

RAPPORT SUR L'ÉPREUVE D'ANALYSE NUMÉRIQUE

I.— Thème du sujet

Le thème du problème est d'étudier la résolution numérique du problème P de solution u introduit dans V . Une interprétation "classique" de P est donné dans Q.14c (problème R).

On introduit pour cela un problème "voisin" P_h (de solution u_h), appartenant à un espace de dimension finie W_h .

Le but du problème est d'obtenir (par des méthodes de type "principe du maximum" une majoration de $\|u-u_h\|_{L^\infty(\Omega)}$ (Q.15) montrant que le calcul de u_h , qui se ramène à la résolution d'un système linéaire, donne une valeur numérique de la solution du problème P , lorsque h est assez petit. Pour cela, I fait établir quelques résultats préliminaires, II introduit les notions utiles sur les espaces de Sobolev intervenant dans la définition de (P) , III introduit les espaces de dimension finie W_h, V_h intervenant dans la définition de P_h , IV qui est la partie essentielle introduit le problème P_h pour lequel on étudie des majorations a priori de la solution, enfin V introduit le problème P et fait établir des résultats comparant les solutions de P et P_h .

Naturellement aucune connaissance d'analyse numérique n'était nécessaire pour traiter le sujet. Les techniques utilisées portaient pour l'essentiel sur le calcul différentiel, l'intégration et les espaces L^p , la formule de Green, le théorème de représentation de Riesz et un peu d'algèbre linéaire.

II.— Observations générales

Le problème était difficile à résoudre en six heures, cela tient essentiellement à l'absence de programme spécifique pour cette épreuve et un certain nombre de résultats classiques ont dû être établis dans le problème : Q.1, partie II et espaces d'éléments finis V_h et W_h de la partie III. Il a semblé aux correcteurs que les sujets liés à ces questions ont peu été étudiés (ou peu assimilés) dans le cadre des préparations à l'agrégation. La plupart des candidats n'ont pu dépasser Q.7. Dans seule-

ment quelques copies sont abordées Q.9 et Q.14a. Enfin seulement deux copies ont abordé largement la partie IV et ont bénéficié de la note maximum. Tout candidat ayant traité correctement le I a obtenu une note > 20 .

Des erreurs graves ont été retrouvées dans un grand nombre de copies, en particulier :

1) L'utilisation d'une formule de Taylor (à 2 variables) suggérée en Q.1c a mis en évidence une ignorance surprenante de cette formule ; notons qu'une remarque voisine a déjà été faite dans le rapport 1978.

2) Le théorème de Fubini (utilisé dans Q.5a) semble très mal connu de la plupart des candidats l'ayant utilisé. Dans la même question, de nombreux candidats n'hésitent pas à écrire une intégrale curviligne sur la frontière de \mathcal{O} , dont la seule propriété est d'être de mesure nulle.

Signalons enfin que peu de candidats semblent connaître les propriétés élémentaires des espaces de Banach $L^p(\mathcal{O})$ (inégalité de Hölder, dualité).

III.— Observations sur les questions traitées par les candidats et indications succinctes sur leur solution

Q.1-a : Cette question facile n'a pas toujours été résolue et a donné lieu à beaucoup de verbiage. Il faut préciser clairement que les λ_i sont solution d'un système linéaire de Cramer, dont la matrice ne dépend que des points A_i .

Q.1-b : Les résultats s'obtiennent immédiatement en remarquant que puisque $\lambda_i(M) \in P_1$, pour tout M, N dans \mathbb{R}^2 :

$$D\lambda_i(\vec{MN}) = \lambda_i(N) - \lambda_i(M)$$

Q.1-c : La 2e majoration n'a jamais été établie correctement. Il suffisait pour les deux majorations d'utiliser (par exemple) la formule de Taylor (valable pour $M \in T$)

$$u(A_i) = u(M) + D_M u(\vec{MA}_i) + \frac{1}{2} D_{M_i}^2 u(\vec{MA}_i, \vec{MA}_i)$$

où M_i appartient au segment ouvert $]MA_i[$.

Pour obtenir la première majoration on multiplie les deux membres par $\lambda_i(M)$ et on ajoute en tenant compte de : $\sum_{i=1}^3 \lambda_i(M) D_M u(\vec{MA}_i) = 0$.
 Pour la majoration des dérivées, on calcule par cette formule de Taylor

$$\sum_{i=1}^3 u(A_i) D\lambda_i \quad \text{et on vérifie que} \quad \sum_{i=1}^3 D\lambda_i = 0$$

$$\text{et que} \quad \sum_{i=1}^3 D_M u(\vec{MA}_i) D\lambda_i = D_M u$$

en vérifiant que les deux formes linéaires prennent les mêmes valeurs pour \vec{MA}_j ($j=1,2,3$) qui forment un système de générateurs de \mathbb{R}^2 .

Q.2-a : Il suffit de majorer en utilisant

$$\langle \text{grad} \lambda_i, \text{grad} \lambda_j \rangle \leq \sigma_0 |D\lambda_i|^* |D\lambda_j|^*$$

$$\lambda_i(x) \lambda_j(x) \leq 1$$

et de minorer $|D\lambda_i|^*$ par $\frac{1}{h(T)}$ (car $\sigma_0 < 0$).

On peut prendre alors $h_0 = \sqrt{-\sigma_0}$

Q.2-b : a été assez peu abordé, l'essentiel est de vérifier que $\text{grad} \lambda_i$ est orthogonal au côté opposé au sommet A_i et de préciser son sens.

Q.3-b : Cette question utilise le changement de variables auquel invite Q.3-a, et aussi l'inégalité $(\sum_{i=1}^3 a_i)^p \geq \sum_{i=1}^3 a_i^p$ avec $a_i \geq 0$ ($p \geq 1$) qui n'a été établie en général que pour p entier (ce qui n'est pas le cas).

Q.4 : donnait lieu à une récurrence sans surprise en utilisant dans l'hypothèse $\ell = k_s$ et $k = k_{s-1}$, néanmoins beaucoup de candidats n'ont pu résoudre cette question.

Q.5-a : Cette question a permis de constater des lacunes importantes concernant la théorie de l'intégrale de Lebesgue (cf. observations générales).

On doit vérifier $u \in L^p(\sigma)$ (ce qui est à justifier)

$$\text{et} \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\sigma) \quad \int_{\sigma} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \int_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial x_i} \phi$$

$$\text{soit } \forall \phi \in \mathcal{D}(\sigma) \quad \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_i} (u\phi) = 0$$

Il suffit alors de prolonger à \mathbb{R}^2 ϕ par 0 et u par un élément de $C^0(\mathbb{R}^2)$ pour appliquer le théorème de Fubini.

Q.5-b : On se ramène à vérifier que si pour $u \in L^p(\sigma)$

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(0) \quad \int_{\sigma} u \phi \, dx = 0 \quad \text{alors } u = 0.$$

La méthode suggérée (densité de $\mathcal{D}(\sigma)$ dans $L^q(\sigma)$) est de considérer la forme linéaire

$$v \longrightarrow \int_{\sigma} u v \, dx \quad \text{définie et continue sur } L^q(\sigma) \\ \text{d'après l'inégalité de Holder}$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et d'utiliser par exemple la dualité entre L^p et L^q .

Rappelons ici que les résultats ci-dessus font partie du programme officiel d'analyse, mais que la théorie des distributions n'en fait pas partie. De plus, les candidats ayant essayé d'utiliser cette théorie, n'ont souvent réussi qu'à montrer leur ignorance sur ce sujet.

Q.5-d : La plupart des candidats ayant abordé cette question ont remarqué que si (u_n) est une suite de Cauchy dans $W^{1,p}(\Omega)$ (u_n) et $(\partial_i u_n)$ sont des suites de Cauchy donc convergentes dans $L^p(\sigma)$, vers u et v_i respectivement ; il fallait alors vérifier (ce qui a été beaucoup moins abordé) que v_i est la dérivée généralisée de u , soit

$$(1) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(0) \quad \int_{\sigma} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \int_{\sigma} v_i \phi$$

Il suffit alors de faire tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(0) \quad \int_{\sigma} u_n \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \int_{\sigma} \partial_i u_n \phi$$

pour obtenir (1).

$$\text{Vérifions par exemple que } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\sigma} (u - u_n) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0$$

l'inégalité de Holder permet d'écrire :

$$\left| \int_{\mathcal{O}} (u-u_n) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right| \leq \|u-u_n\|_{L^p(\mathcal{O})} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\|_{L^q(\mathcal{O})} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$$

Le passage à la limite a donné lieu aussi à des utilisations abusives du théorème de la convergence dominée.

Q.6 : a donné lieu à beaucoup d'erreurs. Il fallait vérifier les points suivants :

Soit $u_n \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$

avec $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ dans $W^{1,p}(\mathcal{O})$

On doit vérifier : $u \in W_0^{1,p}(\mathcal{O})$

Soit \tilde{u}_n (resp. \tilde{u}) le prolongement par 0 de u_n (resp. u) en dehors de \mathcal{O} .

Alors $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ et \tilde{u}_n est de Cauchy dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$, le point essentiel étant de vérifier que : $\partial_i \tilde{u}_n$ est le prolongement par 0 de $\partial_i u_n$ en dehors de \mathcal{O} .

Alors \tilde{u}_n converge vers v dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$, il suffit alors de vérifier que $v = \begin{cases} u & \text{dans } \mathcal{O} \\ 0 & \text{dans le complémentaire de } \mathcal{O} \end{cases}$.

Q.7-a : La construction de W_i se fait de la façon suivante :

Soient $T_1, T_2 \dots T_k$ les triangles de τ_h ayant pour sommet le point b_i , on pose

$$W_i(x) = \lambda_i^\alpha(x) \quad x \in T_\alpha \quad 1 \leq \alpha \leq k.$$

$$W_i(x) = 0 \quad \text{dans les autres triangles de } \tau_h.$$

W_i vérifie bien la propriété d'interpolation, il reste à vérifier que $W_i \in C^0(\bar{\Omega})$ ce qui se ramène à vérifier :

- la continuité sur les côtés communs à 2 triangles de τ_h , la continuité à l'intérieur d'un triangle étant assurée ;
- l'existence d'un prolongement de W_i appartenant à $C^0(\mathbb{R}^2)$ (ceci a été très souvent omis).

Q.7-c : Il est faux que $W_h \subset C^1(\bar{\Omega})$ comme beaucoup de candidats l'ont affirmé, on ne peut donc se contenter d'utiliser Q.5-a. Cette question n'a été traitée que dans peu de copies.

Il suffit de vérifier que $\omega_k \in W^{1,p}(\Omega)$

. $\omega_k \in C^0(\bar{\Omega})$ donc est dans $L^p(\Omega)$

. La fonction égale à $\frac{\partial \omega_k}{\partial x_i}$ à l'intérieur de chaque triangle de τ_h définit un élément de $L^p(\Omega)$ qui est la dérivée généralisée de ω_k .
En effet, :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \int_{\Omega} \omega_k \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \sum_{T \in \tau_h} \int_T \omega_k \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

On utilise alors la formule de Green suivante :

$$\int_T \omega_k \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \int_T \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} \phi + \int_{\partial T} \omega_k \phi v_i ds$$

où s désigne une abscisse curviligne convenable sur la frontière ∂T de T , v_i le i^{e} cosinus directeur de la normale extérieure à ∂T .

On obtient la conclusion en constatant que :

$$\sum_{T \in \tau_h} \int_{\partial T} \omega_k \phi v_i ds = 0$$

en décomposant la somme ci-dessus en une somme d'intégrales curvilignes sur les côtés des triangles de τ_h . On constate que sur un côté donné ou bien $\phi = 0$, ou bien on obtient 2 intégrales opposées, selon que ce côté appartient ou non à Γ .

Des idées analogues permettent de montrer que $V_h \subset W_0^{1,p}(\Omega)$.

Q.9 : Peu de candidats se sont aperçus que P_h se ramène à un système linéaire de N équations à N inconnues $u_h(b_i)$ ($1 \leq i \leq N$) dont l'unicité de la solution (qui est évidente) entraîne l'existence.

IV.— Les notes (sur 40)

Nombre de copies corrigées : 732

Moyenne des notes : 8,2

Répartition des notes :

0 à 4	5 à 9	10 à 14	15 à 19	20 à 24	25 à 29	30 à 34
359	115	101	75	42	23	7

35 à 40
10

RAPPORT SUR L'ÉPREUVE DE MÉCANIQUE

Le problème portait sur l'étude d'une liaison non classique satisfaisant à la condition des puissances virtuelles. La première partie pouvait être traitée à l'aide des théorèmes généraux, tandis que la seconde utilisait les méthodes analytiques.

Bien qu'on considère comme un poncif que les correcteurs se plaignent de la faiblesse des candidats, cette remarque ne peut être évitée ici : environ les trois quarts des copies sont d'un niveau très bas et même dans les autres, les fautes graves abondent, montrant des lacunes importantes.

L'introduction portait sur la distinction classique entre la puissance des forces intérieures (qui peut être évaluée dans n'importe quel repère) et celle des forces extérieures (qui dépend du repère). Dans le premier cas (forces exercées entre S_1 et S_2) on pouvait utiliser un repère lié par exemple à S_1 , tandis que dans le deuxième cas (forces exercées entre un solide du système et un obstacle extérieur) on était amené à introduire une hypothèse supplémentaire (fixité de l'obstacle par rapport au repère de référence).

Dans la première question, il n'était pas indiqué d'employer les équations de Lagrange, mais si on le faisait, il fallait tenir compte du fait que les paramètres n'étaient pas indépendants (liaison non holonôme). La deuxième question a montré que beaucoup de candidats distinguaient mal la vitesse de glissement de la vitesse du point géo-