écrit

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

DURÉE : 6 heures

INTRODUCTION

Dans tout le problème, on considère un espace vectoriel euclidien E de dimension finie $n \geqslant 2$, un entier $k \geqslant 2$ et un réel $\gamma \in]\,0\,,1\,[$. Les entiers n et k et le réel γ pourront être assujettis à des conditions supplémentaires qui dépendront de la question traitée.

On se propose d'étudier certaines familles finies de vecteurs de E (Partie II) et certains ensembles finis de droites vectorielles de E, appelés épis (Partie III). La Partie I rassemble des résultats préliminaires. Dans la Partie IV, on examine quelques propriétés d'un épi particulier.

NOTATIONS

Si v, v' appartiennent à E, leur produit scalaire est noté $(v \mid v')$, et on pose $\| v \| = \sqrt{(v \mid v)}$. On note $\mathrm{L}(\mathrm{E})$ l'algèbre des endomorphismes de E, $\mathrm{L}^s(\mathrm{E})$ l'espace des endomorphismes symétriques de E et $\mathrm{O}(\mathrm{E})$ le groupe orthogonal de E.

Pour tout $v \in \mathrm{E}$, on désigne par p_v l'endomorphisme de E tel que

$$p_v(v') = (v \mid v')\, v \qquad \text{pour tout} \quad v' \in \mathrm{E}.$$

On définit une opération de $\mathrm{O}(\mathrm{E})$ sur l'ensemble E^k en posant, si $f \in \mathrm{O}(\mathrm{E})$ et si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathrm{E}^k$, $f.x = \big(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k)\big)$.

Par abus de notation, x pourra aussi désigner la famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$.

Si Y est un ensemble, on note Card (Y) le cardinal de Y, $\mathfrak{S}(\mathrm{Y})$ le groupe des permutations de Y et id_Y l'application identique de Y. Si de plus h est un entier naturel, $\mathrm{Y}^{(h)}$ désigne l'ensemble des parties de cardinal h de Y.

Si P est un polynôme non nul de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et si $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $m(\lambda, \mathrm{P})$ le plus grand entier naturel m tel que $(\mathrm{X} - \lambda)^m$ divise P dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

On désigne par $\mathcal{M}_k$ l'espace des matrices, à k lignes et k colonnes, à termes réels ; si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_k$, on note P_A le polynôme caractéristique de A ;

l'espace des matrices symétriques de $\mathcal{M}_k$ est noté $\mathcal{M}_k^s$; si $B \in \mathcal{M}_k^s$, $\lambda(B)$ désigne la plus petite valeur propre de B.

On note enfin I_k la matrice unité de $\mathcal{M}_k$ et J_k la matrice de $\mathcal{M}_k$ dont tous les termes sont égaux à 1.

PARTIE I

Les questions 1, 2, 3 *sont indépendantes les unes des autres. Les questions* 4 *et* 5 *sont indépendantes des précédentes.*

1. Déterminer le rang et la trace de J_k ; en déduire P_{J_k}. Si α et β sont des réels quelconques, former le polynôme caractéristique et calculer les valeurs propres de la matrice $\alpha I_k + \beta J_k$.

2. a. Soit Q un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$. Démontrer que toute racine complexe de Q est simple.

b. Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{Q}[X]$. Soit λ une racine complexe de P telle que $m(\lambda, P) > \frac{1}{2}$ degré (P). Montrer que λ appartient à $\mathbb{Q}$.

3. Si $f \in L(E)$, $\mathrm{Tr}(f)$ désigne la trace de f. Démontrer que $L^s(E)$, muni de la forme bilinéaire symétrique $(f, f') \longmapsto \langle f, f' \rangle = \mathrm{Tr}(f \circ f')$, est un espace vectoriel euclidien.

4. A tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in E^k$, on associe la matrice $B_x = \big((x_i \mid x_j)\big)$, élément de $\mathcal{M}_k^s$ $\big((x_i \mid x_j)$ est le terme de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de $B_x\big)$.

L'espace $\mathbb{R}^k$ étant muni du produit scalaire usuel, noté $(\ |\ )_{\mathbb{R}^k}$, pour lequel la base canonique $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k)$ est orthonormale, φ_x désigne l'application linéaire de $\mathbb{R}^k$ dans E telle que $\varphi_x(\varepsilon_i) = x_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$. On désigne par φ_x^* l'unique application linéaire de E dans $\mathbb{R}^k$ telle que, pour tout $v \in E$ et tout $w \in \mathbb{R}^k$,

$$\big(w \mid \varphi_x^*(v)\big)_{\mathbb{R}^k} = \big(\varphi_x(w) \mid v\big).$$

a. Montrer que B_x est la matrice de $\varphi_x^* \circ \varphi_x$ dans la base ε. En déduire les égalités $\mathrm{rang}(x) = \mathrm{rang}(B_x) = k - m\big(0, P_{B_x}\big)$. Montrer que $\lambda(B_x) \geqslant 0$, et que l'égalité a lieu si et seulement si la famille $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ est liée.

b. Pour $1 \leqslant i \leqslant k$, on pose $p_i = p_{x_i}$. Montrer que $\varphi_x \circ \varphi_x^* = \sum_{i=1}^{k} p_i$.

En déduire que B_x et $\sum_{i=1}^{k} p_i$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.

5. a. Soit $B \in \mathcal{M}_k^s$. Montrer qu'il existe $x \in E^k$ tel que $B = B_x$ si et seulement si $\lambda(B) \geqslant 0$ et $\mathrm{rang}(B) \leqslant n$.

b. Soient x, y des éléments de E^k. Montrer que $B_x = B_y$ si et seulement si x et y ont même orbite sous l'action de O (E).

PARTIE II

On note U l'ensemble des vecteurs unitaires de E. Une famille $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k) \in U^k$ est dite équiangulaire d'angle $\mathrm{Arc}\cos\gamma$ si $|(u_i \mid u_j)| = \gamma$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant k$.

L'ensemble des familles équiangulaires $u \in U^k$ d'angle Arc cos γ est noté U^k_γ.

On désigne par $\mathcal{A}_k$ l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}^s_k$ telles que $a_{i,i} = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$ et $a_{i,j} \in \{1, -1\}$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant k$.

A tout $u \in U^k_\gamma$, on associe la matrice $A_u = \dfrac{1}{\gamma}(B_u - I_k)$, de sorte que $A_u \in \mathcal{A}_k$.

On dit qu'une famille équiangulaire $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ est aiguë (resp. obtuse) si $(u_i \mid u_j) > 0$ (resp. $(u_i \mid u_j) < 0$) pour $1 \leqslant i < j \leqslant k$.

6. a. Démontrer que toute famille équiangulaire aiguë est libre.

b. Démontrer l'existence d'une famille équiangulaire aiguë $u \in U^n_\gamma$.

7. a. Soit $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k) \in U^k_\gamma$. Démontrer que si la famille $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ est liée,

$$\lambda(A_u) = -\frac{1}{\gamma} \text{ et } m\left(-\frac{1}{\gamma}, P_{A_u}\right) = k - \text{rang}(u).$$

b. Démontrer l'existence d'une famille équiangulaire obtuse $u \in U^{n+1}_{1/n}$.

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose que U^k_γ n'est pas vide, et on désigne par $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ un élément de U^k_γ ; pour $1 \leqslant i \leqslant k$, on pose $p_i = p_{u_i}$.

8. a. Démontrer que, pour $1 \leqslant i \leqslant k$, p_i appartient à $L^s(E)$.

b. Calculer $< p_i, p_j >$ pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$.

c. Démontrer que $k \leqslant \dfrac{1}{2} n(n + 1)$.

9. On désigne par Π le sous-espace vectoriel de $L^s(E)$ engendré par $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$. Montrer que $n \geqslant \dfrac{k}{[1 + (k-1)\gamma^2]}$, et que l'égalité a lieu si et seulement si id_E appartient à Π ; démontrer que $\mathrm{id}_E \in \Pi$ implique $k\,\mathrm{id}_E = n \sum_{i=1}^{k} p_i$. (On pourra considérer la projection orthogonale de id_E sur Π).

Pour $1 \leqslant i < j \leqslant k$, on note $d_{i,j}$ le nombre d'entiers t tels que $1 \leqslant t \leqslant k$, $t \neq i$, $t \neq j$, et $(u_i \mid u_j)(u_i \mid u_t)(u_j \mid u_t) > 0$. On dit que la famille équiangulaire u est régulière si $d_{i,j}$ est indépendant du couple (i, j).

Si $A_u = (\alpha_{i,j})$, on pose $A_u^2 = (\alpha'_{i,j})$.

10. a. Pour $1 \leqslant i < j \leqslant k$, calculer $\alpha'_{i,j}$ en fonction de k, $\alpha_{i,j}$ et $d_{i,j}$.

b. Montrer que la famille u est régulière si et seulement s'il existe des réels ρ_1, ρ_2 tels que $(A_u - \rho_1 I_k)(A_u - \rho_2 I_k) = 0$.

c. Démontrer que id_E appartient à Π si et seulement si la famille u est liée, de rang n et régulière ; montrer que, dans ce cas, les valeurs propres de A_u sont $-\dfrac{1}{\gamma}$ et $\dfrac{1}{\gamma}\left(\dfrac{k}{n} - 1\right)$ avec les multiplicités respectives $k - n$ et n.

11. Cette question est indépendante des questions 8, 9, 10. — On suppose que la famille $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ est liée et que « k est pair, ou $k - \text{rang}(u) \geqslant 2$ ».

Démontrer que si $\dfrac{1}{\gamma^2}$ est entier, cet entier est impair. (On pourra considérer le polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ obtenu par réduction, modulo 2, du polynôme caractéristique de A_u^2).

12. Démontrer que si id_E appartient à Π et si k est distinct de $n+1$ et de $2n$, $\frac{1}{\gamma}$ est un entier impair.

13. *a.* Démontrer que si $k > 2n$, $\frac{1}{\gamma}$ est un entier impair. (On pourra utiliser la question *2.*).

b. Montrer que $n = 6$ implique $k \leqslant 16$.

14. On suppose que $k = \frac{1}{2} n (n+1)$. Montrer que $n + 2 = \frac{1}{\gamma^2}$. En déduire que si $n > 3$, $n+2$ est le carré d'un entier impair.

PARTIE III

Si $\mathcal{D}$ est un ensemble fini (Card $\mathcal{D} \geqslant 2$) de droites vectorielles de E, on appelle repère de $\mathcal{D}$ toute famille $(u_D)_{D \in \mathcal{D}}$ telle que, pour toute droite $D \in \mathcal{D}$, u_D soit un vecteur unitaire de D ; un tel repère est dit aigu si $(u_D \mid u_{D'}) > 0$ pour tout couple (D, D') de droites distinctes appartenant à $\mathcal{D}$. On dit que $\mathcal{D}$ est un *épi* d'angle $\operatorname{Arc}\cos\gamma$ si $\mathcal{D}$ possède un repère $(u_D)_{D \in \mathcal{D}}$ tel que $|(u_D \mid u_{D'})| = \gamma$ pour tout couple (D, D') de droites distinctes appartenant à $\mathcal{D}$. On appelle « base aiguë » de E tout épi de cardinal n possédant un repère aigu.

On considère dans toute cette partie une « base aiguë » $\mathcal{B}$ de E d'angle $\operatorname{Arc}\cos\gamma$ et un repère aigu $(u_D)_{D \in \mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$, et on suppose que $k > n$. On se propose d'étudier les épis $\mathcal{D}$, de cardinal k, contenant $\mathcal{B}$.

Pour toute partie S de $\mathcal{B}$, on pose $e_S = \sum_{D \in S} u_D$, et on note v_S l'unique élément de E tel que, pour toute droite $D \in \mathcal{B}$, on ait

$$(v_S \mid u_D) = -\gamma \quad \text{si } D \in S, \qquad (v_S \mid u_D) = \gamma \quad \text{si } D \notin S.$$

On pose $r = \frac{1-\gamma}{2\gamma}$ et $\Phi = X^2 - nX + r^2(n + 2r + 1)$ (Φ est donc un élément de $\mathbb{C}[X]$) ; on considère la condition suivante :

$$(*) \qquad \text{les racines de } \Phi \text{ sont entières.}$$

Lorsque la condition $(*)$ est satisfaite, on note h la plus petite racine de Φ, et on pose

$$z = h - r^2 \quad \text{et} \quad z' = h - r(r+1).$$

15. Soient S, T des parties de $\mathcal{B}$.

a. Calculer $(e_S \mid e_T)$, $\| e_S \|^2$, $(e_{\mathcal{B}} \mid e_S)$, $\| e_{\mathcal{B}} \|^2$ en fonction de n, r, Card(S), Card (T) et Card (S $\cap$ T).

b. Montrer que $v_S = \omega_S e_{\mathcal{B}} - \frac{1}{r} e_S$, où ω_S est un nombre réel que l'on calculera en fonction de n, r et Card (S). Calculer $\| v_S \|^2$ en fonction de n, r et Card(S). Vérifier que $\| v_S \| = 1$ si et seulement si Card (S) est racine de Φ.

c. On suppose que Card(S) = Card (T) et que $\| v_S \| = 1$. Calculer $(v_S \mid v_T - v_S)$ puis $(v_S \mid v_T)$ en fonction de r, Card (S) et Card (S $\cap$ T). En déduire que

$$(v_S \mid v_T) = \gamma \quad \text{si et seulement si Card}(S \cap T) = \text{Card}(S) - r^2,$$

$$(v_S \mid v_T) = -\gamma \quad \text{si et seulement si Card}(S \cap T) = \text{Card}(S) - r(r+1).$$

16. Montrer qu'il existe un épi, de cardinal k, contenant $\mathcal{B}$ si et seulement si la condition $(*)$ est satisfaite et s'il existe une partie $\mathcal{S}$ de $\mathcal{B}^{(h)}$ satisfaisant la condition suivante :

$$(**) \begin{cases} \text{(i)} & \text{Pour tout couple } (S, T) \text{ d'éléments distincts de } \mathcal{S}, \operatorname{Card}(S \cap T) \\ & \quad \text{appartient à } \{z, z'\}. \\ \text{(ii)} & \operatorname{Card}(\mathcal{S}) = k - n. \end{cases}$$

Jusqu'à la fin de cette partie, sauf dans la question *19*, on suppose que $\mathcal{O}$ est un épi, de cardinal k, contenant $\mathcal{B}$; h, z, z' sont alors définis comme il a été précisé plus haut.

17. *a.* Montrer que $n \geqslant 2r(2r+1)$.

b. Calculer $z(n - h - r^2)$ en fonction de r.

c. On suppose que $r = 1$ (resp. 2). Démontrer que le couple (n, h) appartient à un ensemble de cardinal 2 (resp. 5) que l'on précisera.

18. On suppose dans cette question que $k \geqslant n + 2$ et que r n'est pas entier. Montrer que r n'appartient pas à $\mathbb{Q}$. Soient

$$a = r(r+1) \quad \text{et} \quad b = r^2(n + 2r + 1).$$

De l'égalité $(n - 2a - 1)r + b - a(n-1) = 0$, déduire que $n = 3$ et $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

19. On suppose que $n = 3$ (resp. 6). Démontrer qu'il existe un épi de cardinal 6 (resp. 16), et une famille équiangulaire régulière appartenant à U^6 (resp. U^{16}).

20. Dans cette question on suppose que $k = \dfrac{1}{2} n(n+1)$ et $n > 3$.

a. Démontrer que $h^2 - (4r^2 + 4r - 1)h + 2r^3(2r+3) = 0$.

b. On pose $s = 2r - 1$. Démontrer que ou bien $s = 1$, ou bien il existe deux entiers c, d tels que $s = 3c^2$ et $3c^4 + 5c^2 + 1 = d^2$.

En déduire que si $n < 10^4$, $n \in \{7, 23, 839\}$.

On note Γ le stabilisateur de $\mathcal{O}$ dans $O(E)$ et π l'homomorphisme de Γ dans $\mathfrak{S}(\mathcal{O})$ qui à tout $f \in \Gamma$ associe la permutation de $\mathcal{O}$ induite par f. On pose enfin $G = \pi(\Gamma)$. Préciser le noyau de π.

21. On suppose que h est distinct de $\dfrac{n}{2}$. On suppose en outre que deux parties quelconques de $\mathcal{B}^{(h)}$ satisfaisant la condition $(**)$ peuvent être transformées l'une en l'autre par un élément de $\mathfrak{S}(\mathcal{B})$.

a. Montrer que G permute transitivement les « bases aiguës » de E contenues dans $\mathcal{O}$.

b. Soit $\mathcal{S}$ une partie de $\mathcal{B}^{(h)}$ satisfaisant la condition $(**)$. Montrer que le stabilisateur de $\mathcal{B}$ dans G est isomorphe au stabilisateur de $\mathcal{S}$ dans $\mathfrak{S}(\mathcal{B})$.

PARTIE IV

Cette partie est indépendante de la PARTIE II

On suppose que $n = 7$, et l'on pose $Y = \{1, 2, \ldots, 7\}$. On considère une « base aiguë » $\mathcal{B} = \{D_1, D_2, \ldots, D_7\}$ de E d'angle $\operatorname{Arc\,cos}\left(\frac{1}{3}\right)$, et un repère aigu $(u_D)_{D \in \mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$. Si $i \in Y$, on pose $u_i = u_{D_i}$. Quel que soit (i, j), élément de Y^2, tel que $i < j$, on pose

$$v_{i,j} = \frac{1}{3}\left\{\left(\sum_{t \in Y,\ t \notin \{i,j\}} u_t\right) - 2(u_i + u_j)\right\} \quad \text{et} \quad D_{i,j} = \mathbb{R}v_{i,j}.$$

Enfin on pose $\mathcal{D} = \{D_i\ ;\ (i \in Y)\} \cup \big\{D_{i,j}\ ;\ \big((i,j) \in Y^2 \text{ et } i < j\big)\big\}$.

22. Montrer que $\mathcal{D}$ est un épi d'angle $\operatorname{Arc\,cos}\left(\frac{1}{3}\right)$ et de cardinal 28.

On conserve les notations Γ, π, G introduites dans la partie III, et on note Ω l'ensemble des « bases aiguës » de E contenues dans $\mathcal{D}$. Pour tout $\mathcal{L} \in \Omega$, on désigne par $G_{\mathcal{L}}$ le stabilisateur de $\mathcal{L}$ dans G, et par $\sigma_{\mathcal{L}}$ l'homomorphisme de $G_{\mathcal{L}}$ dans $\mathfrak{S}(\mathcal{L})$ qui à tout $g \in G_{\mathcal{L}}$ associe la permutation de $\mathcal{L}$ induite par g.

23. Démontrer que chacun des ensembles suivants appartient à Ω :

$\mathcal{L}_1 = \{D_1\} \cup \{D_{1,j}\ ;\ (2 \leqslant j \leqslant 7)\}$,

$\mathcal{L}_2 = \{D_i\ ;\ (1 \leqslant i \leqslant 4)\} \cup \{D_{5,6}, D_{5,7}, D_{6,7}\}$,

$\mathcal{L}_3 = \{D_1, D_2\} \cup \{D_{1,2}\} \cup \{D_{3,j}\ ;\ (4 \leqslant j \leqslant 7)\}$,

$\mathcal{L}_4 = \{D_1\} \cup \{D_{1,j}\ ;\ (2 \leqslant j \leqslant 4)\} \cup \{D_{5,6}, D_{5,7}, D_{6,7}\}$.

24. Montrer que G permute transitivement les éléments de Ω et que, pour tout $\mathcal{L} \in \Omega$, $\sigma_{\mathcal{L}}$ est un isomorphisme.

25. *a.* Montrer que les orbites des $\mathcal{L}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ sous l'action de $G_{\mathcal{B}}$ forment une partition de $\Omega - \{\mathcal{B}\}$. Montrer que $\operatorname{Card}(\Omega) = 288$.

b. Calculer le cardinal de G.

26. Vérifier que toute partie de cardinal 2 de $\mathcal{D}$ est contenue dans un élément de Ω. Montrer qu'étant donnés des couples (D, D') et (Δ, Δ') de droites de $\mathcal{D}$ tels que $D \neq D'$ et $\Delta \neq \Delta'$, il existe $g \in G$ tel que $g(D) = \Delta$ et $g(D') = \Delta'$.

RAPPORT SUR L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES GENERALES

I.- Thème du sujet

Le thème du problème était l'étude des systèmes de droites équiangulaires (nommés ici épis) dans un espace euclidien. Etant donnés un espace euclidien E de dimension $n \geqslant 2$, un entier $k \geqslant 2$ et un réel $\gamma \in]\, 0, 1\, [$, on appelait épi un ensemble D, de cardinal k, formé de droites vectorielles de E faisant deux à deux l'angle Arc cos γ.

Le fait central dans cette étude est que les paramètres n, k et γ ne peuvent être choisis arbitrairement. En particulier, l'existence d'un épi implique :

a) $k \leqslant \frac{1}{2} n\,(n+1)$,

b) $n \geqslant \dfrac{k}{1+(k-1)\,\gamma^2}$,

c) si $k > 2n, \frac{1}{\gamma}$ est un entier impair.

Ces résultats étaient obtenus dans la partie II, notamment au moyen de la matrice de Gram d'une famille de vecteurs. La majoration a) conduit naturellement à la question suivante : n étant fixé, quelle est la valeur maximale de k ? Pour quelques petites valeurs de n ($n = 2, 3, 6, 7$), les résultats des parties II, III, IV permettent de déterminer cette valeur maximale ($k = 3, 6, 16, 28$ respectivement). Pour plus de renseignements sur ce sujet, voir : Lemmens and Seidel, «Equiangular lines», Journal of Algebra, 24 (1973) pp. 494-512.

Une autre approche de l'étude des épis consiste à donner des méthodes de construction de certains épis, valables en toute dimension n, quitte à imposer des restrictions aux épis considérés. Ainsi, dans la partie III, on s'intéressait aux épis contenant une «base aiguë»; on était ainsi amené à aborder un problème de nature combinatoire (cf. 16). La conjonction des conditions : «$k = \frac{1}{2}\, n\,(n+1)$» et «D contient une base aiguë» aboutissait à la discussion d'une équation diophantienne (cf. 20).

Le troisième aspect du problème était l'étude des symétries d'un épi D, c'est-à-dire du groupe G de D. Dans la partie IV, s'attachant à un épi particulier D — de cardinal $k = 28$ et en dimension $n = 7$ — on déterminait le cardinal de G et on montrait que son opération est doublement transitive sur D. Ce groupe est par ailleurs bien connu ; il est simple et isomorphe au groupe symplectique $Sp_6\,(F_2)$. De plus, avec les notations de IV, on peut construire, dans E, un système de racines de type E_7 dont le groupe de Weyl est égal à Γ.

Signalons enfin, pour les amateurs d'érudition et en prolongement de la question 20.b, qu'il existe, en dimension $n = 23$, un épi D, de cardinal $k = 276$, contenant une base aiguë, et que le groupe G correspondant est le groupe simple d'ordre $2^{10} . 3^7 . 5^3 . 7 . 11 . 23$, découvert en 1969 par Conway.

II.- Observations

Le problème demandait aux candidats de manifester une bonne connaissance de plusieurs parties du programme. Citons, par exemple, l'ensemble des notions fondamentales de l'algèbre linéaire (rang, polynôme caractéristique et polynôme minimal, valeurs propres, trace, etc.), les espaces euclidiens, la théorie des polynômes, l'arithmétique, la combinatoire, et les groupes opérant sur un ensemble.

A quelques rares exceptions près, les candidats n'ont abordé ni les questions 11 à 14 de II, ni les parties III et IV (sauf les calculs, assez longs il est vrai, des questions 15 et 22). Ceci s'explique, en partie au moins, par la longueur du problème ; cependant il est dommage de constater que de nombreux candidats ont consacré l'essentiel de leurs efforts à la partie I, alors que l'énoncé précisait que cette partie rassemblait des résultats préliminaires.

Il est vrai que la partie I n'était pas «triviale» — ce qui permettait aux bons candidats d'exprimer rapidement leurs qualités —. Ainsi 2 b et 5 nécessitaient une certaine habileté technique. Peu de candidats ont traité correctement 2 a, qui ne demandait pourtant que des connaissances élémentaires sur les polynômes. A ce sujet, il est inadmissible d'affirmer qu'un polynôme irréductible de Q [X] est nécessairement de degré 1 ou 2.

Rappelons que si g est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien E, E possède une base orthonormée formée de vecteurs propres de g. Ce résultat servait tout au long du problème, sous diverses formes. Il permettait notamment de traiter les questions 1, 3, 4 a (avec quelques connaissances simples d'algèbre linéaire). Signalons à ce propos deux erreurs fréquemment rencontrées : il ne faut pas croire que la matrice d'un endomorphisme symétrique par rapport à une base quelconque est symétrique, ou encore la multiplicité d'une valeur propre d'un endomorphisme quelconque est toujours égale à la dimension de l'espace propre correspondant.

La partie I rassemblant des préliminaires, il fallait bien penser que ces résultats servaient par la suite : par exemple, à l'aide de 1, 4 et 5, les questions 6 et 7 pouvaient être traitées très simplement, sans perdre de temps à chercher des solutions détournées, souvent laborieuses.

D'une manière générale rappelons, pour les candidats futurs, que l'enchaînement des questions est important dans ce type de problème. D'ailleurs cet enchaînement peut déjà être entrevu après une lecture minutieuse de l'ensemble du sujet (lecture évidemment indispensable).

Pour terminer, il est clair qu'un candidat sérieux doit entrer dans le vif du sujet en traitant quelques questions substantielles ; ceci implique que les questions plus simples soient traitées avec concision. L'expérience a souvent montré, qu'au demeurant, concision et clarté vont de pair.

Répartition des notes

Notes	Nombre de candidats
0	146
1 — 4	472
5 — 8	270
9 — 12	219
13 — 16	197
17 — 20	157
21 — 24	116
25 — 28	78
29 — 32	80
33 — 36	45
37 — 40	25
41 — 48	22
49 — 60	7