MÉCANIQUE

INTRODUCTION

Un système matériel $\mathcal{S}$ est constitué de n solides (S_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ pouvant être en contact entre eux ou en contact avec p obstacles (Σ_j) $(j = 1, 2, \ldots, p)$ ne faisant pas partie du système. On appelle S_i la surface limitant le solide (S_i) et on suppose qu'en chaque point de S_i il existe un plan tangent dépendant continuement de la position du point. On considère un contact ponctuel entre deux solides appartenant à $\mathcal{S}$ (par exemple (S_1) et (S_2)) et on appelle $\vec{V}_g$ la vitêsse de glissement de (S_2) par rapport à (S_1). On suppose que les actions de contact de (S_2) sur (S_1) se réduisent à un vecteur unique $\vec{R}$ qu'on projette sur la normale commune à S_1 et S_2 suivant le vecteur $\vec{N}$ et sur le plan tangent commun suivant le vecteur $\vec{T}$.

Montrer que, dans un mouvement quelconque du système, la puissance des forces de contact entre (S_1) et (S_2) est nulle dans les trois cas suivants, dont les deux premiers sont classiques :

1. Contact sans glissement;

2. Contact sans frottement;

3. La nature des surfaces en contact permet de supposer qu'à chaque instant les vecteurs $\vec{V}_g$ et $\vec{T}$ sont orthogonaux.

Ces résultats peuvent-ils être étendus, sans restriction, au cas d'un contact entre un solide (S_i) et un obstacle (Σ_j) ?

L'objet du problème est l'étude du troisième cas. On dira qu'une surface S est *rainurée* s'il existe une famille de courbes (Γ) tracées sur S telle que par chaque point de S (à l'exception peut-être d'un nombre fini de points singuliers) passe une courbe (Γ) et une seule et telle que les propriétés suivantes soient satisfaites :

a. La vitesse de glissement est tangente à la courbe (Γ) passant par le point de contact.

b. Il existe une condition de « non frottement le long des rainures » traduite par le fait que $\vec{T}$ reste orthogonal à (Γ).

PARTIE I

1° On étudie les mouvements d'une sphère (S) homogène, de rayon a, de centre C, de masse m, pesante, au contact d'un plan (P) incliné de l'angle α $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ sur le plan horizontal. Le plan (P), fixe, est rainuré suivant une famille de droites parallèles et on choisit dans (P) deux vecteurs unitaires $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$ fixes et orthogonaux, dont le premier est parallèle aux rainures. On complète par le vecteur $\vec{k}_1$ orthogonal à (P) pour définir le repère fixe O, $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$, $\vec{k}_1$ par rapport auquel on étudiera le mouvement de (S) dans les trois cas suivants :

a. Les rainures sont horizontales;

b. Les rainures sont dirigées suivant la ligne de pente de (P);

c. Les rainures sont dirigées suivant la direction faisant dans le plan (P) l'angle β avec les horizontales. On précisera dans ce cas la direction asymptotique de la courbe décrite par C.

2° On considère maintenant le cas où le plan (P) est horizontal ($\alpha = 0$) et fixe, et on étudie les mouvements de la sphère (S) définie à la question précédente au contact de (P). L'une des deux surfaces P ou S est rainurée, les rainures pouvant être des courbes quelconques. Soit A le point géométrique de contact de S et de P (qui est la projection de C sur P). Comparer le moment dynamique de la sphère (S) par rapport au point A avec la dérivée par rapport au temps du moment cinétique par rapport à ce même point A. En déduire trois intégrales premières pour le mouvement de (S). Montrer que la vitesse de glissement reste constante en module.

(On pourra utiliser cette question dans la suite, mais on pourra aussi aborder indépendamment les questions suivantes.)

3° On étudie les mouvements de la sphère (S) au contact avec le plan (P), horizontal, fixe et rainuré. On désigne par O, i_1, j_1, k_1 un repère fixe orthonormé, $O, \vec{i_1}, \vec{j_1}$ définissant le plan (P). Les paramètres à utiliser sont : les coordonnées polaires ρ, θ de la projection A de C sur P, et les composantes p, q, r de la rotation instantanée de (S) sur le repère mobile, $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k_1}$ déduit de $O, \vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1}$ par la rotation d'angle θ et d'axe $\vec{k_1}$.

Former les équations du mouvement de (S) dans les deux cas suivants :

a. Les rainures sont les droites de P passant par O.

b. Les rainures sont les cercles de P centrés en O.

Dans le cas *a.* on écrira l'équation différentielle qui définit les variations de ρ en fonction du temps. On montrera qu'on peut exprimer t, ρ puis les autres paramètres explicitement en fonction de $\dot{\rho} = x$ considéré comme une variable indépendante.

Dans le cas *b.* on ramènera le problème à la résolution d'une équation du type $\dot{\rho}^2 = F(\rho)$; on montrera que C décrit une conique dont on précisera le paramètre et l'excentricité en fonction de la vitesse initiale de glissement v_0, de la constante des aires k et de la vitesse initiale V_1 de C.

4° On étudie les mouvements sur le plan horizontal fixe (P), lisse, d'une sphère (S) de mêmes caractéristiques que la précédente, mais rainurée. Le repère fixe est le même que dans la question précédente. Les paramètres à utiliser sont : les coordonnées cartésiennes x, y de la projection A de C sur P, les angles d'Euler ψ, θ, φ définissant la position d'un repère $C, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lié à la sphère par rapport à $O, \vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1}$. Soit Cz le troisième axe de ce repère. Former les équations du mouvement de (S) dans les deux cas suivants :

a. (S) est rainurée suivant les parallèles, c'est-à-dire les cercles ayant pour axe Cz;

b. (S) est rainurée suivant les méridiens, c'est-à-dire les grands cercles dont le plan contient Cz.

On introduira les composantes r et r_1 de la rotation instantanée de (S) respectivement sur $\vec{k}$ et sur $\vec{k_1}$.

Dans le cas *a.* on ramènera le problème à la résolution d'une équation du type $\dot{\theta}^2 = G(\theta)$ qu'on discutera en fonction de la valeur initiale de la vitesse de glissement v_0 et des valeurs initiales de r et de r_1.

Dans le cas *b.* on formera l'équation différentielle définissant les variations de θ en fonction du temps.

PARTIE II

1° Le système $\mathcal{S}$ est repéré par N paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_N$ soumis à des liaisons non holonômes de la forme :

(1)
$$f_j(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, t) \equiv \sum_{i=1}^{N} a_{ij}\dot{q}_i + a_j = 0$$

où les a_{ij} et les a_j sont des fonctions des $N + 1$ variables $q_1, \ldots, q_N, t$.

Montrer que les conditions cinématiques imposées par le fait que certaines surfaces S_i et Σ_j de l'introductio[n] soient rainurées sont de la forme (1).

Les liaisons (1) sont dites « satisfaisant à la condition des puissances virtuelles » si la puissance virtuelle de[s] forces de liaison est nulle pour tout champ de vitesses virtuelles compatible avec les liaisons telles qu'elles existen[t] à l'instant t. Montrer que la condition des puissances virtuelles est satisfaite en présence des hypothèses *a.* et *b.* d[e] l'introduction, et ceci aussi bien dans le cas de contacts entre solides appartenant au système $\mathcal{S}$ que de contac[ts] avec des obstacles fixes ou mobiles.

En tirer une conclusion quant à l'utilisation de la méthode des multiplicateurs de Lagrange à un systèm[e] comportant des surfaces rainurées.

2° On se place pour cette question dans le cas particulier où :

a. Les relations (1) sont homogènes, c'est-à-dire $a_j = 0$;

b. Il existe une fonction de force U, indépendante du temps, pour l'ensemble des forces exercé[es] sur le système autres que les actions de contact déjà envisagées;

c. L'expression de l'énergie cinétique E est homogène par rapport aux dérivées $\dot{q}_i$ des paramètr[es]

Retrouver à partir des équations de Lagrange avec multiplicateurs l'intégrale première de l'énergie sous la forme $E = U + h$ (h = constante).

3° On abandonne les hypothèses du paragraphe précédent, à l'exception de l'existence d'une fonction de force U, mais qui peut maintenant dépendre du temps. A quelles conditions peut-on obtenir à partir des équations de Lagrange avec multiplicateurs une intégrale première du type de Painlevé?

Application : on reprend la situation étudiée au 3° cas *a*. de la première partie, mais en supposant que le plan (P), rainuré suivant les droites passant par O, est animé d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire constante ω autour de Oz_1, axe passant par O et de vecteur unitaire $\vec{k_1}$. Étudier le mouvement de la sphère (S).

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

NOTATIONS ET RAPPELS

1° Pour tout entier $n \geqslant 1$ on désignera par Σ_n l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Chaque fois que l'on aura à utiliser une propriété de Σ_n, on l'énoncera avec soin, mais on ne la démontrera pas.

2° Soit $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; on notera Φ^s l'application symétrisée de Φ définie par :

$$(x_1, \ldots, x_n) \rightsquigarrow \frac{1}{n!} \sum_{\Pi \in \Sigma_n} \Phi(x_{\Pi(1)}, \ldots, x_{\Pi(n)}).$$

Φ sera dite symétrique si elle est identique à sa symétrisée.

3° On considérera sur $\mathbb{R}^n$ le produit scalaire usuel défini par

$$< x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{pour tous} \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \quad \text{et} \quad y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Une application linéaire A de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même sera dite unitaire si elle conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$< A(x), A(y) > = < x, y > \quad \text{pour tout} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$\mathbb{R}^n$ sera muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}^n$.

4° Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé; l'expression « variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ » signifiera :

— soit une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$;
— soit une classe d'équivalence relativement à P de telles applications.

On notera P_X la loi d'une variable aléatoire X.

Sauf mention explicite, chaque fois qu'on considérera une famille de variables aléatoires, on les supposera définies sur un même espace $(\Omega, \mathcal{F})$.

Si X est une variable aléatoire réelle intégrable on désignera par $E\{X\}$ son espérance mathématique et $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ désignera l'espace des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ intégrables (c'est un ensemble de P-classes d'équivalence).