COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Durée : 6 heures

ANALYSE NUMÉRIQUE

0. NOTATIONS ET DÉFINITIONS

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.

$\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker défini pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ par :

$$\begin{cases} \delta_{i,j} = 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ \delta_{i,i} = 1 & \end{cases}$$

$\mathbb{R}$ est le corps des nombres réels, $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

Les espaces vectoriels introduits sont définis sur le corps $\mathbb{R}$. Sauf dans **Q. 3** *a.*, les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire euclidien noté $<.,.>$ et de la norme associée, notée $\|.\|$. $\mathbb{R}^2$ désigne aussi l'espace affine (muni de l'origine $(0,0)$) attaché à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. L'angle des vecteurs x et y appartenant à $\mathbb{R}^2$ est noté $(\widehat{x,y})$.

On appelle triangle T l'enveloppe convexe de trois points non alignés A_1, A_2, A_3, de $\mathbb{R}^2$. On rappelle que si $M \in \mathbb{R}^2$, il existe des nombres réels $\lambda_i^T(M)$ $(i = 1, 2, 3)$ définis de façon unique par :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \lambda_i^T(M)\, \overrightarrow{MA_i} = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \lambda_i^T(M) \qquad = 1 \end{cases}$$

appelés coordonnées barycentriques de M relativement à A_1, A_2, A_3. L'indice T pourra être omis s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le triangle considéré. On désigne par $h(T)$ le diamètre du triangle T et par $\delta(T)$ le diamètre du cercle inscrit dans le triangle T.

ESPACES $C^k(\mathcal{O})$; $C^k(\overline{\mathcal{O}})$.

Pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$, d'adhérence $\overline{\mathcal{O}}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $C^k(\mathcal{O})$ est l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathcal{O}$ qui sont (lorsque $k \geqslant 1$) k fois continûment différentiables dans $\mathcal{O}$.

$C^k(\overline{\mathcal{O}})$ est l'espace vectoriel des restrictions à $\overline{\mathcal{O}}$ des fonctions de $C^k(\mathbb{R}^2)$. Si $v \in C^k(\overline{\mathcal{O}})$ et si $\mathcal{O}$ est borné, on note :

$$\|v\|_{C^k(\overline{\mathcal{O}})} = \sup_{\alpha_1+\alpha_2=k} \left(\sup_{x \in \overline{\mathcal{O}}} \left| \frac{\partial^k v(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2}} \right| \right)$$

où $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$, $x = (x_1, x_2)$.

Pour $M \in \mathcal{O}$, $u \in C^k(\mathcal{O})$, et $1 \leqslant p \leqslant k$, on note $D_M^p u$ la dérivée d'ordre p en M de la fonction u, considérée comme forme p-linéaire symétrique sur $(\mathbb{R}^2)^p$.

On pose

$$\left| D_M^p u \right|^* = \sup \left\{ \left| D_M^p u (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(p)}) \right|, \quad x^{(i)} \in \mathbb{R}^2, \quad \| x^{(i)} \| = 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant p \right\}$$

$D_M^1 u$ est noté $D_M u$.

ESPACES $L^p(U)$; $L^\infty(U)$.

Les mesures et les intégrales considérées sont prises au sens de Lebesgue dans $\mathbb{R}^2$.

Soit U un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^2$ dont la mesure est notée mes U.

Dans tout le problème, par commodité de langage, on désignera indifféremment par v une classe de fonctions (pour la relation d'équivalence définie par l'égalité presque partout) ou une fonction appartenant à la classe de v. Si la classe de v contient une fonction continue, on la choisira systématiquement comme représentant de cette classe.

Pour $p \in \mathbb{R}$, $p \geqslant 1$, on note $L^p(U)$ l'espace de Banach des classes de fonctions v définies presque partout (p. p.) sur U, mesurables, dont la valeur absolue est de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrable, muni de la norme :

$$\| v \|_{L^p(U)} = \left(\int_U | v(x) |^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\iint_U | v(x_1, x_2) |^p \, dx_1 \, dx_2 \right)^{\frac{1}{p}}$$

$L^\infty(U)$ est l'espace de Banach des classes de fonctions v définies et bornées p. p. sur U, mesurables, muni de la norme :

$$\| v \|_{L^\infty(U)} = \inf \{ \alpha ; \; \alpha \in \mathbb{R}, \; | u(x) | \leqslant \alpha \text{ p. p. dans U} \}.$$

ESPACE $\mathcal{D}(\mathcal{O})$.

Si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on note $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathcal{O}$, indéfiniment différentiables sur $\mathcal{O}$ et à support compact dans $\mathcal{O}$.

On admettra que, pour tout $p \geqslant 1$, $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ est dense dans $L^p(\mathcal{O})$.

Si v est une fonction définie sur U et si $V \subset U$, on note $v|_V$ sa restriction à V.

Soit enfin P_1 l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels à deux variables réelles (x_1, x_2) de degré $\leqslant 1$ et $P_1(U) = \{ p|_U ; \; p \in P_1 \}$.

I

Dans **Q. 1**, **Q. 2**, **Q. 3**, et sauf précision contraire, les indices i, j utilisés prennent les valeurs 1, 2, 3.

Q. 1 Soit T un triangle de sommets A_1, A_2, A_3.

a. Montrer que si $u \in C^0(\mathbb{R}^2)$ la fonction $\bar{u}_T$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall M \in \mathbb{R}^2, \; \bar{u}_T(M) = \sum_i \lambda_i(M) \, u(A_i)$$

est l'unique élément de P_1 vérifiant

$$\bar{u}_T(A_i) = u(A_i) \quad (i = 1, 2, 3)$$

b. Vérifier que $D_M \lambda_i$ est indépendant de M.

On pose alors $D_M \lambda_i = D \lambda_i$.

Démontrer que

$$\forall M \in \mathbb{R}^2, \; D\lambda_i\left(\overrightarrow{MA_j}\right) = \delta_{i,j} - \lambda_i(M)$$

et

$$\frac{1}{h(\mathrm{T})} \leqslant |\mathrm{D}\lambda_i|^* \leqslant \frac{1}{\delta(\mathrm{T})}$$

c. Soit $u \in \mathrm{C}^2(\mathrm{T})$; montrer, en utilisant une formule de Taylor en M, que :

$$\| u - \bar{u}_{\mathrm{T}} \|_{\mathrm{C}^0(\mathrm{T})} \leqslant \frac{1}{2} \mathrm{K}_2 h^2(\mathrm{T})$$

et

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i}(u - \bar{u}_{\mathrm{T}}) \right\|_{\mathrm{C}^0(\mathrm{T})} \leqslant \frac{3}{2} \mathrm{K}_2 \frac{h^2(\mathrm{T})}{\delta(\mathrm{T})} ; \quad 1 \leqslant i \leqslant 2$$

où $\mathrm{K}_2 = \sup\limits_{\mathrm{M} \in \mathrm{T}} \left| \mathrm{D}^2_{\mathrm{M}} u \right|^*$.

Q. 2 On identifie $\mathrm{D}\lambda_i$ à l'élément de $\mathbb{R}^2$: $\left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial x_1}, \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_2} \right)$, noté grad λ_i.

On suppose qu'il existe $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $i \neq j$:

(1) $$\cos \left(\widehat{\mathrm{grad}\,\lambda_i, \mathrm{grad}\,\lambda_j} \right) \leqslant \sigma_0 < 0$$

a. Montrer qu'il existe $h_0 > 0$ tel que si $h(\mathrm{T}) \in]0, h_0]$, pour tout $i \neq j$:

$$\int_{\mathrm{T}} [< \mathrm{grad}\,\lambda_i, \mathrm{grad}\,\lambda_j > + \lambda_i(x) \lambda_j(x)] \, dx < 0$$

b. Caractériser les angles du triangle T, lorsque l'hypothèse (1) est vérifiée.

Q. 3 Soient T et $\hat{\mathrm{T}}$ deux triangles de sommets respectifs A_i et $\hat{\mathrm{A}}_i$.

a. Définir une application affine bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que T soit l'image de $\hat{\mathrm{T}}$ et A_i soit l'image de $\hat{\mathrm{A}}_i$.

b. Soit $v \in \mathrm{P}_1$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathrm{T}, \; v(x) \geqslant 0$$

Montrer que pour tout $p \geqslant 1$:

$$\| v \|^p_{\mathrm{L}^p(\mathrm{T})} \geqslant \mathrm{C}_1 \, \mathrm{mes}\, \mathrm{T} \sum_i (v(\mathrm{A}_i))^p$$

$$\text{où} \quad \mathrm{C}_1 = \frac{1}{\mathrm{mes}\, \hat{\mathrm{T}}} \min \left\{ \int_{\hat{\mathrm{T}}} \left(\lambda_i^{\hat{\mathrm{T}}}(\hat{x}) \right)^p d\hat{x} ; \; i = 1, 2, 3 \right\}.$$

Q. 4 Soit Φ une fonction décroissante définie pour $t \geqslant k_0 \geqslant 0$ (k_0 nombre réel donné) à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que pour tout k et l vérifiant $l > k \geqslant k_0$ on ait :

$$\Phi(l) \leqslant \frac{\mathrm{C}}{(l - k)^\alpha} (\Phi(k))^\beta$$

C, α, β étant des nombres réels positifs ; $\beta > 1$.

On définit $d \in \mathbb{R}^+$ par :

$$d^\alpha = \mathrm{C} (\Phi(k_0))^{\beta - 1} \, 2^{\frac{\alpha\beta}{\beta - 1}}$$

Montrer que la suite $(\Phi(k_s))_{s\in\mathbb{N}}$ où $k_s = k_0 + d - \frac{d}{2^s}$, vérifie :

$$\forall s \in \mathbb{N},\ \Phi(k_s) \leqslant 2^{\frac{s\alpha}{1-\beta}} \Phi(k_0)$$

et en déduire que :

$$\forall t \geqslant k_0 + d \quad , \quad \Phi(t) = 0.$$

II

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière est de mesure nulle; pour $p \in \mathbb{R}$, $p > 1$, on désigne par $W^{1,p}(\mathcal{O})$ l'espace vectoriel des classes de fonctions $u \in L^p(\mathcal{O})$ telles qu'il existe u_1 et u_2 appartenant à $L^p(\mathcal{O})$ vérifiant :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}),\ \int_{\mathcal{O}} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx = - \int_{\mathcal{O}} u_i(x)\, \varphi(x)\, dx\,; \quad i = 1, 2. \tag{2}$$

Q. 5 *a.* Montrer que si $\mathcal{O}$ est borné et si $u \in C^1(\overline{\mathcal{O}})$ alors $u \in W^{1,p}(\mathcal{O})$ et on peut choisir $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$; $i = 1, 2$.

b. Montrer que pour tout ouvert $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$, si u appartient à $W^{1,p}(\mathcal{O})$, u_1 et u_2 vérifiant (2) sont définis de manière unique.

On dit alors que u_i est la dérivée généralisée de u par rapport à x_i et on la note $\partial_i u$ $(i = 1, 2)$.

c. Montrer que si $\mathcal{O}$ est borné, si $p \geqslant q$, alors $W^{1,p}(\mathcal{O}) \subset W^{1,q}(\mathcal{O})$.

d. Montrer que pour tout ouvert $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$, $W^{1,p}(\mathcal{O})$ muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\mathcal{O})} = \left(\|u\|^p_{L^p(\mathcal{O})} + \sum_{i=1}^{2} \|\partial_i u\|^p_{L^p(\mathcal{O})} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3}$$

est un espace de Banach et que $W^{1,2}(\mathcal{O})$ que l'on notera $H^1(\mathcal{O})$ est un espace de Hilbert, dont le produit scalaire associé à la norme (3) est noté $a(\,.\,,\,.\,)$.

Q. 6 Soit $W^{1,p}_0(\mathcal{O})$ l'ensemble des classes de fonctions de $W^{1,p}(\mathcal{O})$ dont le prolongement par 0 dans le complémentaire de $\mathcal{O}$ (dans $\mathbb{R}^2$) appartient à $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$.

$W^{1,2}_0(\mathcal{O})$ est noté $H^1_0(\mathcal{O})$.

Montrer que pour $p > 1$, $W^{1,p}_0(\mathcal{O})$ muni de la norme (3) est un sous-espace vectoriel fermé de $W^{1,p}(\mathcal{O})$.

III

Soient Ω un ouvert borné convexe de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ polygonale et $h_0 \in \mathbb{R}$ $(h_0 > 0)$. À tout $h \in]0, h_0]$ on associe un recouvrement fini de $\overline{\Omega}$ par des triangles de diamètres $\leqslant h$ contenus dans $\overline{\Omega}$, de sorte que l'intersection de deux triangles du recouvrement, lorsqu'elle est non vide, soit un côté ou un sommet commun aux deux triangles.

Un tel recouvrement est appelé triangulation de Ω et noté $\mathcal{T}_h$ (considéré comme un ensemble de triangles).

On supposera dans toute la suite qu'il existe $\sigma > 0$ tel que :

(4) $$\forall h \in]0, h_0] \quad ; \quad \max_{T \in \mathcal{C}_h} \frac{h(T)}{\delta(T)} \leqslant \sigma$$

On note b_i $(1 \leqslant i \leqslant N)$, (resp. b_i $(N+1 \leqslant i \leqslant N+M)$) les sommets des triangles de $\mathcal{C}_h$ appartenant à Ω (resp. à Γ).

Soit W_h l'espace vectoriel des fonctions $w_h \in C^0(\overline{\Omega})$ telles que

$$\forall T \in \mathcal{C}_h \quad , \quad w_h|_T \in P_1(T)$$

Soit V_h le sous-espace de W_h des fonctions de W_h nulles en b_i ; $N+1 \leqslant i \leqslant N+M$.

Q. 7 *a.* Montrer que, pour $1 \leqslant i \leqslant N+M$, il existe une fonction w_i unique vérifiant :

$$\begin{cases} w_i \in W_h \\ w_i(b_j) = \delta_{i,j} \quad , \quad 1 \leqslant j \leqslant N+M \end{cases}$$

b. Montrer que

$$\{ w_i \quad ; \quad 1 \leqslant i \leqslant N+M \} \text{ est une base de } W_h.$$

En déduire une base de V_h.

c. Montrer que

$$\forall p > 1 \begin{cases} W_h \subset W^{1,p}(\Omega) \\ V_h \subset W_0^{1,p}(\Omega) \end{cases}$$

d. On admettra que si $p > 2$, pour tout élément u de $W^{1,p}(\Omega)$, il existe un représentant de la classe de u appartenant à $C^0(\overline{\Omega})$. Montrer alors que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $p > 2$, il existe une fonction unique $\tilde{u}_h \in W_h$ vérifiant

$$\tilde{u}_h(b_i) = u(b_i) \quad ; \quad 1 \leqslant i \leqslant N+M.$$

Q. 8 Montrer que, si $u \in C^2(\overline{\Omega})$, pour tout $p > 2$ il existe $K > 0$ indépendant de h tel que

$$\| u - \tilde{u}_h \|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant K h \| u \|_{C^2(\overline{\Omega})}.$$

IV

On donne pour $p > 2$

(5) $$\begin{cases} f_i \in L^p(\Omega) \qquad i = 0, 1, 2 \\ u_0 \in W^{1,p}(\Omega) \end{cases}$$

On pose pour $r \geqslant 2$

(6) $$\forall v \in W^{1,r}(\Omega), \; L(v) = \int_\Omega \left(f_0(x)\, v(x) + \sum_{i=1}^{2} f_i(x)\, \partial_i v(x) \right) dx$$

(7) $$u_{0h} = \sum_{i=N+1}^{N+M} u_0(b_i)\, w_i$$

On considère pour tout $h \in]0, h_0]$ le problème :

$$(P_h) \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in W_h \text{ vérifiant} \\ \forall v_h \in V_h, \; a(u_h, v_h) = \displaystyle\int_\Omega \left(u_h(x)\, v_h(x) + \sum_{i=1}^{2} \partial_i u_h(x)\, \partial_i v_h(x) \right) dx = L(v_h) \\ u_h - u_{0h} \in V_h \end{cases}$$

ıpar-

isse
que

Q. 9 Montrer que (P_h) admet une solution unique.

Q. 10 On pose, pour $1 \leqslant i, j \leqslant N + M$

$$a_{ij} = a(w_j, w_i)$$
$$h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h(T)$$
$$\sigma(T) = \max_{1 \leqslant r < s \leqslant 3} \left(\cos \left(\widehat{\operatorname{grad} \lambda_r^T, \operatorname{grad} \lambda_s^T} \right) \right)$$
$$\sigma(h) = \max_{T \in \mathcal{T}_h} \sigma(T)$$

On suppose dans toute la suite qu'il existe $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ tel que

(8) $$\forall h \in]0, h_0] \qquad \sigma(h) \leqslant \sigma_0 < 0$$

a. Montrer qu'alors l'hypothèse (4) est vérifiée.

b. Montrer qu'il existe $\bar{h}\,(\bar{h} > 0)$ tel que si $h \in]0, \bar{h}]$;

(9) $$\begin{cases} a_{ij} \leqslant 0, \ 1 \leqslant i < j \leqslant N + M, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{N+M} a_{ij} > 0 ; \qquad 1 \leqslant i \leqslant N + M \end{cases}$$

Q. 11 *a.* Soient $\xi_i\,(1 \leqslant i \leqslant N + M)$ des nombres réels donnés et $\gamma \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$\gamma \geqslant \xi_i \quad (N + 1 \leqslant i \leqslant N + M)$$

On pose $\eta_i = \min(\gamma, \xi_i)$; $1 \leqslant i \leqslant N + M$.
Établir que :

$$\sum_{i=1}^{N+M} \sum_{j=1}^{N+M} a_{ij}(\xi_i - \eta_i)\,\eta_j \geqslant 0$$

b. Soit $u_h \in W_h$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\alpha \geqslant u_h(b_i), \quad N + 1 \leqslant i \leqslant N + M$$

Soit $u_{h,\alpha}$ la fonction de W_h telle que

$$u_{h,\alpha}(b_i) = \min\{\alpha, u_h(b_i)\} \ ; \ 1 \leqslant i \leqslant N + M$$

On pose

$$v_{h,\alpha} = u_h - u_{h,\alpha}$$

Montrer que $v_{h,\alpha} \in V_h$ et que

$$a(v_{h,\alpha}, v_{h,\alpha}) \leqslant a(u_h, v_{h,\alpha})$$

Q. 12 On pose

$$E(\alpha) = \{ x \in \Omega \ ; \ v_{h,\alpha}(x) > 0 \}$$

a. Vérifier que $\overline{E(\alpha)}$ (adhérence de $E(\alpha)$) est, soit vide, soit une réunion de triangles de $\mathcal{T}_h$.

b. u_h étant la solution de (P_h), montrer que ($v_{h,\alpha}$ étant construit comme dans **Q. 11** *b.*) :

$$\| v_{h,\alpha} \|_{H^1(\Omega)} \leqslant \left(\sum_{k=0}^{2} \| f_k \|_{L^p(\Omega)} \right) (\text{mes } E(\alpha))^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}$$

c. En admettant que pour tout $q > 2$, il existe $C_2 > 0$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \ \| v \|_{L^q(\Omega)} \leqslant C_2 \| v \|_{H^1(\Omega)}$$

montrer que si $\beta > \alpha$ il existe $C_3 > 0$ (indépendant de h) tel que :

$$\| v_{h,\alpha} \|^q_{L^q(\Omega)} \geqslant C_3 (\beta - \alpha)^q \text{ mes } E(\beta)$$

En déduire (en utilisant **Q. 4**), qu'il existe $C_4 > 0$ (indépendant de h) tel que :

$$\forall x \in \overline{\Omega},\ u_h(x) \leqslant \max \left\{ 0, \max_{x \in \Gamma} u_{0h}(x) \right\} + C_4 \left(\sum_{k=0}^{2} \| f_k \|_{L^p(\Omega)} \right)$$

En conclure que

$$\| u_h \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \max_{x \in \Gamma} | u_{0h}(x) | + C_4 \left(\sum_{k=0}^{2} \| f_k \|_{L^p(\Omega)} \right)$$

Q. 13 On suppose (uniquement pour cette question) que :

$$f_0 \leqslant 0, \quad f_1 = f_2 = 0.$$

Montrer que la solution du problème (P_h) vérifie :

$$\forall x \in \overline{\Omega},\ u_h(x) \leqslant \max \left(0, \max_{x \in \Gamma} u_h(x) \right).$$

V

Soit le problème

$$(P) \begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \forall v \in H^1_0(\Omega),\ a(u, v) = L(v) \\ u - u_0 \in H^1_0(\Omega) \end{cases}$$

où les données u_0 et L sont définies en (5) et (6).

Q. 14 *a.* Montrer que le problème (P) admet une solution unique.

b. Montrer que si $v \in H^1_0(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ alors :

$$\forall x \in \Gamma,\ v(x) = 0$$

c. Montrer que si $f_1 = f_2 = 0$, si $f_0 \in C^0(\overline{\Omega})$, si $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ et si u solution de (P) appartient en outr à $C^2(\overline{\Omega})$, alors u vérifie :

$$(R) \begin{cases} u(x) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) = f_0(x) \text{ pour } x \in \Omega \\ u(x) = u_0(x) \text{ pour } x \in \Gamma \end{cases}$$

Q. 15 On considère u solution du problème (P) avec f_0, f_1, f_2 dans $L^p(\Omega)$, $p > 2$. On suppose pour cet question que $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Soit u_h la solution de (P_h).

Montrer en calculant $a(u_h - \tilde{u}_h, v_h)$ qu'il existe $K > 0$ indépendant de h tel que :

$$\| u - u_h \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant K h \| u \|_{C^2(\overline{\Omega})}$$

Q. 16 u (resp. u_h) désigne la solution du problème (P) (resp. (P_h)).

Montrer que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $p > 2$

$$\| u - u_h \|_{H^1(\Omega)} \leqslant 2 \| u - \tilde{u}_h \|_{H^1(\Omega)}$$

Q. 17 Montrer que lorsque h tend vers 0, u_h tend vers u dans $H^1(\Omega)$.