COMPOSITION D'ANALYSE

DURÉE : 6 heures

PRÉAMBULE

On note $\mathbb{R}$ le corps des réels. Les espaces vectoriels considérés sont réels et non réduits au vecteur nul.

Si E et F sont deux espaces vectoriels normés, on note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F, muni de la norme usuelle :

$$\forall\, u \in \mathcal{L}_c(E, F), \quad \| u \| = \sup \left\{ \frac{\| u(x) \|}{\| x \|},\ x \in E \text{ et } x \neq 0 \right\}.$$

PRÉLIMINAIRES

Les résultats des deux dernières questions de cette partie pourront être utilisés dans la suite du problème, même s'ils n'ont pas été démontrés.

Soit γ une application continue de $[0, 1]$ dans un espace vectoriel normé E. On dit que γ est dérivable en 0 si et seulement si

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} \text{ existe; on la note alors } \gamma'(0).$$

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, Ω un ouvert de E, x_0 un point de Ω et f une application *continue sur* Ω, à valeurs dans F. On dit que f est *quasi différentiable* en x_0 si et seulement si il existe une application linéaire u de E dans F telle que, pour toute application γ continue de $[0, 1]$ dans Ω, dérivable en 0, vérifiant $\gamma(0) = x_0$, l'application $f \circ \gamma$ est dérivable en 0 et $(f \circ \gamma)'(0) = u(\gamma'(0))$.

1° *a*. Montrer que si f, continue sur Ω, est quasi différentiable en x_0, l'application linéaire u est unique. On l'appelle la *quasi-différentielle de* f *en* x_0 et on la note $qf(x_0)$.

b. Montrer que si f, continue sur Ω, est différentiable en x_0, elle y est quasi différentiable et que $qf(x_0) = df(x_0)$, où $df(x_0)$ désigne la différentielle de f en x_0.

c. Énoncer et justifier un théorème relatif à la composition des applications quasi différentiables.

2° On suppose, dans cette question seulement, qu'il existe un réel k tel que

$$\forall\, (x, y) \in \Omega^2, \quad \| f(x) - f(y) \| \leqslant k \, \| x - y \|.$$

Montrer que s'il existe u linéaire de E dans F telle que pour tout vecteur a de E,

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t} = u(a),$$

alors f est quasi différentiable en x_0.

3° Montrer que si f, continue sur Ω, est quasi différentiable en x_0, alors $qf(x_0)$ est continue de E dans F.

4° Lorsque E est de dimension finie, montrer que toute application f, continue sur Ω, et quasi différentiable en x_0, est différentiable en x_0.

E désignant un espace vectoriel normé, on s'intéresse aux problèmes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ suivants :

$\mathcal{P}$ $\left\{\begin{array}{l}\text{déterminer l'ensemble P des éléments de E où l'application de E dans } \mathbb{R} : \\ x \longmapsto \| x \|, \text{ est différentiable, et calculer } df(x_0) \text{ pour } x_0 \text{ dans P;}\end{array}\right.$

$\mathcal{Q}$ $\left\{\begin{array}{l}\text{déterminer l'ensemble Q des éléments de E où l'application de E dans } \mathbb{R} : \\ x \longmapsto \| x \|, \text{ est quasi différentiable, et calculer } qf(x_0) \text{ pour } x_0 \text{ dans Q.}\end{array}\right.$

I

A

Soient $E = \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dans E. On considère les trois normes :

$$\| x \|_\infty = \sup \{ \mid x_i \mid ; 1 \leqslant i \leqslant n \};$$

$$\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid ;$$

$$\| x \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

1° Résoudre, avec soin, le problème $\mathcal{P}$ pour E muni successivement de chacune de ces trois normes.

2° Préciser dans chaque cas les composantes connexes de P (on en indiquera en particulier le nombre).

B

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $E^* = \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$ son dual, normé (cf. PRÉAMBULE). On note B et S (resp. B* et S*) la boule unité fermée et la sphère unité de E (resp. E*).

Pour chaque x_0 de S, on note L_{x_0} l'ensemble des formes linéaires φ, appartenant à S*, telles que

$$\forall x \in B, \quad \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0) = 1. \tag{1}$$

On admet que, pour tout x_0 de S, cet ensemble L_{x_0} n'est pas vide.

Toute application l, de S dans S*, qui, à tout x_0 de S, associe un élément l_{x_0} de L_{x_0} est appelée *fonction de dualité*.

On dit que B est *lisse* en x_0 ($x_0 \in S$) si et seulement si L_{x_0} est de cardinal 1.

On dit que B est *strictement convexe* en x_0 (x_0 élément de S) si et seulement si $B \setminus \{ x_0 \}$ est convexe.

1° Soit $l : S \longrightarrow S^*$ une fonction de dualité. Démontrer que si B est lisse en x_0, alors B* est strictement convexe en l_{x_0}.

2° Démontrer que, si pour toute fonction de dualité l, B* est strictement convexe en l_{x_0}, alors B est lisse en x_0.

3° Soient (x, y) un élément de S^2, et λ un réel strictement positif tel que $x + \lambda y$ soit non nul. Soit $z = \dfrac{x + \lambda y}{\| x + \lambda y \|}$. Démontrer que, pour toute fonction de dualité l :

$$l_x(y) \leqslant \frac{\| x + \lambda y \| - 1}{\lambda} \leqslant l_z(y).$$

4° Soient x_0 un élément de S et l une fonction de dualité. Démontrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

a. B est lisse au point x_0,

b. l est continue au point x_0,

c. la norme est différentiable au point x_0.

II

1° Résoudre les problèmes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ lorsque E est un espace euclidien qui n'est pas de dimension finie.

2° Soit F l'espace vectoriel des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels, qui convergent vers 0. On le norme en posant : $\| x \|_\infty = \sup \{ \mid x_n \mid ; \ n \in \mathbb{N} \}$.

Résoudre les problèmes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ pour F. Quelles sont les composantes connexes de P et Q ?

3° Soit G l'espace vectoriel des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série de terme général $\mid x_n \mid$ converge. On le norme en posant :

$$\| x \|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \mid x_n \mid .$$

a. Résoudre le problème $\mathfrak{Q}$ pour G. L'ensemble Q est-il ouvert ? Préciser ses composantes connexes.

b. Résoudre le problème $\mathfrak{P}$ pour G.

III

Dans cette partie, E désigne l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, normé par :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \| x \| = \sup \{ \mid x(t) \mid ; \quad t \in [0, 1] \}.$$

1° Montrer que si l'application de E dans $\mathbb{R}$: $x \longmapsto \| x \|$, est quasi différentiable en x_0, l'application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$: $t \longmapsto \mid x_0(t) \mid$, n'atteint son maximum qu'en un seul point.

2° *a.* Soient a et b deux éléments de E. Montrer que l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $\lambda \longmapsto \| a + \lambda b \|$ admet, en tout point, une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

b. Soit x_0 un élément de E tel que l'application : $t \longmapsto \mid x_0(t) \mid$ n'atteigne son maximum qu'en un seul point t_0.

Soient a un élément de E et λ un réel; on note t_λ la borne supérieure de l'ensemble des éléments de $[0, 1]$ où l'application : $t \longmapsto |\, x_0(t) + \lambda a(t)\,|$ atteint son maximum.

Montrer que $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} t_\lambda = t_0$.

c. En déduire la solution du problème $\mathcal{Q}$ pour E. L'ensemble Q est-il ouvert ? Quelles sont ses composantes connexes ?

3° Résoudre le problème $\mathcal{P}$ pour E.

RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE

I.- Remarques générales

Le problème propose l'étude de la différentiabilité de l'application norme : $x \longmapsto \|x\|$, de E espace vectoriel normé, dans R.

Après l'étude de propriétés générales, les candidats devaient examiner des cas particuliers, d'abord en dimension finie (I), puis en dimension quelconque (II et III).

Il y avait un certain nombre de questions faciles, ne faisant même pas appel à la définition de la différentiabilité : les 1° a et c, et 2° des préliminaires, notés sur 7. La répartition des notes montre cependant qu'un candidat sur trois environ a obtenu 4 ou plus. Une question se pose alors : que viennent faire des candidats qui n'essayent même pas de résoudre les questions à la portée de tous ?

D'autre part, la résolution du I A ne nécessitait que des connaissances rudimentaires en calcul différentiel et en topologie, connaissances que devraient posséder des titulaires de la maîtrise, certains étant déjà enseignants. Avec les questions faciles des préliminaires, et le I A on pouvait obtenir une vingtaine de points, or il ne reste qu'environ 400 candidats à avoir plus de 15. C'est navrant.

II.- Remarques sur la résolution et la correction

Préliminaires : On peut déplorer un manque de rigueur : nombreux sont les candidats qui construisent une application γ sans s'assurer qu'elle soit à valeurs dans Ω, ou bien composent f différentiable avec γ «dérivable» au sens du texte pour conclure à la différentiabilité de l'application composé $f_o\, \gamma$.

Rares sont les copies où l'on trouve quelque chose de correct sur les questions 3 et 4, très difficiles. Le plus souvent, en introduisant une constante M telle que $\|qf(x_0)(x)\| \leqslant M \|x\|$, on conclut à la continuité de $qf(x_0)$, et dans le 4° on conclut à la différentiabilité grâce à l'existence des dérivées partielles.

Première partie

A — On trouve, pour prouver la différentiabilité, des «divisions par des vecteurs», ce qui est inquiétant pour un concours de ce niveau.

Certains candidats, qui explicitent correctement les composantes connexes ne savent pas les compter; quant à la justification précise de ce que ce sont les composantes connexes elle n'est faite que dans un quart de copies environ. Enfin rares sont les candidats ayant remarqué que $\{o\}$ avait 2 composantes connexes en dimension 1.

B — Cette partie n'est abordée que par les copies acceptables : celles des candidats qui ne sont pas rebutés par la dualité.

Les trois premières questions se faisaient aisément ainsi que l'implication c $\Rightarrow$ a du 4°. Seules les très bonnes copies donnent une solution correcte du 4°.

La suite du problème proposait l'étude de différents cas en dimension infinie, avec des résultats variés pour P et Q. Seuls les bons candidats ont abordé ces parties, aussi les solutions proposées sont-elles correctes.

Deuxième partie

Le 1° n'offre aucune difficulté.

La résolution du I A donnait des indications sur les résultats à trouver au 2° et 3°. Une mise en forme facile permettait de montrer que *pour le 2°* $P = Q = \{x \,;\, \|x\|_\infty$ n'est atteinte qu'en un indice$\}$; *pour le 3°*, $Q = \{x \,;\, \forall n \in N, x_n \neq o\}$.

Pour prouver la quasi différentiabilité en un élément de Q, la norme étant lipschitzienne, le 2° des préliminaires servait.

Le fait que P soit vide (3° b), s'obtenait en vérifiant que pour un x_o de Q, la quantité

$$\frac{\|x_o + h\| - \|x_o\| - u(x_o)(h)}{\|h\|}$$

ne tendait pas vers o lorsque $\|h\|$ tend vers o, (où u désigne la quasi différentielle de la norme en x_o).

Troisième partie

Elle n'a été que très rarement abordée. Le 2° a, question de cours en fait, permettait d'obtenir facilement un point.

Aucun candidat n'a trouvé que l'ensemble Q n'avait cette fois qu'une composante connexe.

III.- Conclusion

Il est navrant de constater qu'un si grand nombre de candidats se destinant à l'enseignement des mathématiques, (quand ils ne les enseignent pas déjà !) ne connaissent même pas la définition d'une application différentiable.

On aimerait trouver dans les copies plus de rigueur dans la rédaction mais également une bonne présentation et une orthographe correcte. Indépendemment du bénéfice que les candidats en tireraient pour leur note, qu'ils pensent aux élèves qu'ils ont ou auront.

IV.- Répartition des notes

Notes	Nombre de candidats
0 à 4	686
5 à 8	231
9 à 12	165
13 à 16	136
17 à 20	133
21 à 24	112
25 à 28	76
29 à 32	59
33 à 36	33
37 à 40	27
41 à 48	48
49 à 60	17
	Total 1 723