries d'un espace affine euclidien laissant globalement invariante une partie donnée.
59 — Similitudes planes directes et indirectes.
60 — Torseurs.
61 — Inversion plane. Groupe circulaire.
62 — Cercles et sphères en géométrie.
63 — Utilisation des nombres complexes en géométrie plane.
64 — Droite projective, homographie, involutions. Cas de R et C.
65 — Espaces projectifs. Groupe projectif.
66 — Coniques dans le plan affine euclidien.

4. BIBLIOTHEQUE DE L'AGREGATION

Les candidats étaient autorisés à utiliser pendant la préparation de leurs leçons tout livre imprimé vendu dans le commerce (à l'exclusion des textes dactylographiés ou ronéotypés, et en particulier des cours édités par les Universités à l'usage de leurs seuls étudiants).

En outre, ils pourront consulter sur place les ouvrages suivants :

ARTIN	*Algèbre géométrique* (Gauthier-Villars)
BASS	*Cours de Mathématiques* (Masson) tomes 1 et 2
BERGER	*Géométrie* (Nathan) : index, tome 1, tome 2
BERGER et GOSTIAUX	*Géométrie différentielle* (Colin)
BLANCHARD	*Corps non commutatifs* (Presses Universitaires)
BOURBAKI	Les tomes suivants :
	Théorie des ensembles
	Algèbre
	Fonction d'une variable réelle
	Topologie générale
	Espaces vectoriels topologiques
	intégration
BOUVIER et RICHARD	*Groupes* (Hermann)
BROUSSE	*Mécanique* (Colin)
CABANNES H.	*Cours de mécanique générale* (Dunod)
CAGNAC	*Cours de mathématiques supérieures* (Masson)
CAGNAC, RAMIS et COMMEAU	*Nouveau cours de mathématiques spéciales* (Masson)
CAGNAC et THIBERGE	*Géométrie*, Classes terminales C (Masson)
	Arithmétique/Algèbre, Classes terminales (Masson)
CARTAN	*Fonctions analytiques* (Hermann)
	Formes différentielles (Hermann)
	Calcul différentiel (Hermann)
CASANOVA	*Cours de mathématiques spéciales* (Belin)
CHAMBADAL et OVAERT	*Cours de mathématiques* (Gauthier-Villars) (tome 1 - tome 2, analyse)
	Algèbre linéaire et algèbre tensorielle (Dunod)
CHAZEL	*Traité de mathématiques* (Hachette)
CHOQUET	*Cours d'analyse* (Masson)
	L'enseignement de la géométrie (Hermann)
CONDAMINE et VISSIO	*Mathématiques : Terminales C et T* (Delagrave)
COUTY	*Analyse* (Colin)

DIEUDONNE	*Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* (Hermann)
	Sur les groupes classiques (Hermann)
	Calcul infinitésimal (Hermann)
	Eléments d'analyse (Gauthier-Villars) tomes 1 et 2
DIXMIER	*Fondements de l'analyse* (Hermann)
	Analyse M.P. (Gauthier-Villars)
DONEDDU	*Arithmétique générale* (Dunod)
	Cours de mathématiques spéciales (Dunod)
DUBREIL (M. et Mme)	*Leçon d'algèbre moderne* (Dunod)
DUBUC	*Géométrie plane* (Presses Universitaires)
EXBRAYAT et MAZET	*Algèbre, Analyse, Topologie*
FELLER	*An introduction to probality theory and its applications* (Viley) tomes 1 et 2
FRENKEL	*Algèbre et Géométrie*
	Géométrie pour l'élève professeur (Hermann)
GENET	*Mesure et Intégration* (Vuibert)
GODEMENT	*Algèbre* (Hermann)
GOURSAT	*Cours d'analyse* (Gauthier-Villars)
GOUYON	*Précis de mathématiques spéciales* (Vuibert)
HARDY G.H.	*A course of Pure Mathematics* (Cambridge University Press)
HENNEQUIN et TORTRAT	*Théorie des probabilités et quelques applications* (Masson)
HOCQUENGHEM et JAFFARD	*Mathématiques* (Masson) tomes 1 et 2
KERBRAT	*Géométrie des courbes et des Surfaces* (Hermann)
KREE	*Introduction aux Mathématiques appliquées* (Dunod)
KRIVINE	*Théorie axiomatique des ensembles* (Presses Universitaires)
LANG	*Introduction aux variétés différentiables* (traduction française)
	Algèbre - Linéar Algabra -
LEFORT	*Mathématiques pour les sciences biologiques et agronomiques* (Colin)
LELONG FERRAND (Mme) et ARNAUDIES	*Cours de mathématiques*, 4 tomes (Dunod)
LELONG FERRAND (Mme)	*Géométrie différentielle* (Masson)
MAC LANE et BIRKHOFF	*Algèbre, structures fondamentales* (traduction française), tome 1 (Gauthier-Villars)
	Les grands théorèmes (traduction française)
MAILLARD	*Classes terminales C* (Hachette)
MALLIAVIN	*Géométrie différentielle intrinsèque* (Hermann)
MARTIN P.	*Géométrie* (Colin)
METIVIER	*Introduction à la théorie des probabilités*
MUTAFIAN	*Le défi algébrique* (Vuibert) tomes 1 et 2
NEVEU J.	*Bases mathématiques du calcul des probabilités* (Masson)
PISOT et ZAMANSKY	*Mathématiques générales* (Dunod)
	Algèbre et algèbre linéaire (Dunod)
QUEYSANNE	*Algèbre* (Colin)
RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX	*Mathématiques spéciales* (Masson) tome 1 : algèbre ; tomes 3 et 4 : analyse
RIESZ et NAGY	*Leçons d'analyse fonctionnelle* (Gauthier-Villars)
RUDIN	*Real and complex analysis* (Mac Grandhill)
SAMUEL	*Théorie algébrique des nombres* (Hermann)
SCHWARTZ	*Cours d'analyse* (Hermann) tomes 1 et 2
SERRE	*Cours d'arithmétique* (Presses Universitaires)
VALIRON	*Cours d'analyse* (Masson) tomes 1 et 2
VAUQUOIS	*Les Probabilités* (Hermann)
WARUSFEL	*Structures algébriques finies* (Hachette)
ZAMANSKY	*Algébrique et analyse moderne* (Dunod)
ZISMAN	*Topologie algébrique* (Colin)