en tout cas d'asseoir solidement leurs connaissances sur les notions fondamentales en mécanique en reprenant leurs cours de second et même de premier cycle.

Résultats. Nombre de copies corrigées : 198
Répartition des notes (sur 40)

0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	30 à 35
24	122	12	18	10	8	1	3

RAPPORT SUR L'EPREUVE «PROBABILITES ET STATISTIQUES»

I.— Analyse du sujet :

Le problème était consacré à l'étude des concepts d'échangeabilité et de symétrie sphérique pour les vecteurs aléatoires et les suites de variables aléatoires.

Pour pouvoir composer un problème à la portée des candidats, il a fallu faire un découpage en questions qui gomme quelque peu les points essentiels. Ainsi n'est-il peut-être pas mauvais de mettre en évidence les résultats en fonction desquels le problème était composé :

- Le théorème de DE. FINETTI : Une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est échangeable si et seulement s'il existe un sous-tribu $\mathcal{G}$ de la tribu initiale $\mathcal{F}$ telle que, conditionnellement à $\mathcal{G}$, les (X_n) soient indépendants et de même loi (Partie I question 4, et partie III question 7).

- Si (X_n) est une suite à symétrie sphérique (donc échangeable) la limite :

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} X_j^2$ existe presque sûrement. Désignant par U cette limite, sous l'hypothèse $\{U = x\}$, les (X_n) sont indépendantes ont même loi, à savoir la loi gausienne centrée de variance x (partie IV questions 5 et 7).

- Enfin une caractérisation des suites à symétrie sphérique faisant intervenir la notion de fonction caractéristique, qui n'est pas valable pour les vecteurs à symétrie sphérique (partie IV question 8 et partie II question 4) : d'où l'on déduit que l'infini ne peut être fini !...

L'opinion du jury est que ce problème ne contenait aucune difficulté majeure car les candidats y étaient guidés d'assez près : en particulier les rappels et la partie préliminaire indiquaient la manière de s'y prendre pour obtenir facilement les résultats "théoriques" demandés. Dans le problème, étaient disséminées des applications qui demandaient un peu de calcul mais étaient du niveau D.E.U.G. (ou peu s'en faut !).

II.— Résultats généraux :

Nombre de copies corrigées : 699

Moyenne générale : 6,66 (sur 40)

Moyenne sans tenir compte des zéros : 9,86.

Notes	≤ 1	2 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25
Nombre de copies	301	102	104	92	41	33

Notes	26 à 30	31 à 35	36 à 40
Nombre de copies	15	7	2

Le lecteur aura certainement remarqué qu'il y a plus de la moitié de copies méritant une note ≤ 1, et parmi ces dernières, nombre de copies blanches (en fait 227). Et ce, malgré la relative facilité du problème...

Certaines erreurs signalées l'an passé ne son apparues que rarement cette année. C'est la preuve que le rapport est lu par certains candidats*. Cela nous encourage à signaler une erreur très couramment rencontrée cette année : Si $(\Omega, \mathcal{F})$ est un espace mesurable et si $\mathcal{G}$ est une partie quelconque de $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{F}$; alors deux probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$ qui coïncident sur $\mathcal{G}$ coïncident sur $\mathcal{F}$.

En règle générale les candidats semblent plus à l'aise dans des raisonnements de type "théorie de la mesure" que dans les arguments "probabilistes". Ce qui explique que les applications ont été trop souvent laissées de côté.

III.— Corrigé du problème

Préliminaires :

1° En utilisant le théorème de convergence dominée on voit que

$\mathcal{H} = \{A \text{ tel que } E(1_A . Z) = E(1_A \tilde{Z})\}$ est une classe monotone. En prenant des fonctions de la forme $\prod_{i=1}^{n} 1_{B_i}$ où $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ et par linéarité, il résulte que

* Du moins ceux qui n'ont pas remis de copie blanche.

l'algèbre engendrée par les ensembles $A = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i \in B_i)$ est contenue dans $\mathcal{A}$ donc ;
$\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$ et comme Z et $\tilde{Z}$ sont $\mathcal{G}$ mesurables on obtient $Z = \tilde{Z}$ P . p.s.

2° a) Pour $\mathcal{G} = \{\phi, \Omega\}$ $E(foX \mid \mathcal{G}) = E(foX)$; l'indépendance conditionnelle, par rapport à $\mathcal{G}$, des X_i équivaut donc à $\prod_{i=1}^{n} E(f_i(X_i)) = E(\prod_{i=1}^{n} f_i(X_i))$ pour toutes fonctions boréliennes bornées f_i, ce qui est encore équivalent à dire que les $\{X_i\}_{i=1...n}$ sont indépendantes.

b) Pour $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ $E(foX \mid \mathcal{F}) = foX$; ainsi l'indépendance par rapport à la tribu $\mathcal{F}$ se traduit par $\prod_{i=1}^{n} f_i(X_i) = \prod_{i=1}^{n} f_i(X_i)$ donc est toujours vérifiée.

I - 1° Notons $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(x) = (x, -x)$ alors
$P_{(\mathcal{U}, -\mathcal{U})} = \varphi o P_{\mathcal{U}} = \varphi o P_{-\mathcal{U}} = P_{(-\mathcal{U}, \mathcal{U})}$ ce qui suffit à montrer que $(\mathcal{U}, -\mathcal{U})$ est échangeable.

2° Soient f la densité de $(X_1, \dots, X_n)$ et φ une fonction borélienne bornée. Toute permutation $\Pi \in \Sigma_n$ se prolonge en une application unitaire $\tilde{\Pi}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ par $x = (x_1, \dots, x_n) \to \tilde{\Pi}(x) = (x_{\Pi(1)}, \dots, x_{\Pi(n)})$; alors
$E(\varphi o \tilde{\Pi} o X) = \int \varphi(x)\, dP_{X_\Pi}(x) = \int \varphi(\tilde{\Pi}(x))\, f(x)\, dx$. Comme le Jacobien de la transformation $\tilde{\Pi}$ est égal à ± 1, en faisant le changement de variable $y = \tilde{\Pi}(x)$ il vient $E(\varphi o X_\Pi) = \int \varphi(y)\, f(\tilde{\Pi}^{-1}(x))dx$, ce qui montre que X_Π est à densité, et comme $E(\varphi o X_\Pi) = E_{P_{X_\Pi}}(\varphi) = E_{P_X}(\varphi) = \int \varphi(y)\, f(y)dy$, on a $f = fo\tilde{\Pi}$ p.p. pour tout $\Pi \in \Sigma_n$: f est p.s. symétrique.

3° Notons que pour $i \neq j$ U_i est P p.s. différent de U_j.

Aussi pour tout f de R^n dans R, mesurable, on a :

$$E(f(Y_1, \dots, Y_n)) = E(f(Y_1 \dots Y_n) \sum_{\Pi \in \Sigma_n} 1_{U_{\Pi_1} < U_{\Pi_2} < \quad < U_{\Pi_n}})$$

$$= \sum_{\Pi \in \Sigma_n} E(f(U_{\Pi_1} \quad U_{\Pi_n})\, 1_{U_{\Pi_1} < U_{\Pi_2} < U_{\Pi_n}})$$

$$= n\,!\;\; E(f(U_1 \dots U_n)\; 1_{U_1 < U_2 \dots < U_n})$$

car $(U_1 \dots U_n)$ est échangeable.

La densité de $(Y_1 \dots Y_n)$ est donc $n!\, 1_{y_1 < \dots < y_n} \prod_{i=1}^{n} 1_{0 < y_i < 1}$

Le changement de variables

$$(x_1 \dots x_n) \rightsquigarrow (x_1, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}),$$ de jacobien 1 conduit à

la densité de $(X_1 \dots X_n)$:

$$n! \prod_{i=1}^{n} 1_{x_i > 0} \quad 1_{\sum_{i=1}^{n} x_i < 1}$$

qui est manifestement symétrique.

4° Soient $f_i\,(i = 1 \dots n)$ des fonctions boréliennes bornées et $\Pi \in \sum_n$ on a les égalités :

$$E\left(\prod_i^n f_i \circ X_{\Pi(i)}\right) = E\left[E\left(\prod_i^n f_i \circ X_{\Pi(i)} \mid \mathcal{G}\right)\right] = E\left[\prod_i^n E(f_i \circ X_{\Pi(i)} \mid \mathcal{G})\right]$$

le dernier membre est égal à $E\left[\prod_{i=1}^{n} E(f_i \circ X_i \mid \mathcal{G})\right]$ car les X_i ont même loi conditionnelle. En réutilisant l'indépendance conditionnelle on arrive à $E\left[E\left(\prod_i^n f_i \circ X_i \mid \mathcal{G}\right)\right]$ qui est égale à $E\left[\prod_i^n f_i \circ X_i\right]$ ce qui suffit à prouver que $X = (X_1, \dots, X_n)$ est échangeable.

5° Soit $J = \{j_1, \dots, j_p\}$; il existe $\Pi \in \sum_n$ telle que $\Pi(i) = j_i \quad i = 1 \dots p$

Comme X et X_Π ont même loi, leurs lois marginales sur les p-premières coordonnées sont égales donc $X_J = (X_{j_1}, \dots, X_{j_p})$ et $(X_1, \dots, X_p)$ ont même loi. Ce qui montre que X_J et X_K ont même loi si J et K ont même cardinal.

6° Avec la question précédente on voit que $X_i \overset{\mathcal{L}}{=} X_1 \quad i = 1 \dots n$ et

$$(X_1, X_2) \overset{\mathcal{L}}{=} (X_i, X_j) \text{ pour tout couple } (i,j) \in \{1 \dots n\}^2 \text{ avec } i \neq j,$$

d'où $\quad \mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}\,(X_i) + \sum_{1 \le i \ne j \le n} \mathrm{cov}(X_i, X_j) = n\,\sigma^2(1 + (n-1)b)$.

comme la variance est ≥ 0 on voit que $b \geq \frac{-1}{n-1}$

7° Pour tout $\omega \in \Omega$: $[f \circ X_i(\omega) - f \circ X_j(\omega)]\ [g \circ X_i(\omega) - g \circ X_j(\omega)] \geq 0.$

On en déduit par passage à l'espérance que :

$$E[f(X_i)\, g(X_i)] + E[f(X_j)\, g(X_j)] \geq E[f(X_i)\, g(X_j)] + E[f(X_j)\, g(X_i)]$$

et comme $(X_1,\dots, X_n)$ est échangeable il reste après simplification :

$$E(f(X_i)\ g(X_j)) \leq E(f(X_i)\ g(X_i)).$$

8° On a $E(\Phi^s oX) = \frac{1}{n\,!} \sum_{\Pi \in \Sigma_n} E(\Phi o X_\Pi) = \frac{1}{n\,!} \sum_{\Pi \in \Sigma_n} E(\Phi o X) = E(\Phi o X)$

et ceci sous la condition que $\Phi o X$ ait une espérance.

II - 1° On a vu en I. - 2° que l'application $\tilde{\Pi}$ induite par $\Pi \in \Sigma_n$ est unitaire donc tout vecteur à symétrie sphérique est échangeable.

La réciproque est fausse;par exemple dans le cas réel tout vecteur est échangeable par contre, l'application $x \to -x$ étant unitaire, X et $-X$ n'ont pas toujours même loi (exemple $X \equiv 1$).

2° Si φ désigne la fonction caractéristique de X à symétrie sphérique on a :
$\varphi_{AX}(u) = \varphi_X({}^tAu) = \varphi_X(u)$; donc X est à symétrie sphérique si et seulement si $\varphi oA = \varphi$ pour tout A unitaire. Remarquons que cette condition est équivalente à $\varphi(u)$ ne dépend que de $||u||$.

3° $\varphi_X(u) = E\,[e^{i\sum_{j=1}^{n} u_jX_j}] = E\,[E(e^{i\sum_i^n u_jX_j} \mid V)]$

$$= E\,[\prod_{j=1}^{n} E(e^{i\,u_jX_j} \mid V)] \quad \text{(avec l'indépendance conditionnelle)}$$

$$= E\,[\prod_{j=1}^{n} e^{-u_j^2 \frac{V}{2}}] = E(e^{-||u||^2 \frac{V}{2}})$$ ce qui, avec la question précédente, montre que X est à symétrie sphérique.

4°a) Une transformation unitaire laisse la mesure uniforme sur le cercle invariante, donc Y est à symétrie sphérique.

b) Désignons par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$; alors P_{Y_1} est équivalente (même ensembles nuls) à la trace de la mesure de Lebesgue sur $[-1, +1]$ donc $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $P_{Y_1}(A) = 0 \Leftrightarrow \lambda(A \cap [-1, +1]) = 0$.

Supposons les conditiions du 3° réalisées on aurait $E(1_A o Y_1) = E\,[E(1_A o Y_1 \mid V)]$ d'où $P_{Y_1}(A) = 0 \Leftrightarrow \lambda(A) = 0$ ce qui est manifestement, en contradiction avec l'expression précédente.

5° Le vecteur $(V, Y_1, \ldots, Y_n)$ a pour densité :

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})\,(2\sigma)^{\frac{m}{2}}\,(2\Pi\sigma)^{\frac{n}{2}}}\left[e^{-\frac{v+\sum_{j=1}^{n} y_j^2}{2\sigma}}\right] v^{\frac{m}{2}-1}\,1_{(v \geq 0)}\ .$$

Effectuons le changement de variables $v_1 = v$, $x_j = \frac{y_j}{\sqrt{v}}$ dont la matrice jacobienne est triangulaire, de déterminant $v^{-n/2}$. La densité de $(V, X_1, \ldots X_n)$ est

donc $$\frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})(2\sigma)^{\frac{n+m}{2}}\,\Pi^{n/2}}\left[e^{-\frac{v}{2\sigma}\,1+\sum_i^n x_j^2}\right] v^{\frac{n+m}{2}-1}\,1_{\mathbb{R}_+}(v).$$

La densité de $(X_1, \ldots, X_n)$ s'obtient en intégrant par rapport à v ; ce qui mène à

$$\frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\,\Pi^{n/2}}\;\frac{1}{(1+\sum_{j=1}^{n} x_j^2)^{\frac{n+m}{2}}}$$ sur $\mathbb{R}^n$. Cette densité est invariante pour tout opérateur unitaire . $(X_1, \ldots X_n)$ est donc à symétrie sphérique.

6° En effectuant le changement de variables $x_i' = x_i$ $i < n$ et $u_n = x_n(1+\sum_i^{n-1} x_j^2)^{-1/2}$ de jacobien $(1+\sum_{j=1}^{n-1} x_j^2)^{-1/2}$ on obtient la densité de $(X_1, \ldots, X_{n-1}, \mathcal{U}_n)$:

$$\frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\,\Pi^{\frac{n}{2}}}\,(1+\sum_{j=1}^{n-1} x_j^2)^{-\frac{n-m+1}{2}}\,(1+u_n^2)^{-\frac{n+m}{2}}$$

Les vecteurs $(X_1, \ldots, X_{n-1})$ et $\mathcal{U}_n$ sont indépendants et de lois respectives $\mathcal{C}^m_{n-1}$ et $\mathcal{C}^{n+m-1}_1$.

III. - 1° On a montré en I - 6° que $b \geq \frac{-1}{n-1}$ pour tout $n \geq 2$, donc $b \geq 0$.

2° Une probabilité définie sur $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}))$ est univoquement déterminée par ses projections fini - dimensionnelles (et non pas unidimensionnelles). Il en résulte que, pour tout $\Pi \in \sum_n'$, X et X_Π ont même loi. Ainsi notant h l'application mesurable $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \to h(x) = f(x_1)\,g(x)$ alors $E(h(X)) = E(h(X_\Pi))$

pour tout $\Pi \in \Sigma'_n$ et tout n (lorsque l'espérance existe). En particulier pour $\Pi = \Pi_j$ on obtient le résultat cherché.

3° a) Par hypothèse on peut écrire $Y = goX$ ou goX_Π p.s pour tout $\Pi \in \Sigma'_n$ donc $E(foX_j.Y) = E(f(X_j).g(X)) = E(f(X_j).g(X_{\Pi_j}))$ pour tout $j \leq n$, et avec III - 2° on obtient $E(f(X_j).Y) = E(f(X_1)Y)$;

D'où (1) $E[\frac{1}{n} \sum_1^n f(X_k)Y] = E(f(X_1).Y) = E(f(X_j).Y) \quad 1 \leq j \leq n.$

b) La fonction $x \to \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$ est évidemment n-symétrique et en prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{G}_n$ dans l'égalité (1) on voit que :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n foX_k = E(f(X_j) \mid \mathcal{G}_n) \text{ p.s pour tout } 1 \leq j \leq n.$$

4° En utilisant le 7° des rappels, on peut écrire, pour tout j :

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq j}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n foX_k = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq j}} E(foX_j \mid \mathcal{G}_n) = E(foX_j \mid \mathcal{G})$$

ce qui montre que les v.a. X_j ont, conditionnellement à la tribu $\mathcal{G}$, même loi.

5° En prenant comme permutation $\Pi \in \Sigma'_n$: $\Pi(i) = j_i \quad i \leq k$

où $(j_i)_{i=1\dots k} \in \mathcal{A}_n^k$ on a, avec la relation établie en III - 2°,

$$E[f(X_1,\dots,X_k)\, g(X)] = E[f(X_{j_1},\dots,X_{j_k})\, g(X_\Pi)] .$$

De même qu'au 3° on trouve pour Y n-symétrique bornée et $f(X_1,\dots, X_k)$ intégrable

$$E[\frac{1}{A_n^k} \sum_{(j_i)\in\mathcal{A}_n^k} f(X_{j_1},\dots, X_{j_k})\, Y] = E[f(X_{j_1},\dots, X_{j_k})\, Y]$$

et comme $\frac{1}{A_n^k} \sum_{(j_i)\in\mathcal{A}_n^k} f(x_{j_1},\dots,x_{j_k})$ est n-symétrique, on obtient pour tout

$(j_1,\dots, j_k) \in \mathcal{A}_n^k$: $E[f(X_{j_1},\dots, X_{j_k}) \mid \mathcal{G}_n] = \frac{1}{A_n^k} \sum_{(j_i)\in\mathcal{A}_n^k} f(X_{j_1},\dots,X_{j_k})$.

6° Posons $\alpha_1 = \sum_{(j_i)\in\mathcal{A}_n^k} f(X_{j_1},\dots, X_{j_k})$; $\alpha = \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_k=1}^n f(X_{j_1},\dots,X_{j_k})$

et $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$. Remarquons que si $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}^k$ alors

$\left|\frac{\alpha_2(\omega)}{n^k - A_n^k}\right|$ est uniformément borné en ω, n et $\frac{A_n^k}{n^k} \to 1$ pour $n \to \infty$.

En utilisant ces remarques et la relation $\frac{1}{n^k}\alpha = \frac{A_n^k}{n^k}\left[\frac{\alpha_1}{A_n^k} + \left(1-\frac{A_n^k}{n^k}\right)\left(\frac{\alpha_2}{n^k - A_n^k}\right)\right]$

on voit que $\frac{1}{n^k}\alpha \to E[f(X_1,\ldots,X_k) \mid \mathcal{G}]$.

ou de même $\frac{1}{n^k}\alpha \to E[f(X_{j_1},\ldots,X_{j_k}) \mid \mathcal{G}]$ pour tout k et tout $(j_1,\ldots j_k) \subset \mathbb{N}^*$

7° Soient $J = \{j_1,\ldots j_k\}$ une partie finie de $\mathbb{N}$ et f_i $i=1\ldots k$ des fonctions boréliennes bornées. "L'égalité" du 6° montre que :

$$E\left(\prod_i^n f_i(X_i) . \mid \mathcal{G}\right) = \lim_{n\,\infty} \frac{1}{n^k} \sum_{j_1=1}^{k} \cdots \sum_{j_k=1} f_1(X_{j_1})\ldots f_k(X_{j_k})$$

$$= \lim_{n\,\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f_i(X_j) = \prod_{i=1}^{k} \lim_{n\,\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_i(X_j)$$

$$= \prod_{i=1}^{k} E(f_i(X_i) \mid \mathcal{G})$$: Les (X_i) sont donc indépendants conditionnellement à $\mathcal{G}$.

IV - 1° $E(\exp(i\sum_{j=1}^{n} t_jX_j) \mid \mathcal{H}) = \prod_{j=1}^{n} E(\exp(it_jX_j) \mid \mathcal{H})$ avec l'indépendance conditionnelle;ou encore avec iii) de $A = \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \exp(it_jx)\, P_{X_j}(\omega, dx)$ p.s. Et, comme les X_j ont même loi conditionnelle, on obtient l'égalité recherchée :

$$E(\exp(i\sum_{j=1}^{n} t_jX_j) \mid \mathcal{H}) = \prod_{j=1}^{n} F(t_j,.) \quad P \quad \text{p.s.}$$

La fonction caractéristique de $\sum_{j=1}^{n} t_j X_j$ est $\varphi(t) = E(\exp(i\sum_j t\, t_j X_j))$.

En conditionnant par rapport à $\mathcal{H}$: $\varphi(t) = E(\prod_{j=1}^{n} F(tt_j,\omega))$.

2° Si $(X_1,\ldots, X_n)$ est à symétrie sphérique sa fonction caratéristique qui est d'après IV - 1°, $E(\prod_{j=1}^{n} F(t_j,\omega))$ ne dépend que de $\sum_{j=1}^{n} t_j^2$, d'après II - 2°,

3° Notons φ_4 la fonction caractéristique de (X_1,X_2,X_3,X_4). D'après II- 2°,

$\varphi_4(t_1,t_2,t_3,t_4) = g\left(\sum_{i=1}^{4} t_i^2\right)$. On a $E(F(t,\omega)\, F(-t,\omega)) = g\,(t^2+(-t^2)+0+0)$

et $E(F(t,\omega)\, F(-u,\omega)\, F(-v,\omega)) = g\,(2t^2)$

de même $E(F(u,\omega).\, F(v,\omega).F(-u,\omega).\, F(-v,\omega)) = g\,(2t^2)$.

D'où $E\left[|F(t,\omega) - F(u,\omega)\, F(v,\omega)|^2\right] = 0$ pour $t^2 = u^2 + v^2$.

Par conséquent l'ensemble $A_{u,v} = \{\omega | F(t,\omega) = F(u,\omega)\, F(v,\omega)\}$ est de probabilité 1.

4° Soit (u_n, v_n) une suite dense dans $\mathbb{R}^2$ et $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{u_n, v_n}$ alors $P(A) = 1$ et comme $F(t,\omega)$ est pour tout ω fixé, continue en t ; en prenant $\omega \in A$:

$F(\sqrt{u_n^2 + v_n^2}, \omega) = F(u_n,\omega) . F(v_n,\omega)$ et par continuité, pour tout $\omega \in A$

$F(\sqrt{u^2+v^2}, \omega) = F(u,\omega) . F(v,\omega)$. On en déduit (pour $u=-v$) que F est réelle.

D'après la partie B, il existe pour tout $\omega \in A$, un nombre $\mathcal{U}(\omega)$, nécessairement réel car F est réelle, tel que $F(t,\omega) = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathcal{U}(\omega) t^2\right)$. Posons $\mathcal{U}(\omega) = 0$ si $\omega \notin A$.

5° L'expression ci-dessus définissant $\mathcal{U}(\omega)$, montre de manière évidente, que si $F(t,.)$ est mesurable pour une certaine tribu, il en est de même pour $\mathcal{U}(.)$; ainsi $\mathcal{U}$ est $\mathcal{H}$ -mesurable.

En outre
$$E(\exp i \sum_{j=1}^{n} t_j X_j \,|\, \mathcal{U}) = E(E(\exp i \sum_j t_j X_j | \mathcal{H}) \,|\, \mathcal{U})$$
$$= E\left(\prod_{j=1}^{n} F(t_j, \omega) \,|\, \mathcal{U}\right) = E\left(\prod_j \exp\left(-\frac{\mathcal{U} t_j^2}{2}\right) \,|\, \mathcal{U}\right) = \prod_{j=1}^{n} e^{-\frac{\mathcal{U} t_j^2}{2}}$$

Ce qui prouve que, conditionnellement en $\mathcal{U}$, les variables aléatoires $(X_1, \dots X_n)$ sont indépendantes et de fonctions caractéristiques (conditionnelles) :

$\varphi_{X_i/\mathcal{U}}(t) = e^{-\frac{\mathcal{U} t^2}{2}}$, donc de même loi conditionnelle qui est d'ailleurs $\mathcal{N}_{\mathcal{U}(\omega)}$.

6° (X_n) est à symétrie sphérique si et seulement si il existe une v.a. $\mathcal{U}$, telle que conditionnellement à $\mathcal{U}$, les X_n sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}_{\mathcal{U}(\omega)}$. La partie ci-dessus montre le caractère nécessaire de cette assertion et la partie II- 3° montre qu'elle est suffisante

7° La suite (X_i) est échangeable, (II - 1°), et comme $E(X_i^2)$ existe prenons comme fonction f : $f(x) = x^2$ dans III - 4° : $\lim_{n\,\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j^2 = E(X_1^2 | \mathcal{G})$ p.s.

Enfin, dans la partie IV, prenons $\mathcal{H} = \mathcal{G}$. Or IV - 4° montre que la loi conditionnelle de X_1 par rapport à $\mathcal{H}$ est $\mathcal{N}_{\mathcal{U}(\omega)}$ donc $E(X_1^2 | \mathcal{H}) = \mathcal{U}$ p.s.

8° La condition est nécessaire : on prend pour μ la loi de la v.a. $\mathcal{U}$ obtenue en IV - 4° . La fonction caractéristique de $(X_1, \dots, X_n)$ est :

$$E\left[E(\exp(i \sum_{j=1}^{n} t_j X_j) | \mathcal{H})\right] = E\left(\exp - \frac{1}{2} \sum_j t_j^2\, \mathcal{U}\right) \text{ ou encore,}$$

avec $t^2 = \sum_1^n t_j^2$, $\int_{[0,\infty[} \exp(-xt^2)d\mu(t)$.

La condition est suffisante car alors $(X_1,\dots,X_n)$ est à symétrie sphérique, II - 2°, pour tout n donc la suite est à symétrie sphérique.

Enfin le résultat est faux pour un vecteur : contre exemple II - 4°.

9° La suite de v.a. $X_j = \dfrac{Z_j}{\sqrt{V}}$ est telle que $(X_1,\dots,X_n)$ suit la loi $\mathcal{C}_n^m$, et est donc à symétrie sphérique : $\mathcal{U}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j^2$ converge donc, p.s, vers $E(X_j^2 \mid V) = \frac{1}{V} E(Z_j^2 \mid V)$ ou encore $\frac{\sigma}{V}$ car Z_j est indépendante de V.

10° On montre aisément, par récurrence, et en utilisant II - 6°, que $(X_1,\dots,X_n)$ suit la loi $\mathcal{C}_n^m$. Nous sommes ramenés à la question précédente et $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j^2$ converge p.s. vers $E(X_1^2 \mid \mathcal{G})$ qui a même loi que $\frac{\sigma}{V}$, c'est-à-dire, de densité :

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})2^{\frac{m}{2}}} \quad \exp\left(-\frac{1}{2x}\right).\ x^{-\frac{m}{2}-1} \qquad 1_{\mathbb{R}_+}(x)$$

11° L'égalité suivante se prouve facilement par récurrence :

$$\prod_{j=1}^n (1 + Y_j^2) = 1 + \sum_{j=1}^n X_j^2 .$$

Ainsi $\lim_{n\,\infty} \frac{1}{n} \prod_{j=1}^n (1 + Y_j^2) = \lim_{n\,\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2 = E(X_1^2 \mid \mathcal{G})$ p.s.