ministère de l'éducation

direction des personnels enseignants
de lycées

Agrégation mathématiques

Rapport de Monsieur RICHE
Inspecteur général de l'Instruction publique
Président du jury

1978

présentation

1. COMPOSITION DU JURY

M. RICHE	*Inspecteur général de l'Instruction publique, président*
M. RAMIS	*Inspecteur général de l'Instruction publique, vice-président*
Mme AMICE	*Professeur à l'université de Paris VII.*
M. ANDRE	*Maître assistant à l'université de Nancy I*
M. ARCANGELI	*Maître de conférences à l'université de Pau*
M. ARTOLA	*Professeur à l'université de Bordeaux I*
M. AUQUE	*Maître assistant à l'université de Clermont-Ferrand*
M. BADRIKIAN	*Professeur à l'université de Clermont-Ferrand II*
M. BAYART	*Professeur au lycée Thiers à Marseille*
M. BECKER	*Professeur au lycée Montaigne à Bordeaux*
M. BLOCH	*Professeur au lycée Louis le Grand à Paris*
M. BLONDEL	*Professeur à l'université de Bordeaux I*
M. BROUE	*Chargé de recherches au C.N.R.S.*
M. CARPENTIER	*Professeur au lycée Carnot à Dijon*
M. CHAMBADAL	*Professeur au lycée Louis le Grand à Paris*
M. CHEVALLET	*Professeur au lycée Louis le Grand à Paris*
Mme DELEAU	*Professeur au lycée Descartes à Tours*
Mme EL KAROUI	*Maître de conférences à l'université du Maine*
M. FRAYSSE	*Professeur au lycée Fermat à Toulouse*
M. GENET	*Professeur à l'université des Pays de l'Adour*
M. GIORGIUTTI	*Professeur à l'université de Rennes I*
M. GOSTIAUX	*Professeur au lycée St Louis à Paris*
M. HALBERSTADT	*Maître assistant à l'université de Paris VI*
M. HEE	*Maître assistant à l'université de Paris XI*
M. HEINICH	*Maître assistant à l'université de Paris VI*
M. HELLEGOUARCH	*Maître de conférences à l'université de Caen*
M. HELMER	*Professeur au lycée Clemenceau à Reims*
M. KAROUBI	*Professeur à l'université de Paris VII*
M. LABESSE	*Maître de conférences à l'université de Picardie*
M. LOMBARD	*Maître assistant à l'université de Nancy I*
M. PAINTANDRE	*Professeur au lycée Fermat à Toulouse*
M. PRADINES	*Maître de conférences à l'université de Toulouse III*
M. REINHARD	*Maître de conférences à l'Ecole Polytechnique*
M. RISLER	*Maître assistant à l'université de Paris VII*
M. RIVET	*Professeur à l'Institut national des Sciences appliquées de Rennes*
M. ROSEAU	*Professeur à l'université de Paris VI*
M. SCHREIBER	*Maître de conférences à l'université d'Orléans*
M. SPECTOR	*Professeur à l'université d'Orléans*

M.	STERN	*Maître assistant à l'université de Paris VII*
M.	SURATTEAU	*Professeur au lycée Pothier à Orléans*
M.	THIBAULT	*Professeur à l'université de Toulouse III*
M.	WARUSFEL	*Professeur au lycée Henri IV à Paris*
M.	WIRTH	*Professeur au lycée St Louis à Paris*

2. CALENDRIER DES EPREUVES

2.1 Epreuves écrites

- Elles ont eu lieu aux dates suivantes :
  Mathématiques générales : 6 mai de 8 à 14 heures
  Analyse : 8 mai de 8 à 14 heures
  Mathématiques appliquées : 9 mai de 8 à 14 heures

- La liste d'admissibilité a été affichée le 16 juin au lycée St Louis et 34 rue de Chateaudun

2.2 Epreuves orales

Elles se sont déroulées du 26 juin au 23 juillet au lycée Montaigne à Paris.
Les résultats définitifs ont été publiés le 24 juillet.

3. STATISTIQUES DIVERSES

3 Résultats généraux

Postes mis au concours	165
Candidats inscrits	2 519
Candidats présents à la première épreuve	2 057
Candidats présents à la dernière épreuve	1 894
Admissibles (* étrangers)	279 + 2*
Admis	165 + 2*
Equivalence des épreuves théoriques du C.A.P.E.S.	3

Moyenne sur 20 des points obtenus par :

le premier admissible	20
le dernier admissible	8,5
le premier agrégé	17,5
le dernier agrégé	9,6

3.2 Répartition des notes d'écrit

Le tableau ci-dessous indique le nombre N (m) des candidats qui ont obtenu aux épreuves écrites une moyenne, sur 20, m supérieure (au sens large) à m

m	20	15	12,5	10	8,5	7,5	6,5	6	5,5
N (m)	1	13	57	140	281	376	554	610	705

Le rapport du nombre des candidats français admissibles à celui du nombre de postes mis au concours est très voisin de 1,7.

3.3 Répartition entre les options

	Analyse numérique	Mécanique	Probabilités
Ont composé	816	222	847
Admissibles	115	22	144
Admis	60	13	92

3.4 Situation universitaire des candidats.

Dans le tableau suivant, les notations U J C F T correspondent aux candidats des E.N.S. : Ulm, Jourdan, Saint-Cloud, Fontenay et E.N.S.E.T. Les autres abréviations sont les suivantes :

- E .... Etudiants
- I.P.E.S. .... Elèves des I.P.E.S.
- C.P.R. .... Stagiaires de C.P.R.
- P.C. .... Certifiés ou Bi-admissibles
- A .... Assistants
- C.O. .... Coopérants ou détachés
- S.N. .... Professeurs au service militaire, en congé ou en sursis
- M.A. .... Maîtres auxiliaires, maîtres d'internat ou d'externat
- P. .... Enseignement privé
- D. .... Divers (ingénieurs,...)

Candidats	U	J	C	F	T	E	I.P.E.S.	C.P.R.
Inscrits	27	35	15	40	43	335	222	432
Admissibles	26	26	11	24	26	25	42	32
Admis	22	20	9	19	21	14	21	14

Candidats	P.C.	A	C.O.	S.N.	M.A.	P	D	Total
Inscrits	853	44	57	156	204	52	7	2 522
Admissibles	37	6	5	16	3	0	2	281
Admis	12	5	3	6	1	0	0	167

3.5 Répartition suivant les centres d'écrit

Centres \ candidats	Inscrits	Ayant composé aux trois épreuves	Admissibles	Admis
Aix-Marseille	89	73	4	2
Amiens	92	70	3	0
Besançon	32	30	3	0
Bordeaux – Pau	58	18	3	1
Caen	50	41	1	1
Clermont	28	26	2	1
Dijon	45	37	6	2
Grenoble	115	106	12	5
Lille	202	157	12	3
Limoges	27	26	0	0
Lyon – St Etienne	97	78	4	3
Montpellier	54	48	6	3
Nancy – Metz	116	92	6	2

Centres \ candidats	Inscrits	Ayant composé aux trois épreuves	Admissibles	Admis
Nantes	97	61	4	4
Nice – Ajaccio	65	56	5	1
Orléans – Tours	60	48	5	5
Paris Créteil – Versailles	746	618	173	123
Poitiers	32	28	0	0
Reims	37	29	0	0
Rennes – Brest	74	58	5	4
Rouen	93	75	5	0
Strasbourg	71	62	7	2
Toulouse	79	68	2	2
Etranger	160	112	13	3

3.6 Affectations des agrégés de 1978

Sur les 165 candidats français admis :

5 demeurent assistants titulaires
7 conservent ou obtiennent une chaire de classe terminale C ou E
10 ont été nommés ou maintenus sur des chaires ordinaires (lycées ou collèges)
12 ont été mis à la disposition de recteurs
12 partiront au Service national
6 partiront en coopération ou bénéficieront d'un détachement
5 se trouveront en disponibilité ou bénéficieront d'un congé pour études ou d'un sursis d'intégration
4 ont été affectés à la D.G.R.S.T.
35 suivront un stage de formation professionnelle
69 effectueront une année supplémentaire dans une E.N.S.

écrit

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

Sujet (durée : 6 heures)

La rigueur des démonstrations, le soin apporté à leur rédaction, seront des éléments importants d'appréciation.

Les questions marquées d'une étoile ★ peuvent être considérées comme « questions subsidiaires » et laissées de côté dans un premier temps.

Les notations et certains résultats de la partie I *sont utilisés dans les parties* II.B *et* III.B. *Les parties* II *et* III *sont indépendantes l'une de l'autre.*

Dans tout le problème, on désigne par ω un entier strictement positif *pair*, et par Ω un ensemble de cardinal ω.

Pour tout ensemble fini E, on note $|E|$ son cardinal.

Pour tout entier n, on désigne par $\bar{n}$ son image modulo $2\mathbb{Z}$.

On note $\mathbb{Z}[X, Y]$ l'ensemble des polynômes à deux indéterminées à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

PARTIE I

I.A. Généralités

I.A.1. Vérifier que l'ensemble des parties de Ω, muni de l'opération « différence symétrique » définie par

$$(x, y) \longmapsto x + y = \{ t \in \Omega \ ; (t \in x \cup y) \quad \text{et} \quad (t \notin x \cap y) \}$$

est un groupe abélien.

I.A.2. Démontrer que l'ensemble des parties de Ω peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur le corps à deux éléments $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{ \bar{0}, \bar{1} \}$ dont la loi de groupe additif est celle définie en I.A.1. Grâce à quelle propriété particulière de cette loi de groupe cela est-il possible?

On désigne par $\mathfrak{P}(\Omega)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ainsi défini.

I.A.3. Quelle est la dimension de $\mathfrak{P}(\Omega)$? Fournir une base de cet espace.

I.A.4. Vérifier que l'application α de $\mathfrak{P}(\Omega) \times \mathfrak{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ définie par

$$\alpha(x, y) = \overline{|x \cap y|}$$

est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\mathfrak{P}(\Omega)$.

Dans tout ce qui suit, on suppose $\mathfrak{P}(\Omega)$ muni de cette forme bilinéaire α appelée forme bilinéaire naturelle sur $\mathfrak{P}(\Omega)$.

I.A.5. On désigne par $\mathcal{O}(\Omega)$ le sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathfrak{P}(\Omega)$ engendré par Ω. On désigne par $\mathcal{H}(\Omega)$ l'orthogonal de $\mathcal{O}(\Omega)$. Décrire cet orthogonal, et retrouver ainsi la formule

$$\binom{\omega}{0} + \binom{\omega}{2} + \cdots + \binom{\omega}{2k} + \cdots + \binom{\omega}{\omega} = 2^{\omega-1}.$$

Quel est le noyau de la restriction de la forme bilinéaire naturelle à $\mathcal{H}(\Omega)$?

I.B. Codes et polynômes des poids

Les sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{P}(\Omega)$ sont appelés les codes de $\mathfrak{P}(\Omega)$. Si $\mathcal{C}$ est un code de $\mathfrak{P}(\Omega)$, on désigne par $\mathcal{C}^{\circ}$ son orthogonal. Pour toute permutation s de Ω, on désigne par $\bar{s}$ l'application linéaire de $\mathfrak{P}(\Omega)$ dans $\mathfrak{P}(\Omega)$ définie par

$$x \longmapsto \bar{s}(x) = \{ s(t) \ ; \ (t \in x) \}.$$

On dit que deux codes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de $\mathfrak{P}(\Omega)$ sont isomorphes s'il existe une permutation s de Ω telle que $\bar{s}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.

I.B.1. Un code $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{P}(\Omega)$ est dit auto-orthogonal si $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\circ}$. Quelle est la dimension d'un code auto-orthogonal ? Démontrer que si $\mathcal{C}$ est auto-orthogonal on a $\mathcal{O}(\Omega) \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{H}(\Omega)$.

Soit $\mathcal{C}$ un code de $\mathfrak{P}(\Omega)$. On appelle polynôme des poids de $\mathcal{C}$ et on note $P_{\mathcal{C}}(X, Y)$ l'élément de $\mathbb{Z}[X, Y]$ défini par

$$P_{\mathcal{C}}(X, Y) = \sum_{x \in \mathcal{C}} X^{|x|} Y^{\omega - |x|}.$$

I.B.2. On pose $\omega = 2m$ et $\Omega = \{ t_1, t_2, \ldots, t_m, u_1, u_2, \ldots, u_m \}$. Construire un code auto-orthogonal dont le polynôme des poids est

$$P_{\omega}(X, Y) = (X^2 + Y^2)^m.$$

Soit $\Gamma(\Omega)$ l'ensemble des codes auto-orthogonaux de $\mathfrak{P}(\Omega)$ dont le polynôme des poids est $P_\omega(X, Y)$. Démontrer que deux éléments quelconques de $\Gamma(\Omega)$ sont isomorphes.

★ I.B.3. Pour $\omega = 2m$ multiple de 4
et $\Omega = \{t_1, t_2, \dots, t_m, u_1, u_2, \dots, u_m\}$,
vérifier que le code $\mathcal{B}_\omega$ engendré par $\{t_1, \dots, t_m\}, \{u_1, \dots, u_m\}, \{t_h, t_j, u_h, u_j\}$
pour $h \neq j$ et $1 \leqslant h \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant m$,
est un code auto-orthogonal dont le polynôme des poids est

$$Q_\omega(X, Y) = \frac{1}{2}\left((X^2 + Y^2)^m + (X^2 - Y^2)^m + (2XY)^m\right).$$

On dit qu'un code auto-orthogonal est pair si les cardinaux de tous ses éléments sont multiples de 4. Vérifier que si ω est multiple de 8, le code $\mathcal{B}_\omega$ défini ci-dessus est pair.

Pour $\omega = 16$, mettre en évidence un code $\mathcal{B}'_{16}$, non isomorphe à $\mathcal{B}_{16}$, dont le polynôme des poids est égal à $Q_{16}(X, Y)$.

I.B.4. Soit $\mathcal{C}$ un code de $\mathfrak{P}(\Omega)$. On se propose de démontrer la « formule de Mac-Williams » :

$$2^{\dim(\mathcal{C})} P_{\mathcal{C}^0}(X, Y) = P_{\mathcal{C}}(Y - X, X + Y).$$

I.B.4. *a*. Soit $f : \mathfrak{P}(\Omega) \to M$ une application à valeurs dans un groupe abélien M dont la loi est notée additivement. On pose $(-1)^{\bar{0}} = 1$ et $(-1)^{\bar{1}} = -1$, et on note alors $\hat{f} : \mathfrak{P}(\Omega) \to M$ la fonction définie par

$$\hat{f}(x) = \sum_{y \in \mathfrak{P}(\Omega)} (-1)^{\alpha(x,y)} f(y).$$

Démontrer que pour tout code $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{P}(\Omega)$, on a

$$\sum_{x \in \mathcal{C}} \hat{f}(x) = 2^{\dim(\mathcal{C})} \sum_{y \in \mathcal{C}^0} f(y).$$

I.B.4. *b*. En prenant pour M le groupe additif de $\mathbb{Z}[X, Y]$, et en choisissant judicieusement la fonction f, démontrer la formule de Mac-Williams.

PARTIE II

II.A. Invariants d'un groupe fini

Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie $n \geqslant 1$. Si g est un endomorphisme de V, on note $\mathrm{Tr}(g)$ sa trace. On note I l'endomorphisme-identité de V.

On désigne par G un sous-groupe fini du groupe des automorphismes de V.

II.A.1. On note V^G le sous-espace vectoriel de V formé des $v \in V$ tels que $g(v) = v$ pour tout g appartenant à G. Démontrer que

$$\dim(V^G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(g).$$

(On pourra utiliser l'endomorphisme $p_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$ et démontrer en particulier que $V^G = p_G(V)$.)

On choisit une fois pour toutes une base $(e_1, \dots, e_n)$ de V. On note A l'algèbre $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$; à tout élément g de G on associe l'application $\sigma_g : A \to A$ définie de la manière suivante

Si, pour $1 \leqslant h \leqslant n$, on a $g(e_h) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \gamma_{j,h} e_j$, et si $P(X_1, \dots, X_n)$ est un polynôme, élément de A, on pose

$$\sigma_g(P)(X_1, \dots, X_n) = P\Big(\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \gamma_{j,1} X_j, \dots, \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \gamma_{j,n} X_j\Big).$$

Pour tout entier naturel k, on note A_k l'espace vectoriel complexe des polynômes homogènes de degré k en n variables.

II.A.2. Vérifier que l'application $g \longmapsto \sigma_g$ est un homomorphisme de G dans le groupe des automorphismes de l'algèbre A. Vérifier que pour tout g appartenant à G l'application σ_g induit, pour tout entier naturel k, un automorphisme de l'espace vectoriel A_k

On note A_k^G l'ensemble des $P \in A_k$ tels que $\sigma_g(P) = P$ pour tout g appartenant à G.

II.A.3. On note a_k (resp. $a_k(G)$) la dimension de l'espace vectoriel A_k (resp. A_k^G). Démontrer que les séries entières $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(G) z^k$ ont des rayons de convergence strictement positifs (on pourra vérifier que, pour $|z| < 1$, on a $\frac{1}{(1-z)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.)

On pose

$$\Phi_G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(G) z^k.$$

II.A.4. Pour tout $g \in G$, on désigne par g_k l'automorphisme de A_k défini par g. Comparer la trace de g_k au coefficient de z^k dans le développement en série entière de $\frac{1}{\det(I - zg)}$. En déduire que pour $|z| < 1$, on a

$$\Phi_G(z) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(I - zg)}.$$

II.B. Algèbre associée aux polynômes des poids

On utilise ici les notations, définitions et résultats des parties I.A., I.B., II.A.

On note G le groupe de matrices engendré par

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \rho = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $P(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ et si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, on pose (voir II.A.)

$$\sigma_g(P)(X,Y) = P(aX + cY, bX + dY).$$

II.B.1. Soit $\mathcal{C}$ un code auto-orthogonal de $\mathfrak{P}(\Omega)$. Démontrer que $P_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est invariant par les transformations σ_g pour $g \in G$.

II.B.2. Démontrer que le groupe monogène H engendré par $\rho\mu$ est distingué dans G. Quel est le cardinal de H ? Étudier le groupe quotient G/H, et en déduire que G est de cardinal 16.

On pose $A = \mathbb{C}[X, Y]$ et on utilise les notations de II.A. pour $n = 2$.

II.B.3. Décomposer $\dfrac{1}{(1 - X^2)(1 - X^8)}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Démontrer que pour $|z| < 1$ on a

$$\Phi_G(z) = \frac{1}{(1 - z^2)(1 - z^8)}.$$

II.B.4. Si r est un réel, on note $[r]$ sa partie entière. Démontrer que la dimension de l'espace A_k^G des polynômes homogènes à deux variables de degré k invariants par G est

$$a_k(G) = \left[\frac{k}{8}\right] + 1 \quad \text{si } k \text{ est pair,}$$

$$a_k(G) = 0 \quad \text{si } k \text{ est impair.}$$

II.B.5. Démontrer que l'algèbre A^G des polynômes à deux variables, invariants par G, est l'algèbre

$\mathbb{C}[P_2(X, Y), Q_8(X, Y)] = \{P(P_2(X, Y), Q_8(X, Y))\ ;\ (P(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y])\}$

(les polynômes P_ω et Q_ω sont définis respectivement en I.B.2. et I.B.3.).

II.B.6. On pose $\Delta(X, Y) = X^2Y^2(X^2 - Y^2)^2$. Démontrer que si $\mathcal{C}$ est un code auto-orthogonal de $\mathfrak{P}(\Omega)$, le polynôme $P_{\mathcal{C}}(X, Y)$ appartient à l'algèbre $\mathbb{Z}[P_2(X, Y), \Delta(X, Y)] = \{P(P_2(X, Y), \Delta(X, Y))\ ;\ (P(X, Y) \in \mathbb{Z}[X, Y])\}$.

PARTIE III

Dans tout ce qui suit, on suppose que l'espace vectoriel $\mathbb{Q}^\omega$ est muni du produit scalaire canonique (pour lequel la base canonique de $\mathbb{Q}^\omega$ est orthonormale) noté

$$(v, w) \longmapsto v \,.\, w \in \mathbb{Q}.$$

Soit L un sous-groupe du groupe additif de $\mathbb{Q}^\omega$. On dit que L est un réseau de $\mathbb{Q}^\omega$ s'il existe une base $(e_1, e_2, \dots, e_\omega)$ de $\mathbb{Q}^\omega$ telle que L soit l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers relatifs des vecteurs $e_1, \dots, e_\omega$. On dit alors que $(e_1, \dots, e_\omega)$ est une $\mathbb{Z}$-base de L.

III.A. Généralités sur les réseaux

III.A.1. Soit L un réseau de $\mathbb{Q}^\omega$. On appelle dual de L et on note L^0 l'ensemble des $v \in \mathbb{Q}^\omega$ tels que $v \,.\, w \in \mathbb{Z}$ pour tout $w \in L$. Démontrer que le dual d'un réseau est un réseau.

III.A.2. Soit L un réseau de $\mathbb{Q}^\omega$. Vérifier que la valeur absolue du déterminant d'une $\mathbb{Z}$-base de L par rapport à une autre $\mathbb{Z}$-base de L est égale à 1. En déduire que la valeur absolue du déterminant d'une $\mathbb{Z}$-base de L par rapport à une base orthonormale de $\mathbb{Q}^\omega$ ne dépend que de L. Cette valeur est appelée « volume de L » et notée vol(L). Démontrer que $\mathrm{vol}(L)\mathrm{vol}(L^0) = 1$.

III.A.3. Soit M un sous-groupe du groupe additif de $\mathbb{Q}^\omega$ qui est engendré par un nombre fini d'éléments de $\mathbb{Q}^\omega$. Démontrer que si M contient un réseau de $\mathbb{Q}^\omega$, alors M est lui-même un réseau de $\mathbb{Q}^\omega$.

(On pourra procéder ainsi :

a. Démontrer qu'il existe un réseau L contenant M.

b. Soit $(e_1, \dots, e_\omega)$ une $\mathbb{Z}$-base de L. Pour tout $k \in \{1, \dots, \omega\}$ désignons par L_k le groupe engendré par $e_1, \dots, e_k$. Démontrer par récurrence sur k que $M \cap L_k$ est engendré par k vecteurs de $\mathbb{Q}^\omega$.)

III.A.4. On suppose ω multiple de 4. Soit $(w_1, w_2, \dots, w_\omega)$ une base orthogonale de $\mathbb{Q}^\omega$ telle que pour tout $j \in \{1, 2, \dots, \omega\}$ on a $w_j \cdot w_j = 1/4$.

Soit Λ_ω l'ensemble des vecteurs $v = \sum_{1 \leqslant j \leqslant \omega} \lambda_j w_j$ tels que

(*a*) les λ_j sont entiers et tous de même parité,

(*b*) $\sum_{1 \leqslant j \leqslant \omega} \lambda_j$ est multiple de 4.

Démontrer que Λ_ω est un réseau de $\mathbb{Q}^\omega$, et que $\Lambda_\omega^0 = \Lambda_\omega$.

III.A.5. Soit L un réseau de $\mathbb{Q}^\omega$. Démontrer qu'il existe des entiers $d \geqslant 1$ tels que pour tout v dans L on ait $d(v.v) \in \mathbb{N}$. On note d_L le plus petit de ces entiers. Pour tout entier naturel k, on note $c_k(L)$ le nombre de vecteurs de L de carré scalaire (k/d_L). Démontrer que la série $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(L)\, e^{\pi i k z}$ est convergente lorsque z appartient au demi-plan supérieur ouvert du plan de Cauchy (on rappelle que si $\zeta = a + ib$ est un nombre complexe, a et b étant réels, on pose $e^\zeta = e^a(\cos b + i \sin b)$).

On pose

$$\theta_L(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(L)\, e^{\pi i k z / d_L}.$$

On a ainsi

$$\theta_L(z) = \sum_{v \in L} e^{\pi i (v.v) z}.$$

III.B. Codes et réseaux

III.B.1. Démontrer qu'il existe une base orthogonale $(v_1, v_2, \dots, v_\omega)$ de $\mathbb{Q}^\omega$ telle que pour tout $j \in \{1, 2, \dots, \omega\}$ on ait $v_j \cdot v_j = 1/2$.

On choisit une telle base, et on désigne dorénavant par R le réseau qu'elle engendre.

III.B.2. Vérifier que les $\mathbb{Z}$-bases orthogonales de R ont toutes même ensemble image par la surjection canonique de R sur R / 2R.

On note Ω l'ensemble image d'une $\mathbb{Z}$-base orthogonale de R dans R / 2R.

III.B.3. On désigne par $\bar{v}$ l'image de $v \in \mathrm{R}$ dans R / 2R. Le groupe R / 2R est muni d'une structure naturelle d'espace vectoriel sur le corps à deux éléments $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On munit cet espace de la forme bilinéaire symétrique β définie par $\beta(\bar{v}, \bar{w}) = \overline{2v \cdot w}$. Vérifier que l'espace vectoriel R / 2R muni de la forme bilinéaire β est canoniquement isomorphe à $\mathfrak{P}(\Omega)$ muni de la forme bilinéaire naturelle α.

On identifie dorénavant R / 2R et $\mathfrak{P}(\Omega)$.

III.B.4. Soit $\mathcal{C}$ un code de $\mathfrak{P}(\Omega)$. On désigne par $\mathrm{L}(\mathcal{C})$ l'image réciproque de $\mathcal{C}$ par la surjection canonique de R sur $\mathrm{R}/2\mathrm{R} = \mathfrak{P}(\Omega)$. Vérifier que $\mathrm{L}(\mathcal{C})$ est un réseau de $\mathbb{Q}^\omega$. Démontrer que $\mathrm{L}(\mathcal{C})^\circ = \mathrm{L}(\mathcal{C}^\circ)$,
et que $\mathrm{vol}(\mathrm{L}(\mathcal{C})) = 2^{(\omega/2) - \dim(\mathcal{C})}$.

On dit que deux réseaux L et L′ de $\mathbb{Q}^\omega$ sont isomorphes s'il existe une isométrie τ de $\mathbb{Q}^\omega$ telle que $\tau(\mathrm{L}) = \mathrm{L}'$. Si deux codes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont isomorphes, les réseaux $\mathrm{L}(\mathcal{C})$ et $\mathrm{L}(\mathcal{C}')$ sont isomorphes.

III.B.5. Soit $\mathcal{A}$ un élément de l'ensemble $\Gamma(\Omega)$ [voir I.B.2.]. Démontrer que $\mathrm{L}(\mathcal{A})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^\omega$.

★III.B.6. On suppose ω multiple de 4. Démontrer que le réseau Λ_ω défini en III.A.4. contient un réseau isomorphe à 2R. Démontrer que Λ_ω est isomorphe à $\mathrm{L}(\mathcal{B}_\omega)$, et que si ω est multiple de 8 les carrés scalaires des vecteurs de Λ_ω sont tous pairs.

III.B.7. Pour z parcourant le demi-plan supérieur ouvert du plan de Cauchy, on pose

$$\varphi_2(z) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} e^{2\pi i \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 z} \qquad \text{et} \qquad \varphi_3(z) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{2\pi i k^2 z}.$$

Soit $\mathcal{C}$ un code de $\mathfrak{P}(\Omega)$. Démontrer que

$$\theta_{\mathrm{L}(\mathcal{C})}(z) = \mathrm{P}_{\mathcal{C}}(\varphi_2(z), \varphi_3(z)).$$

RAPPORT SUR L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES GENERALES

Certains résultats fondamentaux de la «nouvelle» théorie des «codes linéaires correcteurs d'erreurs» ont servi de support à ce problème, dont l'ambition était simplement de faire travailler les candidats sur des parties variées du programme d'algèbre : combinatoire et algèbre linéaire élémentaire en caractéristique 2 dans la première partie ; polynômes, groupes finis et algèbre linéaire pour la démonstration, dans un cas concret, d'un résultat de la «vieille» théorie des invariants dans la seconde partie ; résultats élémentaires sur les réseaux et étude de quelques exemples non triviaux dans la troisième partie.

Un «code linéaire» est tout simplement un sous-espace vectoriel de $(\mathrm{F}_q)^n$ «repéré» dans la base canonique de $(\mathrm{F}_q)^n$; les questions sur les codes linéaires concernent essentiellement ce repérage, et en particulier le nombre de coordonnées non nulles d'un vecteur du code. C'est pourquoi on associe, à tout code $\mathscr{C}$ de $(\mathrm{F}_q)^n$, le polynôme $\mathrm{P}_{\mathscr{C}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \sum_{0<k<n} a_k \mathrm{X}^k \mathrm{Y}^{n-k}$, où a_k désigne le nombre de vecteurs de $\mathscr{C}$ qui ont k coordonnées non nulles sur la base canonique de $(\mathrm{F}_q)^n$.

La formule de Mac-Williams, reliant le polynôme $\mathrm{P}_{\mathscr{C}^\circ}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ au polynôme $\mathrm{P}_{\mathscr{C}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ (cf. I. B. 4) permet d'utiliser la théorie des invariants pour trouver des conditions nécessaires non triviales afin qu'un polynôme homogène de $\mathrm{Z}[\mathrm{X},\mathrm{Y}]$ puisse être le polynôme associé à un code auto-orthogonal (cf. II. B. 6).

Il est intéressant de noter les analogies entre cette partie de la théorie des codes et certains aspects de la théorie des réseaux. En partant de la construction exposée en III.B., on peut par exemple interpréter le polynôme des poids comme la «traduction» de la fonction thêta, et la formule de Mac-Williams comme la «traduction» de la formule de Poisson.

Il ne peut évidemment être question, dans le cadre d'un tel rapport, de donner une copie «modèle». Essayons simplement de donner quelques conseils aux candidats futurs. Un coup d'œil sur les statistiques des notes indique que 20 % des concurrents ont une note $n < \frac{5}{60}$, et 40 % une note $< \frac{10}{60}$. Ces résultats sont frappants, surtout si l'on remarque que le problème de 1978 était plus facile que les précédents.

Il faut donc faire comprendre que le grappillage de points, véritable miroir aux alouettes, se révèle toujours peu payant. Des questions très simples ne figuraient dans l'énoncé qu'à titre d'indications conduisant aux véritables problèmes (par exemple I.A.1 à I.A.3, II.A.1 et II.B.1). La résolution correcte de ces exercices faciles, même remplissant une ou deux copies, ne donnait guère de points. Il va de soi, au contraire, que les démonstrations demandées en I.B.4., II.A.4 ou III.A.3., qui pouvaient être conduites après une étude rapide des questions faciles qui les entouraient, étaient beaucoup plus rentables. Il semble donc raisonnable de conseiller aux agrégatifs, après une lecture soignée de l'ensemble du sujet pendant une dizaine de minutes (ce qui éclaire souvent le sens des premières questions), de préparer brièvement la résolution des parties qui leur paraissent accessibles et de consacrer, par exemple, la deuxième et la troisième heure de l'épreuve à essayer de résoudre quelques questions visiblement plus intéressantes. La seconde partie des six heures commençant par une rédaction aussi précise que possible des résultats déjà acquis, pourra se terminer par de nouvelles tentatives sur des points difficiles. Une organisation rationnelle du temps, faisant alterner les périodes de recherche tendue et les «repos» relatifs (mises au point), permet de mieux utiliser un capital en réalité assez court : tous ceux qui s'acharnent de manière désordonnée, qui écrivent au fil de la plume sans méthode, le savent bien qui se retrouvent épuisés, plus par leur débauche d'énergie incontrôlée que par les difficultés réelles du problème...

Ajoutons deux remarques complémentaires. Si les résultats démontrés dans d'autres parties non triviales montrent une capacité technique honorable, il est parfaitement permis à un candidat de se contenter d'énoncer, dans les questions de routine, ceux des résultats qui lui paraissent évidents – par exemple du niveau d'une terminale – et de prouver uniquement les points qui exigent un peu plus qu'une vérification mécanique.(Par exemple, dans le I.A.1., seule l'associativité faisait réellement problème si l'on attaquait la question «à la main» ; autre exemple : l'isomorphisme de la fin du I.B.2 ne pouvait être simplement qualifié d'«évident» ; mais une remarque simple sur le cardinal de l'ensemble des paires et l'affirmation du caractère disjoint de celles-ci suffisait, dans une copie convenable par ailleurs, pour obtenir le maximum pour ce point). Le jury est toujours sensible à une concision de bon aloi qui prouve que l'on sait aller à l'essentiel.

Enfin il reste à attirer vigoureusement l'attention des candidats sur une notion morale : l'honnêteté intellectuelle. Certains comptent visiblement sur la lassitude des correcteurs pour bluffer de manière inadmissible, écrivant à peu près n'importe quel calcul qui se termine de manière abrupte par ... le bon résultat. Il est certain qu'un petit nombre d'entre eux peuvent, par chance, tromper ainsi le jury et voler quelques points. Il faut quand même savoir que la probabilité en est faible ; la double correction élimine la plus grande partie des coups de bluff qui auraient échappé au premier examinateur ; il faut également savoir que le poker est un art difficile, car de multiples indices (symétrie, homogénéité entre autres) permettent souvent de repérer le caractère frauduleux d'un «calcul» sans en avoir nécessairement testé chaque ligne. Enfin, la copie d'un candidat convaincu de malhonnêteté en un endroit sera évidemment lue par ailleurs avec une rigueur maximum et des points seront refusés systématiquement si le texte risque de présenter des obscurités ou des négligences. Le jeu n'en vaut donc pas la chandelle. Espérons donc voir régresser de telles pratiques.

Pour conclure, c'est avec quelque pessimisme que le jury se croit obligé de signaler, encore une fois, toujours en vain semble-t-il, que l'Agrégation est aussi un concours pédagogique ; redisons donc très vite que le respect des marges, l'encadrement des résultats, la séparation des étapes d'un raisonnement, des différentes questions d'une partie, sont toujours souhaitables, à défaut de nécessaires... *A fortiori,* faut-il encore réclamer une écriture lisible, des ratures franches plutôt que des mots surchargés, une orthographe correcte dans les mots usuels ? S'il est vrai que tout ceci peut paraître du détail et n'est pas officiellement comptabilisé dans la note, les candidats doivent savoir qu'il en résulte une impression d'ensemble qui, dans les cas de doute où il faut trancher un dilemne, peut servir un candidat qui, au moins, sait faire preuve ainsi d'un esprit clair et méthodique. L'utilité de cette qualité pour un mathématicien n'est évidemment pas à démontrer.

Répartition des notes

Notes	Nombre de candidats
0	42
1 – 4	359
5 – 8	309
9 – 12	364
13 – 16	316
17 – 20	256
21 – 24	178
25 – 28	103
29 – 32	40
33 – 36	46
37 – 40	22
41 – 48	15
49 – 60	7

COMPOSITION D'ANALYSE

Sujet (durée : 6 heures)

Les résultats utilisés devront être énoncés avec précision. La rigueur des démonstrations et le soin apporté à leur rédaction seront des éléments importants d'appréciation.

Les définitions et les notations introduites dans la partie I servent tout au long du problème.

Les parties II et III sont indépendantes.

On note $\mathbb{R}$ (Resp. $\mathbb{C}$) le corps des réels (Resp. Complexes). Il est supposé muni de la distance associée à la valeur absolue (Resp. le module).

Pour tout nombre complexe z, on note respectivement Re z et Im z ses parties réelle et imaginaire, et $\bar{z}$ son conjugué.

On note :

$\mathbb{R}^+$ l'ensemble $\{ x \mid (x \in \mathbb{R})$ et $(x \geqslant 0) \}$

$\mathbb{R}^-$ l'ensemble $\{ x \mid (x \in \mathbb{R})$ et $(x \leqslant 0) \}$

$\mathbb{R}^*$ l'ensemble $\{ x \mid (x \in \mathbb{R})$ et $(x \neq 0) \}$

$\mathbb{R}^{+*}$ l'ensemble $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^*$

$\mathbb{R}^{-*}$ l'ensemble $\mathbb{R}^- \cap \mathbb{R}^*$

Tout espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ est désigné par la même lettre que l'ensemble de ses éléments.

On note :

E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

E_0 le sous-espace de E formé par les applications constantes.

E_1 le sous-espace de E formé par les applications nulles en chaque point de $\mathbb{R}^-$.

E_2 le sous-espace de E formé par les applications nulles en chaque point de $\mathbb{R}^+$.

Pour tout espace vectoriel V, 1_V désigne l'application identique de V.

PARTIE I

1° Démontrer que E est somme directe de E_0, E_1, E_2.

Pour α, β, γ, deux à deux distincts, éléments de $\{0, 1, 2\}$, on note $p_\alpha : E \to E$ l'endomorphisme de projection sur E_α parallèlement à $E_\beta \oplus E_\gamma$.

2° A tout élément f de E, on associe l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$

$$g(0) = f(0)$$

Démontrer que g appartient à E.

3° On note Φ le $\mathbb{C}$-endomorphisme de E, qui à f associe g.

Φ est-il injectif?

Φ est-il surjectif?

Un sous-espace F de E est dit stable par Φ si et seulement si $\Phi(F) \subset F$; dans ce cas, l'application de F dans F, induite par Φ, est un endomorphisme de F.

4° Démontrer que, pour tout élément α de $\{0, 1, 2\}$, E_α est stable par Φ et que $p_\alpha \circ \Phi = \Phi \circ p_\alpha$; on note alors Φ_α l'endomorphisme de E_α induit par Φ.

PARTIE II

1° Soit λ un nombre complexe non nul.

Déterminer toutes les applications dérivables f de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad \lambda\, x f'(x) + (\lambda - 1) f(x) = 0$$

2° Déterminer avec soin l'ensemble S des valeurs propres de Φ_1 (cf. I, 4°), puis l'ensemble T des valeurs propres de Φ. Représenter graphiquement, dans le plan complexe, les ensembles S et T; on en précisera les points non intérieurs.

3° Pour tout λ dans S (Resp. T), on note E_1^λ (Resp. E^λ) le sous-espace propre de Φ_1 (Resp. Φ) associé à la valeur propre λ.

Pour tout λ dans S déterminer une base de E_1^λ.
Pour tout λ dans T déterminer une base de E^λ.

4° Pour tout λ dans S (Resp. T), pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $F_1^\lambda(n)$ (Resp. $F^\lambda(n)$) le sous-espace de E_1 (Resp. E) défini par :

$$F_1^\lambda(n) = \mathrm{Ker}\,(\Phi_1 - \lambda\, 1_{E_1})^n$$
$$(\text{Resp. } F^\lambda(n) = \mathrm{Ker}\,(\Phi - \lambda\, 1_E)^n)$$

On pose $F_1^\lambda = \bigcup_{n \geqslant 1} F_1^\lambda(n)$

et $F^\lambda = \bigcup_{n \geqslant 1} F^\lambda(n)$

Pour tout λ dans S, déterminer une base de F_1^λ.
Pour tout λ dans T, déterminer une base de F^λ.

5° *a.* Soit λ un élément de S ; déterminer tous les sous-espaces de F_1^λ stables par Φ_1.

En déduire une caractérisation de tous les sous-espaces de E_1 de dimension finie, stables par Φ_1.

b. Tout sous-espace H de E, de dimension finie, stable par Φ, est-il somme directe d'un sous-espace H_1 de E_1 et d'un sous-espace H_2 de E_2 stables par Φ ?

Partie III

On note A, B, C les sous-espaces vectoriels de E suivants :

$$A = \{ f \mid (f \in E) \quad \text{et} \quad (\lim_{x \to +\infty} f = 0) \quad \text{et} \quad (\lim_{x \to -\infty} f = 0) \}$$

$$B = \{ f \mid (f \in E) \quad \text{et} \quad (f \text{ est uniformément continue sur } \mathbb{R}) \}$$

$$C = \left\{ f \mid (f \in E) \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} | f(x) | \, dx < +\infty) \right\}$$

1° Déterminer toutes les inclusions concernant les ensembles A, B, C. (On demande donc six démonstrations; chaque inclusion ou non-inclusion devant être justifiée).

2° Comparer, toujours du point de vue de l'inclusion, A à $B \cap C$.

3° Démontrer que, pour tout élément f de B, il existe un couple (a, b) de réels tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad | f(x) | \leqslant a \, | x | + b$$

4° Les ensembles A, B, C, $A \cap C$ sont-ils stables par Φ ? Justifier chaque réponse par une démonstration.

Partie IV

On note D l'ensemble $\left\{ f \mid (f \in E) \text{ et } \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx < +\infty \right) \right\}$

1° *a.* Prouver que D est un sous-espace vectoriel de E.

b. Comparer, du point de vue de l'inclusion, D à chacun des ensembles A, B, C (justifier chacune des six réponses.)

2° Pour tout couple (f, g) d'éléments de D, on pose

$$< f \mid g > = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \; \overline{g(x)} \; dx$$

Vérifier que la forme hermitienne $(f, g) \longmapsto < f \mid g >$ est définie positive.

Pour tout élément f de D, on pose :

$$\|f\| = < f \mid f >^{\frac{1}{2}}$$

3° Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Soit f un élément de D, on pose $g = \Phi(f)$. Démontrer que :

$$\int_a^b |g(x)|^2 dx \leqslant a\,|g(a)|^2 + 2\left[\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx \, . \int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

4° Démontrer que D est stable par Φ.

5° Démontrer que : $\forall f \in D \quad \| \Phi(f) \|^2 = 2 \operatorname{Re} < \Phi(f) \mid f >$

6° On munit D de la norme $\| \;\; \|$. On note Φ_D l'endomorphisme de D induit par Φ.

a. Prouver que Φ_D est continu et que, pour tout f dans D, on a :

$$\| \Phi_D(f) \| \leqslant 2 \|f\|$$

b. Démontrer que

$$\operatorname{Sup} \{ \| \Phi_D(f) \| \mid (f \in D) \text{ et } (\|f\| = 1) \} = 2$$

7° Démontrer le résultat plus précis suivant :

$$(\forall f \in D) \quad (f \neq 0 \Rightarrow \| \Phi_D(f) \| < 2 \|f\|)$$

RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE

1. Remarques générales

Le problème a pour thème l'étude de l'endomorphisme de l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, défini par $\Phi : f \mapsto g$ avec $g(0) = f(0)$ et pour $x \neq 0$

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt$$

Les deux premières parties portent sur l'étude algébrique de l'endomorphisme : détermination des éléments propres et de certains sous-espaces stables de dimension finie.

La troisième partie, composée essentiellement de question de cours (niveau DEUG) et le début de la quatrième partie, portent sur la comparaison (au sens de l'inclusion) de quelques sous-espaces et l'étude de leur stabilité par Φ.

La fin de la quatrième partie conduit à la formule de Hardy-Littlewood et à la détermination de la norme de Φ_D (Restriction de Φ à l'espace des fonctions continues de carré sommable).

2. Remarques sur la résolution et la correction

Les fonctions étaient prises à valeurs dans $\mathbb{C}$, ce qui excluait bien sûr l'emploi de la formule de la moyenne ou des accroissements finis sous leur forme réelle, erreur souvent commise.

Première partie

Même dans ces questions d'une extrême simplicité les candidats ont, pour la plupart, commis des erreurs inadmissibles de la part de titulaires de la maîtrise, voire du C.A.P.E.S. : pour démontrer qu'une somme de trois sous-espaces est directe, un candidat sur deux se contente de vérifier que les intersections deux à deux sont réduites à $\{0\}$; d'autres prétendent que :

$$f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{est injective...}$$

Deuxième partie

Les deux dernières questions n'ont été abordées que dans les meilleures copies ; dans beaucoup de cas cette partie n'a pas été traitée.

On aurait aimé voir résolue proprement l'équation différentielle ; on pouvait :

- soit remarquer que si f est solution, l'application $x \mapsto x^{\frac{\lambda - 1}{\lambda}} f(x)$ est à dérivée nulle sur $]0, +\infty[$
- soit, après avoir constaté que l'équation est linéaire du premier degré, sans singularités sur $]0, +\infty[$, remarquez que $x \mapsto x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ est solution.

Bien peu signalent que 0 n'est pas valeur propre puisque Φ_1 est injective.

La condition $\mathrm{R}e\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) > 0$ est en général obtenue par ceux qui abordent la recherche des valeurs propres de Φ_1, mais la réciproque est rarement étudiée.

La représentation graphique de S (disque ouvert de centre 1/2 et de rayon 1/2) est souvent surprenante : on rencontre des ellipses, des carrés, des hyperboles construites souvent point par point.

Les questions 4 et 5 , une fois utilisée la méthode de variation de la constante, étaient purement algébriques, la seule difficulté se situant au niveau de la mise en forme des récurrences.

Troisième partie

Les inclusions (ou non inclusions) relevaient du cours du DEUG ; seule $A \subset B$ était vraie.

Les contre-exemples usuels semblent mal connus ; il est tout de même surprenant que des agrégatifs puissent ignorer l'existence de fonctions continues, sommables n'ayant pas pour limite 0 à l'infini.

Pour prouver que $B \cap C$ est strictement inclus dans A il suffisait, en supposant que f n'a pas pour limite 0 à l'infini, de nier le critère de Cauchy relatif à la convergence de

$\int_0^x |f(t)|\,dt$ en utilisant l'uniforme continuité de f.

La majoration $|f(x)| \leqslant a\,|x| + b$ (pour f uniformément continue) devrait être connue des candidats ; certains prétendent que toute application uniformément continue est lipschitzienne.

La stabilité de B par Φ pouvait s'obtenir en isolant l'origine dans $[-2, 2]$ par exemple, et en utilisant la majoration 3 dans $]-\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$; certains ont remarqué que

$\Phi(f)(x) = \int_0^1 f(tx)\,dt$ ce qui conduisait à une autre solution.

Le choix de $x \to \dfrac{1}{1+x^2}$ prouvait que ni A ni $A \cap C$ n'étaient stables par Φ.

Quatrième partie

Très peu de candidats ont dépassé la seconde question. Dans de nombreuses copies on trouve l'étrange majoration $(a+b)^2 \leqslant a^2 + b^2$ utilisée pour prouver que D est un espace vectoriel.

Il n'existe aucune relation d'inclusion entre D et A, B, C ; là encore les contre-exemples usuels ont fait défaut.

La majoration de la troisième question était peut-être plus délicate, elle s'obtenait à l'aide d'une intégration par parties suivie de l'utilisation de la relation de Schwarz.

L'égalité du 5 reposait sur le lemme suivant : si f est de carré sommable $x \to \dfrac{1}{\sqrt{x}} \displaystyle\int_0^x |f(t)|\,dt$ a pour limite 0 quand x tend vers l'infini ; ceci a été perçu par les meilleurs candidats.

Pour calculer la norme de Φ_D (6 b)) on pouvait envisager l'étude de la famille de fonctions $(f_\alpha)_{1/2 < \alpha < 1}$ définie par :

Pour $|x| \leqslant 1$ $\quad f_\alpha(x) = 1$

$|x| > 1$ $\quad f_\alpha(x) = \dfrac{1}{|x|^\alpha}$

On calculait $\dfrac{\|\Phi(f_\alpha)\|}{\|f_\alpha\|}$ et l'on faisait tendre α vers 1/2.

Dans 7 , on prouvait que $\|\Phi_D\|$ ne pouvait être atteinte que dans une direction propre, auquel cas 2 était valeur propre contrairement au résultat de la seconde partie.

3. Conclusion

Ce problème d'analyse était particulièrement court et simple. Les correcteurs ont constaté que les questions les plus élémentaires ont suffi pour départager les candidats ; beaucoup d'entre eux, à l'issue de la maîtrise, semblent ne plus avoir grand souvenir des faits élémentaires, fondamentaux qu'ils se préparent pourtant à enseigner. Il faut une fois de plus regretter que leur préparation ne commence pas par la révision des points essentiels du programme, et qu'elle reste trop souvent axée sur l'acquisition d'une érudition superflue.

4. Répartition des notes

Notes	Nombre de candidats
0	57
1 – 4	307
5 – 8	380
9 – 12	321
13 – 16	251
17 – 20	195
21 – 24	172
25 – 28	99
29 – 32	74
33 – 36	40
37 – 40	31
41 – 48	26
49 – 60	12
Total	1 965

ANALYSE NUMÉRIQUE

Sujet (durée : 6 heures)

0. NOTATIONS ET DÉFINITIONS

On convient d'appeler *polygone fermé* l'adhérence d'un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^2$ à frontière polygonale, *quadrilatère fermé* un polygone fermé dont la frontière est formée de quatre côtés.

Pour tout quadrilatère fermé K et pour tout $m \in \mathbb{N}$ (resp. pour $m = +\infty$), on désigne par $C^m(K)$ l'espace vectoriel des restrictions à K des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ m fois (resp. indéfiniment) continûment différentiables dans $\mathbb{R}^2$. Pour tout $m' \in \mathbb{N}$, $m' \leqslant m$, on définit sur $C^m(K)$ la semi-norme

$$v \longmapsto |v|_{m', \infty, K} = \sup_{|\alpha| = m'} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha v(x)|,$$

où l'on a noté $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, $x = (x_1, x_2)$ et $\partial^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on désigne par $P_k(\mathbb{R}^2)$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de degré $\leqslant k$ par rapport à l'ensemble des variables x_1 et x_2 et, pour tout quadrilatère fermé K, par $P_k(K)$ l'espace vectoriel des restrictions à K des éléments de $P_k(\mathbb{R}^2)$.

On appellera *élément fini* (en abrégé E.F.) tout triplet (K, V_K, Σ_K) où K est un quadrilatère fermé, V_K un sous-espace vectoriel de dimension finie N $(N > 0)$ de $C^\infty(K)$ et Σ_K un ensemble de N points distincts $a_1, \ldots, a_N$ de K (les *nœuds* de l'E.F.), vérifiant la propriété suivante : il existe un (unique) système de N fonctions $w_1, \ldots, w_N$ appartenant à V_K (les *fonctions de base* de l'E.F.), telles que pour tout entier i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant N$, et pour tout entier j vérifiant $1 \leqslant j \leqslant N$,

$$w_i(a_j) = \delta_{ij},$$

où $\delta_{i,j} = 0$, si $j \neq i$, et $\delta_{i,i} = 1$ pour tout i $(1 \leqslant i \leqslant N)$.

A tout E.F. (K, V_K, Σ_K), on associe un opérateur Π_K de $C^0(K)$ dans V_K (l'*opérateur d'interpolation* de l'E.F.), défini par

$$\underset{K}{\Pi} v = \sum_{i=1}^{N} v(a_i)\, w_i.$$

On dira que l'E.F. (K, V_K, Σ_K) *a la propriété* $\mathcal{F}_0$ s'il vérifie la condition suivante: pour toute fonction $v \in V_K$ et pour tout côté K' de K,

$$(\forall x \in K' \cap \Sigma_K,\ v(x) = 0) \Rightarrow (v|_{K'} = 0),$$

où l'on a noté $v|_{K'}$ la restriction de v à K'.

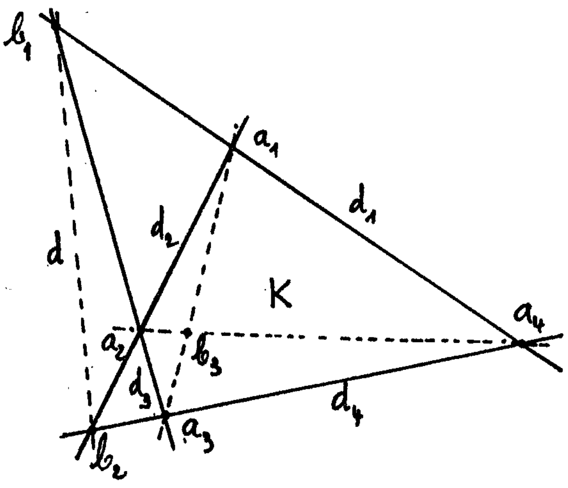

Figure 1

Soit $\mathrm{I} = \mathbb{Z}/4\,\mathbb{Z}$, qui servira d'ensemble d'indices (on convient de l'écriture suivante : *à la place de* $\bar{i} \in \mathrm{I}$, *on mettra* $i \in \mathbb{Z}$, *représentant quelconque de la classe* $\bar{i}$). Soit K un quadrilatère fermé *convexe* et *à côtés deux à deux opposés non parallèles* (cf. fig. 1). On désignera par d la diagonale extérieure de K et, pour tout $i \in \mathrm{I}$, on notera a_i les sommets de K (indicés de façon que a_4 désigne le sommet *le plus éloigné de* d et que, pour tout $i \in \mathrm{I}$, a_{i-1} et a_i soient consécutifs) et d_i la droite portant le côté d'extrémités a_{i-1} et a_i. On désignera par l (resp., pour tout $i \in \mathrm{I}$, par l_i) un élément de $\mathrm{P}_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $l(x) = 0$ (resp. $l_i(x) = 0$) soit une équation de la droite d (resp. de la droite d_i). On notera b_3 le point de concours des diagonales intérieures, b_1 (resp. b_2) le point d'intersection de d_1 et de d_3 (resp. de d_2 et de d_4). Enfin, on désignera par h_K (resp. par ρ_K) le *diamètre de* K (resp. le *maximum des diamètres des cercles contenus dans* K), $\mathbb{R}^2$ étant muni de la distance euclidienne usuelle δ. *Dans la suite,* K *désignera toujours un quadrilatère défini comme ci-dessus.*

On utilisera également le carré fermé $\widehat{\mathrm{K}} = \{\hat{x} = (\hat{x}_1,\ \hat{x}_2) \in \mathbb{R}^2\ ;\ |\hat{x}_1| \leqslant 1\ ,\ |\hat{x}_2| \leqslant 1\}$, de sommets $\hat{a}_1 = (-1\ ,\ 1)$, $\hat{a}_2 = (-1\ ,\ -1)$, $\hat{a}_3 = (1\ ,\ -1)$, $\hat{a}_4 = (1\ ,\ 1)$. Pour tout $i \in \mathrm{I}$, on notera $\hat{d}_i$ la droite portant le côté d'extrémités $\hat{a}_{i-1}$ et $\hat{a}_i$, et $\hat{l}_i$ un élément de $\mathrm{P}_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $\hat{l}_i(\hat{x}) = 0$ soit une équation de la droite $\hat{d}_i$.

I

Q. 1 Pour tout $i \in \mathrm{I}$, soit w_i la fonction de K dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\text{(I.1)} \qquad \forall\, x \in \mathrm{K}, \quad w_i(x) = \mathrm{C}_i\, \frac{l_{i+2}(x)\ l_{i+3}(x)}{l(x)},$$

où C_i est une constante telle que $w_i(a_i) = 1$. On désigne par $\mathrm{V_K}$ l'espace vectoriel (réel) engendré par l'ensemble $\{w_i\ ;\ i \in \mathrm{I}\}$ et par Σ_K l'ensemble $\{a_i\ ;\ i \in \mathrm{I}\}$.

a. Vérifier que $(\mathrm{K}, \mathrm{V_K}, \Sigma_\mathrm{K})$ est un E.F.

Remarquant que, pour tout $i \in \mathrm{I}$, les droites d_i, d_{i+2} et d sont concourantes, montrer que, pour tout $i \in \mathrm{I}$ et pour tout côté K′ de K, la restriction de w_i à K′ est *affine*.

En déduire que $(\mathrm{K},\ \mathrm{V_K},\ \Sigma_\mathrm{K})$ a la propriété $\mathcal{F}_0$.

b. Soit Ψ un élément quelconque de $\mathrm{P}_1(\mathrm{K})$. Vérifier que la fonction $\Psi - \Pi_\mathrm{K}\Psi$ s'annule sur la frontière de K.

En déduire que $\mathrm{V_K} \supset \mathrm{P}_1(\mathrm{K})$.

Peut-on avoir $\mathrm{V_K} \supset \mathrm{P}_2(\mathrm{K})$?

Q. 2 Pour tout $i \in \mathrm{I}$, soient $a_{i-1,\,i}$ un point de d_i différent de a_{i-1} et de a_i, l'_i un élément de $\mathrm{P}_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $l'_i(x) = 0$ soit une équation de la droite passant par les points $a_{i-1,\,i}$ et $a_{i,\,i+1}$, et soient w_i et $w_{i-1,\,i}$ les fonctions de K dans $\mathbb{R}$ définies par

$$(\mathrm{I}.2)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \forall x \in \mathrm{K}, & w_i(x) = \mathrm{C}_i \, \dfrac{l_{i+2}(x)\; l_{i+3}(x)\; l'_i(x)}{l(x)}, \\[2ex] \forall x \in \mathrm{K}, & w_{i-1,i}(x) = \mathrm{C}_{i-1,i} \, \dfrac{l_{i+1}(x)\; l_{i+2}(x)\; l_{i+3}(x)}{l(x)}, \end{array}\right.$$

où C_i et $\mathrm{C}_{i-1,\,i}$ sont des constantes telles que $w_i(a_i) = 1$, $w_{i-1,\,i}(a_{i-1,\,i}) = 1$.

On désigne maintenant par $\mathrm{V_K}$ l'espace vectoriel engendré par l'ensemble $\{w_i,\ i \in \mathrm{I}\,;\ w_{i-1,\,i},\ i \in \mathrm{I}\}$ et par Σ_K l'ensemble $\{a_i,\ i \in \mathrm{I}\,;\ a_{i-1,\,i},\ i \in \mathrm{I}\}$.

Le triplet $(\mathrm{K}, \mathrm{V_K}, \Sigma_\mathrm{K})$ est-il un E.F. ?

A-t-il la propriété $\mathcal{F}_0$?

Existe-t-il $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{V_K} \supset \mathrm{P}_k(\mathrm{K})$ et $\mathrm{V_K} \not\supset \mathrm{P}_{k+1}(\mathrm{K})$?

II

Soient K défini comme au § 0., quelconque, et $\mathrm{G_K}$ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$(\mathrm{II}.1)\qquad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathrm{G_K}(\lambda) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\, b_3.$$

Soient $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ l'élément de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$(\mathrm{II}.2)\qquad \mathrm{G_K}(\xi) = a_4,$$

et s l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$(\mathrm{II}.3)\qquad s(\hat{x}) = \xi_1 \hat{x}_1 + \xi_2 \hat{x}_2 + \xi_3,$$

où l'on a posé $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ et $\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$ (on remarquera que $\xi_1 < 0$, $\xi_2 < 0$, $\xi_3 > 1$ et que, pour tout $\hat{x} \in \hat{\mathrm{K}}$, $s(\hat{x}) \geqslant 1$).

Soient enfin S la droite d'équation $s(\hat{x}) = 0$ et $\mathrm{H_K}$ l'application de $\complement_{\mathbb{R}^2} \mathrm{S}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$(\mathrm{II}.4)\qquad \forall \hat{x} \in \mathbb{R}^2,\ s(\hat{x}) \neq 0,\quad \mathrm{H_K}(\hat{x}) = \left(\frac{\xi_1 \hat{x}_1}{s(\hat{x})}, \frac{\xi_2 \hat{x}_2}{s(\hat{x})}\right).$$

On considère alors l'application composée

$$(\mathrm{II}.5)\qquad \mathrm{F_K} = \mathrm{G_K} \circ \mathrm{H_K}.$$

Q. 3 *a.* Vérifier que $\mathrm{F_K}$ est injective, que $\mathrm{F_K}(\hat{a}_4) = a_4$ et que $\mathrm{F_K}(0) = b_3$.

Montrer que, pour tout couple $(\hat{x}, x)$ de points de $\mathbb{R}^2$ tels que $l(x) \neq 0$ et $x = \mathrm{F_K}(\hat{x})$, on a

$$(\mathrm{II}.6)\qquad s(\hat{x}) = \frac{l(a_4)}{l(x)}$$

et que l'image par $\mathrm{F_K}$ d'une droite (privée éventuellement d'un point) distincte de la droite S est une droite (privée éventuellement d'un point).

b. Montrer que $\mathrm{F_K}(\hat{a}_1) = a_1$, $\mathrm{F_K}(\hat{a}_2) = a_2$, $\mathrm{F_K}(\hat{a}_3) = a_3$ et que $\mathrm{F_K}(\hat{\mathrm{K}}) = \mathrm{K}$.

c. Vérifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\text{(II.7)}\quad \begin{aligned}&\{\hat{v} : \hat{K} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; \exists\, v \in P_k(K),\ \forall\, \hat{x} \in \hat{K},\ \hat{v}(\hat{x}) = (v \circ F_K)(\hat{x})\}\\ &= \left\{\hat{v} \; ; \; \exists\, \hat{u} \in P_k(\hat{K}),\ \forall\, \hat{x} \in \hat{K},\ \hat{v}(\hat{x}) = \frac{\hat{u}(\hat{x})}{s^k(\hat{x})}\right\},\end{aligned}$$

$$\text{(II.8)}\quad \begin{aligned}&\{v : K \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; \exists\, \hat{v} \in P_k(\hat{K}),\ \forall\, x \in K,\ v(x) = (\hat{v} \circ F_K^{-1})(x)\}\\ &= \left\{v \; ; \; \exists\, u \in P_k(K),\ \forall\, x \in K,\ v(x) = \frac{u(x)}{l^k(x)}\right\}.\end{aligned}$$

Q. 4 Pour tout $i \in I$, on note

$$\hat{a}_{i,\,i,\,i+1} = \frac{2\,\hat{a}_i + \hat{a}_{i+1}}{3}\;, \quad \hat{a}_{i,\,i+1,\,i+1} = \frac{\hat{a}_i + 2\,\hat{a}_{i+1}}{3}$$

et on désigne par $\hat{l}'_i$ (resp. par $\hat{\gamma}$) un élément de $P_1(\mathbb{R}^2)$ [resp. de $P_2(\mathbb{R}^2)$] tel que $\hat{l}'_i(\hat{x}) = 0$ (resp. $\hat{\gamma}(\hat{x}) = 0$) soit une équation de la droite passant par les points $\hat{a}_{i,\,i,\,i+1}$, et $\hat{a}_{i+2,\,i+3,\,i+3}$ (resp. du cercle passant par les huit points $\hat{a}_{i,\,i,\,i+1}$, $\hat{a}_{i,\,i+1,\,i+1}$, $i \in I$).

Pour tout $i \in I$, soient alors $\hat{w}_i$, $\hat{w}_{i,\,i,\,i+1}$ et $\hat{w}_{i,\,i+1,\,i+1}$ les fonctions de $\hat{K}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\text{(II.9)}\quad \left\{\begin{aligned}&\forall\, \hat{x} \in \hat{K},\quad \hat{w}_i(\hat{x}) = \hat{C}_i\, \hat{l}_{i+2}(\hat{x})\, \hat{l}_{i+3}(\hat{x})\, \hat{\gamma}(\hat{x}),\\ &\forall\, \hat{x} \in \hat{K},\quad \hat{w}_{i,\,i,\,i+1}(\hat{x}) = \hat{C}_{i,\,i,\,i+1}\, \hat{l}_{i+2}(\hat{x})\, \hat{l}_{i+3}(\hat{x})\, \hat{l}_i(\hat{x})\, \hat{l}'_{i+2}(\hat{x}),\\ &\forall\, \hat{x} \in \hat{K},\quad \hat{w}_{i,\,i+1,\,i+1}(\hat{x}) = \hat{C}_{i,\,i+1,\,i+1}\, \hat{l}_{i+2}(\hat{x})\, \hat{l}_{i+3}(\hat{x})\, \hat{l}_i(\hat{x})\, \hat{l}'_i(\hat{x}),\end{aligned}\right.$$

où $\hat{C}_i$, $\hat{C}_{i,\,i,\,i+1}$, $\hat{C}_{i,\,i+1,\,i+1}$ sont des constantes telles que $\hat{w}_i(\hat{a}_i) = 1$, $\hat{w}_{i,\,i,\,i+1}(\hat{a}_{i,\,i,\,i+1}) = 1$, $\hat{w}_{i,\,i+1,\,i+1}(\hat{a}_{i,\,i+1,\,i+1}) = 1$.

On désigne par $V_{\hat{K}}$ l'espace vectoriel engendré par l'ensemble

$$\{\hat{w}_i,\ i \in I\; ;\ \hat{w}_{i,\,i,\,i+1},\ i \in I\; ;\ \hat{w}_{i,\,i+1,\,i+1},\ i \in I\}$$

et par $\Sigma_{\hat{K}}$ l'ensemble

$$\{\hat{a}_i,\ i \in I\; ;\ \hat{a}_{i,\,i,\,i+1},\ i \in I\; ;\ \hat{a}_{i,\,i+1,\,i+1},\ i \in I\}.$$

Montrer que $(\hat{K}, V_{\hat{K}}, \Sigma_{\hat{K}})$ est un E.F., qu'il a la propriété $\mathscr{F}_0$, que $V_{\hat{K}} \supset P_3(\hat{K})$ et que $V_{\hat{K}} \not\supset P_4(\hat{K})$.

Q. 5 Pour tout $i \in I$, on pose $a_{i,\,i,\,i+1} = F_K(\hat{a}_{i,\,i,\,i+1})$, $a_{i,\,i+1,\,i+1} = F_K(\hat{a}_{i,\,i+1,\,i+1})$ et on considère les fonctions w_i, $w_{i,\,i,\,i+1}$ et $w_{i,\,i+1,\,i+1}$ de K dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\text{(II.10)}\quad \left\{\begin{aligned}&\forall\, x \in K,\quad w_i(x) = C_i\left(\left(\frac{\hat{w}_i}{s^3}\right) \circ F_K^{-1}\right)(x),\\ &\forall\, x \in K,\quad w_{i,\,i,\,i+1}(x) = C_{i,\,i,\,i+1}\left(\left(\frac{\hat{w}_{i,\,i,\,i+1}}{s^3}\right) \circ F_K^{-1}\right)(x),\\ &\forall\, x \in K,\quad w_{i,\,i+1,\,i+1}(x) = C_{i,\,i+1,\,i+1}\left(\left(\frac{\hat{w}_{i,\,i+1,\,i+1}}{s^3}\right) \circ F_K^{-1}\right)(x),\end{aligned}\right.$$

où C_i, $C_{i,\,i,\,i+1}$, $C_{i,\,i+1,\,i+1}$ sont des constantes telles que $w_i(a_i) = 1$, $w_{i,\,i,\,i+1}(a_{i,\,i,\,i+1}) = 1$, $w_{i,\,i+1,\,i+1}(a_{i,\,i+1,\,i+1}) = 1$.

On désigne maintenant par V_K l'espace vectoriel engendré par l'ensemble

$$\{ w_i , \ i \in I ; \ w_{i,i,i+1} , \ i \in I ; \ w_{i,i+1,i+1} , \ i \in I \}$$

et par Σ_K l'ensemble

$$\{ a_i , \ i \in I ; \ a_{i,i,i+1} , \ i \in I ; \ a_{i,i+1,i+1} , \ i \in I \} .$$

a. Que peut-on dire du triplet (K, V_K, Σ_K) ?

b. Pour tout $i \in I$, exprimer w_i, $w_{i,i,i+1}$ et $w_{i,i+1,i+1}$ en fonction de l, d'éléments (que l'on précisera) de $P_1(\mathbb{R}^2)$ et de $P_2(\mathbb{R}^2)$ et de constantes convenables.

III

Soient $k \in \mathbb{N}$ et (K, V_K, Σ_K) un E.F. dont les nœuds sont notés a_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, les fonctions de base w_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, et l'opérateur d'interpolation Π_K. On suppose que l'E.F. est tel que

(III.1) $$V_K \supset P_k(K) .$$

On note $\mathring{K}$ l'intérieur de K. Pour tout $v \in C^{k+1}(K)$, pour tout $x \in \mathring{K}$ et pour tout $y \in \mathring{K}$, on pose

(III.2) $$R(k, v, x, y) = \frac{1}{k!} \int_0^1 (1-t)^k D^{k+1} v(x + t(y-x)).(y-x)^{k+1} \, dt,$$

définition qui a un sens puisque K est convexe (pour tout $j \in \mathbb{N}$, $j \leqslant k+1$, et pour tout $x \in \mathring{K}$, $D^j v(x)$ désigne la dérivée j-ème de v au point x, forme j-linéaire symétrique continue sur $(\mathbb{R}^2)^j$, et, pour tout $h \in \mathbb{R}^2$, $D^j v(x).(h)^j$ désigne la valeur de $D^j v(x)$ sur le multivecteur $(h, \ldots, h) \in (\mathbb{R}^2)^j$).

On rappelle que

(III.3) $$\forall v \in C^{k+1}(K), \ \forall x \in \mathring{K}, \ \forall y \in \mathring{K}, \quad R(k, v, x, y) = v(y) - \sum_{j=0}^{k} \frac{D^j v(x).(y-x)^j}{j!} .$$

Q. 6 Pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$, on note $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ et $\alpha ! = \alpha_1 ! \, \alpha_2 !$.

a. Partant de la relation

(III.4) $$\forall x \in \mathring{K}, \ \forall z \in \mathring{K}, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, \ |\alpha| \leqslant k, \ \sum_{i=1}^{N} (a_i - z)^\alpha w_i(x) = (x - z)^\alpha ,$$

montrer que

(III.5) $$\forall x \in \mathring{K}, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, \ |\alpha| \leqslant k, \ \forall \beta \in \mathbb{N}^2, \ \sum_{i=1}^{N} (a_i - x)^\alpha \partial^\beta w_i(x) = \alpha ! \, \delta_{\alpha\beta} ,$$

où, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $\delta_{\alpha\alpha} = 1$ et $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\beta \neq \alpha$.

b. En déduire que, pour tout $v \in C^{k+1}(K)$,

(III.6) $$\forall x \in \mathring{K}, \ \forall \beta \in \mathbb{N}^2, \ |\beta| \leqslant k, \ \partial^\beta (\Pi_K v - v)(x) = \sum_{i=1}^{N} R(k, v, x, a_i) \, \partial^\beta w_i(x) .$$

c. Montrer alors qu'il existe une constante positive $\mathscr{C}(k)$ telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant k$,

(III.7) $$\forall v \in C^{k+1}(K), \ |v - \Pi_K v|_{m,\infty,K} \leqslant \frac{\mathscr{C}(k)}{(k+1)!} \left(\sum_{i=1}^{N} |w_i|_{m,\infty,K} \right) |v|_{k+1,\infty,K} \, h_K^{k+1} .$$

Q. 7 Établir un résultat analogue à (III.7) pour $m = k + 1$.

IV

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, supposé être l'intérieur d'un polygone fermé, et $\mathcal{H}$ un ensemble de réels strictement positifs. Pour tout $h \in \mathcal{H}$, on se donne une « *triangulation* » $\mathcal{T}_h$ de $\overline{\Omega}$, *i.e.* un ensemble de quadrilatères fermés K (convexes, à côtés deux à deux opposés non parallèles) de diamètres $h_K \leqslant h$, tel que $\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$ et que l'intersection de deux éléments distincts quelconques K_1 et K_2 de l'ensemble $\mathcal{T}_h$ soit ou bien vide, ou bien réduite à un sommet commun, ou bien réduite à un côté commun.

Pour tout $h \in \mathcal{H}$ et pour tout $K \in \mathcal{T}_h$, on convient d'appeler *E.F. de degré 1* tout E.F. du type défini en **Q. 1**, *E.F. de degré 2* tout E.F. du type introduit en **Q. 2**, avec le choix particulier suivant des points $a_{i-1,i}$:

$$\text{(IV.1)} \qquad \forall\, i \in I, \quad \hat{a}_{i-1,i} = \frac{1}{2}\left(\hat{a}_{i-1} + \hat{a}_i\right), \quad a_{i-1,i} = F_K\left(\hat{a}_{i-1,i}\right),$$

et *E.F. de degré 3* tout E.F. du type défini en **Q. 5**.

On ne perdra pas de vue que, quel que soit l'E.F. (K, V_K, Σ_K) de degré 1, 2 ou 3 considéré, K est un élément quelconque d'un ensemble $\mathcal{T}_h$ qui est lui-même un élément quelconque de la famille $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$, même si, par souci de simplification, on conserve les notations *locales* précédemment introduites concernant les sommets de K, les droites joignant les sommets de K, etc., ainsi que celles concernant les nœuds et les fonctions de base de l'E.F. (K, V_K, Σ_K). Cependant, pour éviter toute ambiguïté, on notera dorénavant d_K au lieu de d et s_K au lieu de s.

Dans la suite, la même notation C désignera diverses constantes strictement positives, dépendant éventuellement de k (le degré de l'E.F. considéré : $k \in \{1, 2, 3\}$) et de m (l'indice de la semi-norme $|\cdot|_{m,\infty,K}$: $m \in \{0, 1, \dots, k+1\}$) mais *ne dépendant en aucun cas de* $h \in \mathcal{H}$ *et de* $K \in \mathcal{T}_h$.

On dira que la famille $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ de triangulations de $\overline{\Omega}$ est *régulière* si elle vérifie les deux hypothèses

$$\text{(IV.2)} \qquad \exists\, \sigma > 0, \ \forall h \in \mathcal{H}, \ \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \frac{h_K}{\rho_K} \leqslant \sigma,$$

$$\text{(IV.3)} \qquad \exists\, \nu > 0, \ \forall h \in \mathcal{H}, \ \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \delta(K, d_K) \geqslant \nu\, h_K.$$

(Pour tout $A \subset \mathbb{R}^2$, pour tout $B \subset \mathbb{R}^2$ [resp. pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, pour tout $B \subset \mathbb{R}^2$], on désigne par $\delta(A, B)$ [resp. par $\delta(x, B)$] le nombre $\inf\limits_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \delta(x, y)$ [resp. le nombre $\inf\limits_{y \in B} \delta(x, y)$].)

Q. 8 On considère ici un E.F. *de degré 1* (les notations restent celles de **Q. 1**).

a. Vérifier que

$$\text{(IV.4)} \qquad \forall i \in I, \quad |w_i|_{0,\infty,K} = 1.$$

b. Montrer que

$$\text{(IV.5)} \qquad \forall\, i \in I, \quad |w_i|_{1,\infty,K} \leqslant \frac{1}{\delta(a_i, d_{i+2})} + \frac{1}{\delta(a_i, d_{i+3})} + \frac{1}{\delta(a_i, d)}$$

c. En déduire que, si $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ vérifie (IV.3), il existe une constante C telle que

$$\text{(IV.6)} \qquad \forall i \in I, \quad |w_i|_{1,\infty,K} \leqslant \frac{C}{\rho_K}.$$

Que devient alors la relation (III.7) dans le cas d'un E.F. de degré 1, lorsque $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ est régulière ?

Q. 9 Dans cette question, on suppose que $\overline{\Omega}$ est un *carré fermé* et que la famille de triangulations $(\mathcal{T}_h)_{h\in\mathcal{H}}$ est telle que, pour tout $h \in \mathcal{H}$, $\overline{\Omega}$ s'exprime comme réunion de carrés fermés égaux (à un déplacement près) $\mathcal{K}$, chaque $\mathcal{K}$ étant lui-même la réunion de quatre quadrilatères fermés K égaux (à un déplacement près). Donc (cf. fig. 2), pour tout $h \in \mathcal{H}$, $\mathcal{T}_h$ est constitué d'éléments K égaux (à un déplacement, ou au composé d'un déplacement et d'une symétrie, près) et on désigne alors par $\mathcal{T}_h^*$ l'un quelconque des huit sous-ensembles de $\mathcal{T}_h$ formé de ceux des éléments K qui se déduisent les uns des autres par *translation.*

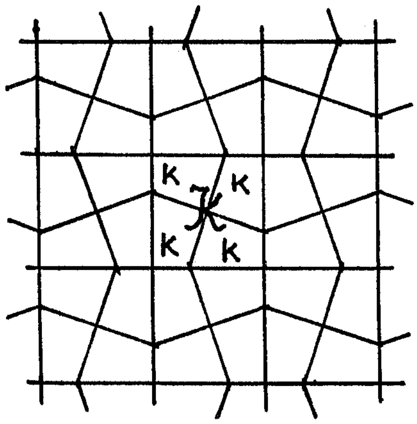

Figure 2

Montrer qu'il existe une fonction $\Psi^* \in P_2(\mathbb{R}^2)$ et une constante $C > 0$ telles que

(IV.7) $$\forall h \in \mathcal{H}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^*, \qquad |\Psi^* - \Pi_K \Psi^*|_{2,\infty,K} \geqslant C,$$

où Ψ^* est mis pour $\Psi^*|_K$ et où Π_K est l'opérateur d'interpolation de l'E.F. *de degré 1* (K, V_K, Σ_K).

Q. 10 On suppose que $\overline{\Omega}$ est un polygone fermé quelconque et que la famille $(\mathcal{T}_h)_{h\in\mathcal{H}}$ vérifie (IV.2).

Déterminer deux carrés fermés $\hat{K}_1$ et $\hat{K}_2$, avec $\hat{K}_1 \subset \hat{K}_2$, tels que, pour tout $h \in \mathcal{H}$, pour tout $K \in \mathcal{T}_h$ et pour tout $r \in \mathbb{N}$,

(IV.8) $$\forall \Psi \in P_r(K),\ \Psi \neq 0,\ \exists\ \hat{\Psi} \in P_r(\hat{K}_2),\ \frac{|\Psi|_{1,\infty,K}}{|\Psi|_{0,\infty,K}} \leqslant \frac{1}{\rho_K} \frac{|\hat{\Psi}|_{1,\infty,\hat{K}_2}}{|\hat{\Psi}|_{0,\infty,\hat{K}_1}}.$$

En déduire que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, il existe une constante $M(r, \sigma) > 0$, où σ est la constante introduite en (IV.2), telle que :

(IV.9) $$\forall h \in \mathcal{H}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \Psi \in P_r(K), \quad |\Psi|_{1,\infty,K} \leqslant \frac{M(r,\sigma)}{\rho_K} |\Psi|_{0,\infty,K}.$$

Q. 11 On suppose que $\overline{\Omega}$ est un polygone fermé quelconque et que la famille $(\mathcal{T}_h)_{h\in\mathcal{H}}$ est régulière.

Soit (K, V_K, Σ_K) un E.F. *de degré k*, $k \in \{1, 2, 3\}$, quelconque. On continue de noter w_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, ses fonctions de base et Π_K sont opérateur d'interpolation.

a. ~~Vérifier~~ que

(IV.10) $$\forall h \in \mathcal{H}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \hat{x} \in \hat{K}, \qquad s_K(\hat{x}) \leqslant 1 + \frac{1}{\nu},$$

où ν est la constante introduite en (IV.3).

b. Montrer que, pour tout $k = 1, 2, 3$, il existe une constante C telle que

(IV.11) $$\forall i = 1, \ldots, N, \qquad |w_i|_{0,\infty,K} \leqslant C.$$

c. Montrer que, pour tout $k = 1, 2, 3$ et pour tout $m = 0, 1, \ldots, k+1$, il existe une constante C telle que

(IV.12) $$\forall i = 1, \ldots, N, \qquad |w_i|_{m,\infty,K} \leqslant \frac{C}{\rho_K^m}.$$

En déduire, pour un E.F. de degré k, $k \in \{1, 2, 3\}$, et lorsque $(\mathcal{T}_h)_{h\in\mathcal{H}}$ est régulière, des majorations des quantités $|v - \Pi_K v|_{m,\infty,K}$ (où $0 \leqslant m \leqslant k+1$ et $v \in C^{k+1}(K)$) ne dépendant que de v, de h_K, de k et de m.

RECTIFICATIF

A LIRE AUX CANDIDATS DES LA DISTRIBUTION DES SUJETS

1 - Page 2 à la fin de l'alinéa commençant par "on appellera élément fini"

au lieu de :

$$w_i(a_j) = \delta_{ij},$$

où $\delta_{i,j} = 0$, si $j \neq i$, et $\delta_{i,i} = 0$ pour tout i $(1 \leqslant i \leqslant N)$.

il convient de lire :

$$w_i(a_j) = \delta_{ij},$$

où $\delta_{i,j} = 0$, si $j \neq i$, et $\delta_{i,i} = 1$ pour tout i $(1 \leqslant i \leqslant N)$.

2 - Page 8 à la 3e ligne de Q.11, lire :

..."ses fonctions de base et Π_K <u>son</u> opérateur d'interpolation.

(<u>son</u>, et non sont)

RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE NUMERIQUE

1. Thème du sujet

Le sujet proposé cette année portait sur certains aspects de la méthode des éléments finis, théorie qui s'est beaucoup développée depuis une dizaine d'années et occupe actuellement une place importante en analyse numérique. Plus précisément, il s'agissait d'étudier la construction et les propriétés d'éléments finis de type rationnel (et non de type polynomial, comme le sont les éléments finis usuels) récemment introduits par E.L. Wachspress.

Bien entendu, aucune connaissance préalable sur la méthode des éléments finis n'était requise (l'option analyse numérique ne possède d'ailleurs pas de programme spécifique !).

2. Observations générales

Les résultats obtenus par les candidats apparaîssent cette année moins décevants que lors des années précédentes. Mais il serait peut-être illusoire de voir là l'indication d'un renouveau d'intérêt pour l'analyse numérique, la vérité étant sans doute que les candidats ont su, avec plus ou moins de bonheur, tirer parti du caractère relativement technique des six premières questions. D'ailleurs les questions suivantes, plus difficiles et nécessitant de l'imagination, n'ont jamais été traitées correctement, en particulier les questions **Q.7** et **Q.8** pourtant abordées dans un nombre non négligeable de copies. Les questions **Q.9, Q.10** et **Q.11** n'ont pas été étudiées, peut-être par manque de temps, et ont été mises hors barême.

Les correcteurs ont souvent relevé, au I, l'utilisation erronée du principe du prolongement analytique : un trop grand nombre de candidats affirme (s'agit-il là d'une confusion avec le cas des fonctions analytiques d'une variable réelle ou complexe ?) «qu'une fonction polynôme p de deux variables réelles nulle sur la frontière du quadrilatère K est partout nulle» ; d'autres candidats invoquent un pseudo-théorème du maximum, la même erreur se retrouvant également en **Q.8.** Il était pourtant simple de constater qu'alors $p = \mathrm{C}\, l_1\, l_2\, l_3\, l_4$ avec C = fonction polynôme, et de raisonner sur les degrés.

La question **Q.6** et, lorsqu'elles ont été abordées, les questions **Q.7** et **Q.8** font apparaître une méconnaissance inquiétante des notions fondamentales du calcul différentiel. Un exemple suffit à illustrer la situation rencontrée dans beaucoup de copies : à de rares exceptions près, les candidats qui ont essayé d'établir la relation (III-6) se sont livrés à toutes sortes de manipulations douteuses pour obtenir le résultat , certains même n'hésitant pas à traiter les formes j- linéaires $\mathrm{D}^j\, v\,(x)$ et les j - vecteurs $(h)^j$ comme des scalaires !

3. Observations détaillées sur les questions traitées par les candidats

Q.1 - a : dans la plupart des copies on admet implicitement que les fonctions w_i appartiennent à $\mathrm{C}^{\infty}(\mathrm{K})$ au sens de la définition de l'énoncé, mais quelques candidats soigneux invoquent justement le théorème d'Urysohn.

Q.1 - b : pour vérifier que $\psi - \Pi_{\mathrm{K}}\, \psi$ s'annule sur la frontière de K, certains candidats ont voulu utiliser la propriété $\mathcal{F}_0$ qui nécessite malheureusement la condition $\mathrm{V}_{\mathrm{K}} \supset \mathrm{P}_1\,(\mathrm{K})$ que l'on demande précisément de démontrer aussitôt après. Pour montrer que $\psi - \Pi_{\mathrm{K}}\, \psi$ s'annule sur K tout entier, on note que $\psi - \Pi_{\mathrm{K}}\, \psi$ est de la forme $\frac{p}{l}$, avec $p \in \mathrm{P}_2\,(\mathrm{K})$ et on en déduit que $p = 0$ en suivant le raisonnement indiqué au paragraphe 2. Peu de candidats (et cette remarque vaut également pour les questions **Q.2, Q.4** et **Q.5**) ont vu que, pour vérifier que $\mathrm{V}_{\mathrm{K}} \not\supset \mathrm{P}_2\,(\mathrm{K})$, il suffit de raisonner sur les dimensions : ici $\dim \mathrm{V}_{\mathrm{K}} = 4$, $\dim \mathrm{P}_2\,(\mathrm{K}) = 6$.

Q.2 : de très rares candidats remarquent opportunément que, pour que (K, V_K, Σ_K) soit un élément fini, il faut par définition que les points $a_{i-1,i}$ appartiennent à K et, par conséquent, soient situés entre a_{i-1} et a_i.
On montre alors, comme en **Q.1**, que (K, V_K, Σ_K) à la propriété $\mathcal{F}_0$, que $V_K \supset P_2(K)$ et que $V_K \not\supset P_3(K)$.

Q.3 : cette question, de nature plus géométrique que numérique, mais dont les résultats sont indispensables pour la suite du problème, a été traitée, avec des fortunes diverses, par la quasi-totalité des candidats. Quelques-uns prennent le temps de vérifier les inégalités $\xi_1 < 0$, $\xi_2 < 0$, $\xi_3 > 1$, $s(\hat{x}) \geqslant 1$, indiquées dans l'énoncé. L'injectivité de F_K et la relation (II-6) n'ont généralement pas gêné les candidats. En revanche les relations demandées au b) n'ont été établies correctement que dans un nombre réduit de copies. De même, les égalités ensemblistes du c) ont donné lieu à beaucoup de verbiage et, le plus souvent, on a seulement montré une inclusion.

Q.4 : la seule difficulté de la question était de vérifier que $V_{\hat{K}} \supset P_3(\hat{K})$: elle n'a été résolue que par un tout petit nombre de candidats. Pour montrer le résultat, on peut noter que, si $\hat{\psi} \in P_3(\hat{K})$, alors $\hat{\phi} = \hat{\psi} - \Pi_{\hat{K}} \hat{\psi}$ est nulle sur la frontière de $\hat{K}$, puisque polynomiale du 3e degré sur chaque côté de $\hat{K}$. On en déduit alors que $\phi = \hat{C}\,\hat{l}_1\,\hat{l}_2\,\hat{l}_3\,\hat{l}_4$, avec nécessairement $\hat{C}$ = constante car $\hat{\phi} \in P_4(\hat{K})$. Il suffit alors de considérer les monômes en $\hat{x}_1^2\ \hat{x}_2^2$ dans la relation précédente pour obtenir $\hat{C} = 0$.

Q.5 - a : on ne peut se contenter de dire, comme certains candidats, que le résultat est évident vu que l'application F_K établit «un isomorphisme entre les triplets $(\hat{K}, V_{\hat{K}}, \Sigma_{\hat{K}})$ et (K, V_K, Σ_K)»! Si l'on effectue les vérifications nécessaires, en utilisant évidemment les résultats de **Q.4**, on montre que (K, V_K, Σ_K) est un élément fini, qu'il a la propriété $\mathcal{F}_0$, que $V_K \supset P_3(K)$ et que $V_K \not\supset P_4(K)$.

Q.5 - b : il s'agissait en fait d'obtenir une représentation locale (i. e. ne dépendant que de K et de Σ_K) des fonctions de base. Soit l'_i [resp. γ] un élément de $P_1(\mathbf{R}^2)$ [resp. de $P_2(\mathbf{R}^2)$] tel que $l'_i(x) = 0$ soit une équation de la droite passant par les points $a_{i,i,i+1}$ et $a_{i+2,i+3,i+3}$ [resp. tel que : $\forall x \in K,\ \gamma(x) = l^2(x)\,(\hat{\gamma}_0\, F_K^{-1})(x)$]. On vérifie d'ailleurs que $\gamma(x) = 0$ est une équation de la conique passant par les huit points $a_{i,i,i+1}$ et $a_{i,i+1,i+1}$. Procédant comme au a), on obtient les expressions

$$\forall x \in K,\ \omega_i(x) = C'_i \frac{l_{i+2}(x)\, l_{i+3}(x)\, \gamma(x)}{l(x)},$$

$$\forall x \in K,\ \omega_{i,i,i+1}(x) = C'_{i,i,i+1} \frac{l_{i+2}(x)\, l_{i+3}(x)\, l_i(x)\, l'_{i+2}(x)}{l(x)}$$

$$\forall x \in K,\ \omega_{i,i+1,i+1} = C'_{i,i+1,i+1} \frac{l_{i+2}(x)\, l_{i+3}(x)\, l_i(x)\, l'_i(x)}{l(x)},$$

où C'_i, $C'_{i,i,i+1}$, $C'_{i,i+1,i+1}$ sont telles que $\omega_i(a_i) = 1$, $\omega_{i,i,i+1}(a_{i,i,i+1}) = 1$, $\omega_{i,i+1,i+1}(a_{i,i+1,i+1}) = 1$.

Q.6-a : ainsi que l'ont remarqué plusieurs candidats, la relation (III - 4) donnée dans l'énoncé est conséquence immédiate du fait que la fonction $x \mapsto (x-z)^{\alpha}$ appartient à P_{K} (K), donc à V_{K}. La relation (III - 5) a, assez souvent, été établie correctement.

Q.6-b : les commentaires concernant cette question ont été donnés au paragraphe 2. Pour montrer le résultat, il suffit de noter que :

$$\forall\, x \in \mathring{\mathrm{K}}\ ,\forall\, h \in \mathbf{R}^2,\ \sum_{|\alpha| \leqslant k} \frac{\partial^{\alpha} v(x)}{\alpha\,!}\ h^{\alpha} = \sum_{j=0}^{k} \frac{\mathrm{D}^j(x)\,.\,(h)^j}{j\,!}$$

Q.6-c : la relation (III - 7), qui résulte pourtant de majorations standard, n'a le plus souvent été établie qu'au moyen de calculs plus ou moins approximatifs. Beaucoup de candidats obtiennent $\mathscr{C}(k) = 1$, ce qui étonne cependant certains d'entre eux (pour mémoire, indiquons que l'on peut prendre $\mathscr{C}(k) = 2^{\frac{k+1}{2}}$).

Q.7 : la majoration demandée s'écrit

$$|v - \Pi_{\mathrm{K}}\, v\,|_{k+1,\,\infty,\mathrm{K}} \leqslant \mathscr{C}(k)\,|\,v\,|_{k+1,\,\infty,\,\mathrm{K}} \left\{ \frac{1}{(k+1)!}\,\Big(\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} |\,\omega_i\,|_{k+1,\,\infty,\,\mathrm{K}}\Big)\, h_{\mathrm{K}}^{k+1} + \frac{1}{k\,!}\,\Big(\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} |\,\omega_i\,|_{k,\infty,\mathrm{K}}\Big)\, h_{\mathrm{K}}^{k} \right\}$$

Pour l'obtenir, on dérive (III-6), avec $\beta \in \mathrm{N}^2$, $|\,\beta\,| = k$, par rapport à x_j, $j = 1,2$, et on tient compte de la relation (déduite de la formule de Taylor) :

$$\mathrm{D}\,\mathrm{R}\,(k, v, x, a_i) = -\ \frac{\mathrm{D}^{\,k+1} v\,(x)\,.\,(a_i - x)^{\,k}}{k\ !}$$

Q.8-a : cette question a donné lieu à des réponses fantaisistes. En fait il suffisait de remarquer que, puisque la fonction $x \mapsto 1$ appartient à V_{K}, on a : $\forall\, x \in \mathrm{K}\,,\ \sum_{i \in \mathrm{I}} \omega_i\,(x) = 1$. Comme les w_i sont positives et que $w_i\,(a_i) = 1$, le résultat suit.

Q.8-b : le calcul est simplifié si l'on considère, ce qui est loisible, que l et l_i , $i \in \mathrm{I}$, qui sont *a priori* définis à un facteur arbitraire près, ont en fait été choisis positifs et tels que $\|\,\mathrm{D}l\,\| = 1$, $\|\,\mathrm{D}l_i\,\| = 1$. Pour montrer (IV-5), on majore alors $\|\,\mathrm{D}\,w_i\,(x)\,\|$ en remarquant géométriquement que : $\forall\, j = i+2, i+3$,

$$\sup_{x \in \mathrm{K}} \frac{l_j\,(x)}{l\,(x)} = \frac{\delta\,(\,a_i\,,\,d_j\,)}{\delta\,(\,a_i\,,\,d)}$$

Q.8-c : par des considérations de géométrie élémentaire, on obtient (IV -6) avec $\mathrm{C} = \dfrac{3\,\gamma}{1+\gamma}$. Quant à la relation (III-7), elle s'écrit ici, pour $m = 0{,}1$:

$$\forall\, v \in \mathrm{C}^2\,(\mathrm{K}),\ |\,v - \Pi_{\mathrm{K}}\, v\,|_{m,\,\infty,\,\mathrm{K}} \leqslant 2\,\sigma\ \ \mathscr{C}(k)\ |\,v\,|_{2,\,\infty,\,\mathrm{K}}\, h_{\mathrm{K}}^{2-m}$$

4 — Les notes (sur 40)

Nombre de copies corrigées : 816.

140 copies atteignent la moyenne.
48 copies ont obtenu la note 0.

Répartition des notes :

0 à 4	5 à 9	10 à 14	15 à 19	20 à 24	25 à 29	30 à 34	35 à 40
238	149	165	124	74	36	14	16

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

Sujet (durée 6 heures)

Un système gyroscopique S est constitué de deux solides S_1 et S_2 ; on note (Ox, Oy, Oz) un système orthogonal d'axes principaux d'inertie de S_1, en son centre d'inertie O, et A_1, B_1, C_1 les moments d'inertie correspondants. On note $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ les vecteurs unitaires respectifs des axes Ox, Oy, Oz. Le solide S_2 est assujetti de telle sorte que son mouvement relatif par rapport à S_1 soit un mouvement de rotation uniforme, définie par le vecteur $\vec{\omega} = \omega \vec{z}$, ω désignant une constante réelle donnée. On suppose en outre que S_2 a son centre d'inertie en O et admet pour axes principaux d'inertie en ce point, d'une part Oz, et d'autre part, tout axe passant par O et contenu dans le plan équatorial Oxy. On note A_2 le moment d'inertie de S_2 par rapport à l'un quelconque de ceux-ci et D le moment d'inertie de S_2 par rapport à Oz.

On admet que le système $S = S_1 + S_2$ est mobile autour de son centre O maintenu fixe relativement à un repère galiléen OXYZ, par une liaison sans frottement; on note $\vec{\Omega} = p\,\vec{x} + q\,\vec{y} + r\,\vec{z}$, le vecteur rotation instantanée de S_1 relativement à OXYZ, et on utilise les notations :

$$A = A_1 + A_2, \qquad B = B_1 + A_2, \qquad C = C_1 + D.$$

PARTIE I

1° Exprimer les composantes sur les axes mobiles Ox, Oy, Oz des moments cinétiques $\vec{H}_1$ et $\vec{H}_2$ de S_1 et S_2, au point O, dans leur mouvement par rapport à OXYZ.

2° Par application du théorème du moment cinétique à l'ensemble $S_1 + S_2$, montrer que les équations du mouvement peuvent s'écrire :

(1) $$A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr + Dq\,\omega = 0\,,$$

(2) $$B\frac{dq}{dt} + (A - C)\,pr - Dp\,\omega = 0\,,$$

(3) $$C\frac{dr}{dt} + (B - A)\,pq = 0\,.$$

Interpréter ces équations comme étant celles qui régissent le mouvement d'un corps solide soumis à des forces dont on précisera le moment en O.

3° On considère le cas de symétrie $A = B$.

Intégrer les équations (1), (2), (3) ; donner une description géométrique du mouvement du système S par rapport aux axes OX, OY, OZ.

4° On suppose désormais dans la suite du *problème* $A > B > C$; éliminant la variable t des équations (1), (2) grâce à (3), montrer qu'on peut exprimer p et q sous la forme :

(4) $$p^2 = \frac{C}{A - B}\,P(r)\,, \qquad q^2 = -\frac{C}{A - B}\,Q(r)$$

où P et Q sont des polynômes du second degré, qui dépendent additivement de constantes arbitraires qu'on précisera en termes de conditions initiales.

Écrire l'équation différentielle qui permet d'obtenir r, en fonction de t, et décrire sommairement les différents types de solutions.

On pourra utiliser à cette fin les représentations graphiques des fonctions $r \longmapsto P(r)$ et $r \longmapsto Q(r)$.

5° Afin de réaliser le mouvement de rotation uniforme de S_2 par rapport à S_1, le solide S_1 doit exercer sur S_2, à chaque instant, des efforts appropriés dont on note le moment en O par : $\vec{\mathfrak{M}} = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z}$.

Écrire les équations auxquelles conduit l'application du théorème du moment cinétique appliqué en O à S_2 dans son mouvement par rapport à OXYZ.

Exprimer la puissance des forces intérieures au système $S_1 + S_2$ (il est rappelé que la puissance d'un système de forces équivalent à zéro agissant sur un système est indépendante du repère par rapport auquel elle est calculée).

Appliquer le théorème de l'énergie cinétique au système $S_1 + S_2$ et retrouver l'intégrale première à laquelle il conduit, par un calcul direct à partir des équations (1), (2), (3).

Obtenir une autre intégrale première en calculant le carré de la longueur du moment cinétique; la retrouver à partir des équations (1), (2), (3).

On désignera ces intégrales premières, intégrale de l'énergie, intégrale du moment cinétique; justifier ces dénominations.

6° On se propose d'étudier les solutions stationnaires des équations (1), (2), (3) ; montrer qu'il existe trois possibilités. Que peut-on dire du mouvement de S_1 par rapport à OX, OY, OZ ?

Discuter les caractères de stabilité ou d'instabilité dans chacun de ces cas.

PARTIE II

1° Dans le but de déterminer, à chaque instant, la position du système $S_1 + S_2$ relativement aux axes de référence OX, OY, OZ, dans le cas général prévu au § 4 de la première partie, on introduit la représentation $\vec{Z} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z}$ où $\vec{Z}$ désigne le vecteur unitaire de OZ (on pourrait, éventuellement, conduire des calculs analogues à ceux ci-dessous demandés, à propos des représentations des vecteurs unitaires $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ des axes OX et OY).

Écrire les équations différentielles (5), (6), (7), auxquelles satisfont les variables α, β, γ.

Le système des équations (1), (2), (3), (5), (6), (7) admet quatre intégrales premières : celles déjà identifiées au § 5 de la première partie, soient $f_1(p, q, r)$, $f_2(p, q, r)$, plus celles f_3, f_4 qu'on obtient en exprimant que $(\vec{H}_1 + \vec{H}_2).\vec{Z}$ et $\|\vec{Z}\|$ sont constants; expliciter f_3 et f_4, en fonction des variables p, q, r, α, β, γ.

Par ailleurs, le système des six équations différentielles qui régit l'évolution des variables $p, q, r, \alpha, \beta, \gamma$ peut être écrit sous la forme :

$$\frac{dp}{F_1} = \frac{dq}{F_2} = \frac{dr}{F_3} = \frac{d\alpha}{F_4} = \frac{d\beta}{F_5} = \frac{d\gamma}{F_6} = dt \,. \tag{8}$$

On se propose dans ce qui suit de construire une cinquième intégrale première du système (8) de façon à pouvoir réduire son intégration à des quadratures.

2° On considère, de manière générale, le système différentiel

$$\frac{dx_1}{F_1} = \frac{dx_2}{F_2} = \dots = \frac{dx_n}{F_n} = dt, \tag{9}$$

où $F_1, F_2, \dots, F_n$ sont des fonctions à valeurs réelles des variables réelles $x_1, x_2, \dots, x_n$, supposées continûment différentiables et telles que :

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = 0. \tag{10}$$

Il pourra être commode d'interpréter le vecteur $\vec{v} = \{ F_1 , F_2 , \dots , F_n \}$, comme définissant un champ de vitesses.

Le système (9) définit, au moins localement, une solution $x = x(t\,;\,\xi)$, telle que $\xi = x(0\,;\,\xi)$, avec $x = \{ x_1 , \dots , x_n \} \in \mathbb{R}^n$, $\xi = \{ \xi_1 , \dots , \xi_n \} \in \mathbb{R}^n$, ξ état initial donné.

Pour D ouvert borné quelconque de $\mathbb{R}^n$, on note : $D_t = \{ x\ ;\ x = x(t\,;\,\xi)\ ,\ \ \forall\, \xi \in D \}$, c'est-à-dire que D_t est l'image, à l'instant t, des points de D, par la transformation : $\xi \longmapsto x = x(t\,;\,\xi)$. Montrer que $\int_{D_t} dx_1\, dx_2 \dots dx_n$, volume de D_t, est indépendant de t.

On pourra établir, grâce à l'interprétation mécanique du champ de vitesses $\vec{v}$, que :

$$\frac{d}{dt}\int_{D_t} dx_1 \dots dx_n = \int_{\partial D_t} \vec{v}\,.\,\vec{n}\; dS$$

avec ∂D_t frontière de D_t, $\vec{n}$ normale unitaire extérieure, dS élément d'aire.

On suppose connues $(n-2)$ intégrales premières de (9), c'est-à-dire $(n-2)$ fonctions

$$f_1(x_1 , \dots , x_n) , \dots , f_{n-2}(x_1 , \dots , x_n) ,$$

deux fois continûment différentiables, telles que :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\,.\,F_j = 0 \ , \qquad i = 1, 2, \dots , n-2 .$$

Par inversion du système d'équations :

$$f_1(x_1 , \dots , x_n) = c_1 , \dots , f_{n-2}(x_1 , \dots , x_n) = c_{n-2} ,$$

on peut définir la transformation $\mathscr{C} : (c , y) \longmapsto x = \mathscr{C}(c , y)$, avec $c = \{ c_1 , c_2 , \dots , c_{n-2} \}$, $y = \{ x_{n-1} , x_n \}$, explicitée par :

$$(11)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(c_1 , c_2 , \dots , c_{n-2} , x_{n-1} , x_n) \\ &\ \vdots \\ x_{n-2} &= \varphi_{n-2}(c_1 , c_2 , \dots , c_{n-2} , x_{n-1} , x_n) \\ x_{n-1} &= x_{n-1} \\ x_n &= x_n \end{aligned}$$

Toute solution de (9) peut alors être décrite par (11) avec $\{ c_1 , c_2 , \dots , c_{n-2} \}$, prenant des valeurs constantes et x_{n-1}, x_n solution du système différentiel :

$$(12)\qquad \frac{dx_{n-1}}{\tilde{F}_{n-1}} = \frac{dx_n}{\tilde{F}_n} = dt$$

où $\tilde{F}_{n-1}$, $\tilde{F}_n$ sont obtenus à partir de F_{n-1}, F_n après qu'on y ait remplacé les variables $x_1 , x_2 , \dots , x_{n-2}$ par les seconds membres de (11).

On représente la solution de (12) par :

$$x_{n-1} = x_{n-1}(t\,;\,c , \eta) \quad , \quad x_n = x_n(t\,;\,c , \eta) ,$$

avec $\eta = \{ \xi_{n-1} , \xi_n \}$, ξ_{n-1} et ξ_n désignant les valeurs de x_{n-1} et x_n à $t = 0$.

On prend pour le domaine D considéré plus haut l'image dans $\mathbb{R}^n$, par la transformation $\xi = \mathscr{C}(c , \eta)$, de $G \times V$, où G et V sont des ouverts bornés de $\mathbb{R}^{n-2}$, $\mathbb{R}^2$ respectivement,

$$c = \{ c_1 , \dots , c_{n-2} \} \in G \quad , \quad \eta = \{ \xi_{n-1} , \xi_n \} \in V .$$

Justifier qu'on peut écrire :

$$D_t = \mathscr{C}\,\mathscr{D}_t \qquad \text{avec} \qquad \mathscr{D}_t = \bigcup_{c \in G} \{ c \} \times V_{t,c}$$

et

$$V_{t,c} = \{ (x_{n-1} , x_n) \ :\ x_{n-1} = x_{n-1}(t\,;\,c , \eta) \ ,\ x_n = x_n(t\,;\,c , \eta) \ ,\ \forall\, \eta \in V \}.$$

Admettant les formules :

$$\int_{D_t} dx_1 , \dots , dx_n = \int_{\mathcal{D}_t} \left| \frac{\partial (x_1 , \dots , x_n)}{\partial (c_1 , \dots , c_{n-2} , x_{n-1} , x_n)} \right| dc_1\, dc_2 \dots dc_{n-2}\, dx_{n-1}\, dx_n$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t} \left| \frac{\partial (\varphi_1 , \dots , \varphi_{n-2})}{\partial (c_1 , \dots , c_{n-2})} \right| dc_1\, dc_2 \dots dc_{n-2}\, dx_{n-1}\, dx_n$$

$$= \int_G \mathrm{K}(t , c_1 , c_2 , \dots , c_{n-2})\, dc_1\, dc_2 \dots dc_{n-2}$$

avec

$$\mathrm{K}(t , c_1 , c_2 , \dots , c_{n-2}) = \int_{V_{t,c}} | \mathfrak{J} |\, dx_{n-1}\, dx_n$$

où $\mathfrak{J} = \dfrac{\partial (\varphi_1 , \varphi_2 , \dots , \varphi_{n-2})}{\partial (c_1 , c_2 , \dots , c_{n-2})}$ est le déterminant fonctionnel d'élément $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial c_j}$, montrer que l'invariance par rapport à t du volume de D_t, quel que soit G, exige que K soit indépendant de t.

Ainsi $\int_{V_{t,c}} |\mathfrak{J}|\, dx_{n-1}\, dx_n$ est, pour c fixé, indépendant de t ; justifier que, sous l'hypothèse $\mathfrak{J} \neq 0$, il est équivalent de dire que $\int_{V_{t,c}} \mathfrak{J}\, dx_{n-1}\, dx_n$ est indépendant de t pour c fixé. A l'aide des équations d'évolution (12), montrer que :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{t,c}} \mathfrak{J}\, dx_{n-1}\, dx_n = \int_{V_{t,c}} \left(\frac{\partial (\mathfrak{J}\, \tilde{F}_{n-1})}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial (\mathfrak{J}\, \tilde{F}_n)}{\partial x_n} \right) dx_{n-1}\, dx_n$$

et, tenant compte du fait que V est un ouvert borné quelconque de $\mathbb{R}^2$, en déduire que $\mathfrak{J}\,(\tilde{F}_n\, dx_{n-1} - \tilde{F}_{n-1}\, dx_n)$ est une différentielle totale. Conclure qu'on peut obtenir, par ce procédé, une nouvelle intégrale première des équations (9).

3° On veut appliquer la méthode décrite au paragraphe précédent au système (1) , (2) , (3) , (5) , (6) , (7). Vérifier que la condition analogue à (10) est satisfaite dans ce cas particulier.

On prendra pour variables principales p , q , α , β , c'est-à-dire qu'on définira la transformation (11) en inversant par rapport à p , q , α , β le système : $f_1 = c_1$, $f_2 = c_2$, $f_3 = c_3$, $f_4 = c_4$, où f_1 , f_2 , f_3 , f_4 sont les intégrales premières obtenues antérieurement.

Ainsi on écrit le système analogue à (11) :

$$\begin{aligned} p &= \varphi_1 (c_1 , c_2 , c_3 , c_4 , r , \gamma) \\ q &= \varphi_2 (c_1 , c_2 , c_3 , c_4 , r , \gamma) \\ \alpha &= \varphi_3 (c_1 , c_2 , c_3 , c_4 , r , \gamma) \\ \beta &= \varphi_4 (c_1 , c_2 , c_3 , c_4 , r , \gamma) \\ r &= r \\ \gamma &= \gamma \end{aligned}$$

Calculer

$$\mathfrak{J} = \frac{\partial (\varphi_1 , \varphi_2 , \varphi_3 , \varphi_4)}{\partial (c_1 , c_2 , c_3 , c_4)} = \left(\frac{\partial (f_1 , f_2 , f_3 , f_4)}{\partial (p , q , \alpha , \beta)} \right)^{-1}$$

Intégrer la différentielle $\mathfrak{J}\,(\tilde{F}_6\, dr - \tilde{F}_3\, d\gamma)$. Conclusion.

RECTIFICATIF

A LIRE AUX CANDIDATS DES LA DISTRIBUTION DES SUJETS

1 - Page 11 - 5e ligne en partant du haut de la page

lire : $D_t = \{ x : x = x(t ; \xi),$ . . . . .

(c'est-à-dire remplacer le premier point et virgule du texte par le signe deux points)

2 - Page 12 - 2e ligne en partant du haut de la page

lire : $\int_{D_t} dx_1 \ \ldots \ dx_n =$ . . . . .

(c'est-à-dire supprimer les virgules placées après dx_1 et avant dx_n dans le texte)

RAPPORT SUR L'EPREUVE DE MECANIQUE

Le problème de mécanique proposé cette année avait pour objet l'étude du mouvement autour d'un point fixe d'un système constitué de deux solides assujettis de telle sorte que l'un d'eux ait par rapport à l'autre un mouvement de rotation uniforme.

Il comprenait deux parties : l'une, de niveau élémentaire, visait à obtenir la représentation en fonction du temps de la rotation du système par rapport à un référentiel lié à l'un des solides, l'autre, plus délicate, conduisait à la détermination du mouvement par rapport au référentiel absolu, utilisant une méthode, variante de celle de Jacobi, pour déterminer la dernière intégrale première des équations globales du mouvement grâce à laquelle l'intégration de celles-ci pouvait être réduite à des quadratures.

I. Solution (les renvois numérotés sont relatifs aux équations du texte).

Partie I

1. On écrit : $\vec{H}_1 = A_1 p \vec{x} + B_1 q \vec{y} + C_1 r \vec{z}$

$$\vec{H}_2 = A_2 p \vec{x} + B_2 q \vec{y} + C_2 r \vec{z}$$

d'où : $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = A p \vec{x} + B q \vec{y} + (Cr + D\omega) \vec{z}$

2. Le théorème du moment cinétique, appliqué à $S_1 + S_2$ en O dans son mouvement par rapport à OXYZ, conduit à :

$\dfrac{d(\vec{H}_1 + \vec{H}_2)}{dt} \Big|_{OXYZ} = 0$, d'où les équations (1), (2), (3), qu'on peut interpréter en disant que le système se comporte comme un solide unique, d'éléments d'inertie A, B, C, soumis à un couple de moment $-Dq\omega\vec{x} + Dp\omega\vec{y}$.

3. Quand il y a symétrie $A = B$, de (3) on déduit $r = r_0$, puis avec $\omega = p + iq$, on obtient à partir de (1), (2) :

$$\frac{d\omega}{dt} = i\sigma\omega \quad \text{avec } \sigma = \frac{C - A}{A} r_0 + \frac{D\omega}{A}$$

d'où : $p + iq = (p_0 + iq_0) e^{i\sigma t}$

Le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ est donc de norme constante et son support décrit, par rapport aux axes liés O_{xyz}, un cône de révolution d'axe Oz ; en outre le vecteur $\vec{H}_1 + \vec{H}_2$ est constant relativement à OXYZ et de $\vec{\Omega}(\vec{H}_1 + \vec{H}_2) = Ap^2 + Aq^2 + (Cr + D\omega)^2$ l'on déduit $\vec{\Omega}(\vec{H}_1 + \vec{H}_2) =$ const., de sorte que, relativement aux axes OXYZ, l'extrêmité de $\vec{\Omega}$ décrit un cercle d'axe porté par $\vec{H}_1 + \vec{H}_2$. Ainsi le cône engendré par le support de Ω relativement à $Oxyz$, roule sans glisser sur le cône lié au référentiel OXYZ engendré par ce même support, la rotation demeurant de norme constante.

4. Le texte donnait toutes indications utiles pour obtenir les formules (4) de l'énoncé et précisait que $P(r)$ et $Q(r)$ devaient être exprimés au moyen des constantes physiques et des données initiales :

$$P(r) = \frac{B - C}{A}(r^2 - r_0^2) - \frac{2D\omega}{A}(r - r_0) + \frac{A - B}{C} p_0^2$$

$$Q(r) = \frac{A-C}{B}(r^2 - r_0{}^2) - \frac{2D\omega}{B}(r - r_0) - \frac{A-B}{C} q_0{}^2$$

r étant obtenu par : $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{A-B}{C} p q$

En raison des équations (4), il convient de noter que $P(r)$ et $Q(r)$ qui, nécessairement à l'instant initial prennent des valeurs $\dfrac{A-B}{C} p_0{}^2$ et $-\dfrac{A-B}{C} q_0{}^2$, respectivement positive et négative, doivent conserver ces signes respectifs au cours de l'évolution ultérieure, car p et q obtenus par (4) sont toujours réels.

Cette remarque, banale, jointe au fait que les paraboles $\omega = P(r), \omega = \varphi(r)$ subissent des translations parallèles à leur direction d'axe quand on modifie les conditions initiales, permet une discussion aisée des différents types de mouvement et de la nature des fonctions que l'intégration des équations amène à introduire.

5. Le théorème du moment cinétique appliqué à S_2 en O dans son mouvement par rapport à OXYZ conduit à :

$$A_2 \frac{dp}{dt} + (D - A_2) q r + D q \omega = L$$

$$A_2 \frac{dq}{dt} + (A_2 - D) p r - D p \omega = M$$

$$D \frac{dr}{dt} = N$$

La puissance des forces intérieures au système $S_1 + S_2$ est $N\omega$.

Le théorème des forces vives appliqué au système total $S_1 + S_2$ fournit l'équation : $\dfrac{d}{dt}(T_1 + T_2) = N\omega$, d'où, compte tenu de $2T_1 = A_1 p^2 + B_1 q^2 + C_1 r^2$, $2T_2 = A_2 p^2 + A_2 q^2 + D(r+\omega)^2$, l'on déduit l'intégrale première : $f_1 = A p^2 + B q^2 + Cr^2 = \text{const.}$

L'autre intégrale première demandée est :

$f_2 = A^2 p^2 + B^2 q^2 + (Cr + D\omega)^2 = \text{const.}$ dont l'interprétation est $\|\vec{H}\| = \text{const.}$

6. L'étude des solutions stationnaires est immédiate à partir des équations (1), (2), (3) et la discussion de leur stabilité, très facile, en se référant à l'étude géométrique du § 4 pour examiner ce qui se produit lorsqu'on modifie légèrement les données initiales à partir des valeurs qui correspondent à un régime stationnaire.

On trouve :

$p_0 = a \quad q_0 = o \quad r_0 = \dfrac{D\omega}{A-C}$ stable

$p_0 = o \quad q_0 = b \quad r_0 = \dfrac{D\omega}{B-C}$ instable

$p_0 = o \quad q_0 = o \quad r_0 = c \qquad \dfrac{D\omega}{B-C} < c$ stable

$\dfrac{D\omega}{B-C} > c$ instable.

Partie II

1. Les équations demandées sont :

$$\frac{d\alpha}{dt} + q\gamma - r\beta = 0$$

$$\frac{d\beta}{dt} + r\alpha - p\gamma = 0$$

$$\frac{d\gamma}{dt} + p\beta - q\alpha = 0 .$$

On écrit : $Z(H_1 + H_2) = \alpha A p + \beta B q + \gamma (Cr + D\omega)$

d'où l'intégrale première :

$f_3 = A p \alpha + B q \beta + (Cr + D\omega)\gamma = \text{const.}$

On a aussi : $f_4 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$

Le système des équations (1), (2), (3), (5), (6), (7) s'écrit :

$$\frac{dp}{F_1} = \frac{dq}{F_2} = \frac{dr}{F_3} = \frac{d\alpha}{F_4} = \frac{d\beta}{F_5} = \frac{d\gamma}{F_6} = dt \quad \text{avec}$$

$$F_1 = \frac{B-C}{A} q r - \frac{D}{A} q\omega, \quad F_2 = \frac{C-A}{B} p r + \frac{D}{B} p\omega , \quad F_3 = \frac{A-B}{C} p q$$

$$F_4 = r\beta - q\gamma , \quad F_5 = p\gamma - r\alpha , \quad F_6 = q\alpha - p\beta$$

2. La formule $\frac{d}{dt} \int_{D_t} dx_1 \dots dx_n = \int_{\partial D_t} \vec{v}.\vec{n}\, dS$ exprime une propriété de conservation : en effet elle signifie que pour un fluide de masse volumique unité la variation de masse enfermée dans D_t, par unité de temps, est égale au flux de masse à travers la frontière de D_t.

Transformant l'intégrale de surface par la formule de Green et tenant compte de (10) on aboutit à la loi de conservation du texte : volume $(D_t) =$ const. (théorème de Liouville).

Il est clair que D_t est l'ensemble des points décrits par (11) lorsque x_{n-1} et x_n y sont remplacés par $x_{n-1}(t, c, \eta)$ et $x_n(t; c, \eta)$, avec $\eta \in V$, $c \in G$

Alors la formule de changement de variables dans les intégrales multiples conduit à :

$$\int_{Dt} dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathcal{D}t} \left| \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(c_1, c_2, \dots, c_{n-2}, x_{n-1}, x_n)} \right| dc_1 \dots dc_{n-2}\, dx_{n-1}\, dx_n$$

et aux représentations du texte.

Puisque G est, dans $\mathbf{R}^{n-2}$, un domaine quelconque, l'intégrale

$\int_G K(t, c_1, ..., c_{n-2})\, dc_1\, dc_2 \dots dc_{n-2}$ ne peut être indépendante de t que si K est elle-même indépendante de t (propriété qui résulte de la continuité de $K\ (t, c_1,...,c_{n-2})$, acquise en raison des hypothèses).

Ainsi $\int_{V_{t,c}} |\mathfrak{J}|\, dx_{n-1}\, dx_n$ est indépendant de t et, puisque $\mathfrak{J}$ ne s'annule pas dans les domaines considérés, (cette hypothèse est implicite dans les raisonnements développés ci-dessus), il s'ensuit que $\int_{V_{t,c}} \mathfrak{J}\, dx_{n-1}\, dx_n$ est indépendant de t. Raisonnant dans $\mathbf{R}^2$ on justifie aisément la formule

$$\frac{d}{dt}\int_{V_{t,c}} \mathfrak{J}\, dx_{n-1}\, dx_n = \int_{V_{t,c}} \left(\frac{\partial(\mathfrak{J}\widetilde{F}_{n-1})}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial(\mathfrak{J}\widetilde{F}_n)}{\partial x_n}\right) dx_{n-1}\, dx_n = 0$$

et puisque V est un ouvert quelconque de $\mathbf{R}^2$ et que l'intégrand est continu on obtient :

$$\frac{\partial(\mathfrak{J}\widetilde{F}_{n-1})}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial(\mathfrak{J}\widetilde{F}_n)}{\partial x_n} = 0$$

c'est-à-dire que $\mathfrak{J}\,(\widetilde{F}_n\, dx_{n-1} - \widetilde{F}_{n-1}\, dx_n)$ est une différentielle totale ou encore que $\mathfrak{J}$ est un facteur intégrant pour $\widetilde{F}_n\, dx_{n-1} - \widetilde{F}_{n-1}\, dx_n$.

3. Dans le cas particulier du § 1, l'identité (10) est évidemment satisfaite.

On a :

$$\mathfrak{J} = \frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)}{\partial(f_1,f_2,f_3,f_4)} = \left(\frac{\partial(f_1,f_2,f_3,f_4)}{\partial(p,q,\alpha,\beta)}\right)^{-1} = [8\,AB\,(A-B)\,(B\,\alpha\, q - A\,\beta\, p)\, p\, q]^{-1}$$

et l'on est conduit à intégrer la différentielle :

$$8\,AB\,(A-B)\,\mathfrak{J}\,(\widetilde{F}_6\, dr - \widetilde{F}_3\, d\gamma) = [pq\,(B\,\alpha\, q - A\,\beta\, p)]^{-1}\,[(q\,\alpha - p\,\beta)\, dr - \frac{A-B}{C}\, p\, q\, d\gamma]$$

On doit au préalable exprimer les termes qui interviennent dans cette expression au moyen de $f_1, f_2, f_3, f_4, r, \gamma$.

Introduisant $s = B\,\alpha\, q - A\,\beta\, p$, $\rho\sqrt{f_2} = Cr + D\,\omega$ et posant $k = \dfrac{f_3}{\sqrt{f_2}}$,

on obtient : $s^2 = f_2\,[(1-k^2)(1-\rho^2) - (\gamma - k\rho)^2]$

et l'on est conduit à intégrer :

$$\frac{A\,p^2 + B\,q^2}{p\,q\,(A^2\,p^2 + B^2\,q^2)}\, dr + \frac{(A-B)(f_3 - Cr\,\gamma - D\,\omega\gamma)}{s\,(A^2\,p^2 + B^2\,q^2)}\, dr - \frac{A-B}{C\,s}\, d\gamma$$

c'est-à-dire :

$$\int \frac{Ap^2 + Bq^2}{pq\,(A^2\,p^2 + B^2 q^2)}\, dr =$$

$$\int \frac{(A-B)(A\,B)^{-1/2}\,(f_1 - Cr^2)\, dr}{(f_2 - Bf_1 + (Cr + D\omega)^2 - BCr^2)^{1/2}\,(Af_1 - f_2 + ACr^2 - (Cr + D\omega)^2)^{1/2}\,(f_2 - (Cr + D\omega)^2)}$$

puis :

$$\frac{A-B}{C}\int\left(\frac{c\,(f_3-(Cr+D\omega)\,\gamma\,)}{s\,(f_2-(Cr+D\omega)^2)}\,dr-\frac{d\gamma}{s}\right)=\frac{A-B}{C}\int\left(\frac{f_3\,(f_2)^{-1/2}-\rho\,\gamma}{s\,(1-\rho^2)}\,d\rho-\frac{d\gamma}{s}\right)$$

Prenons pour exemple le cas $|k|<1$ qui implique $|\rho|<1$. On cherche $\Theta(\gamma,\rho)$ telle que : $\dfrac{\partial\Theta}{\partial\gamma}=-\dfrac{1}{s}\mapsto\Theta=-(f_2)^{-1/2}\ \text{Arc cos}\ \dfrac{\gamma-k\,\rho}{\sqrt{(1-k^2)(1-\rho^2)}}+\psi(\rho)$

puis : $\dfrac{\partial\Theta}{\partial\rho}=\psi'(\rho)-(f_2)^{-1/2}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\ \text{Arc cos}\ \dfrac{\gamma-k\,\rho}{\sqrt{(1-k^2)(1-\rho^2)}}=\dfrac{k-\rho\,\gamma}{s\,(1-\rho^2)}$

qui conduit après calcul à $\psi'(\rho)=0$, c'est-à-dire $\psi=$ cst

Ainsi on obtient l'intégrale première :

$$\frac{C}{\sqrt{AB}}\int\frac{(f_1-Cr^2)\,dr}{(f_2-(Cr+D\omega)^2).(f_2-Bf_1+(Cr+D\omega)^2-BCr^2)^{1/2}.(Af_1-f_2+ACr^2-(Cr+D\omega)^2)}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{f_2}}\ \text{Arc cos}\ \frac{\gamma-k\,\rho}{\sqrt{(1-k^2)(1-\rho^2)}}=\text{cst}$$

2. Observations

Partie I § 3. Aucun candidat n'a reconnu la description géométrique du mouvement.

§ 4. Les candidats, dans leur très grande majorité, se contentent d'écrire que $P(r)\,Q(r)<0$, sans s'apercevoir que les polynômes P et Q sont définis par les conditions initiales, que $P(r_0)>0$, $Q(r_0)<0$ et que r ne peut évoluer que de façon à satisfaire $P(r)>0$ et $Q(r)<0$.

§ 5. Quoiqu'on ait pris soin d'insérer dans le texte des indications précises, l'on relève ici de multiples erreurs concernant le calcul de la puissance des forces intérieures, l'application du théorème des forces vives, l'obtention des intégrales premières.

§ 6. Les candidats qui ont abordé ce paragraphe ont entrepris de discuter la stabilité des solutions stationnaires par un processus de linéarisation des équations du mouvement ; une meilleure approche eût été de recourir à l'analyse du mouvement décrit au § 4 pour le cas de petites perturbations dans les données initiales correspondant aux solutions stationnaires.

Partie II

N'appelle aucun commentaire puisque le développement des § 2 et 3 est absent de la quasi totalité des copies ; on a seulement noté quelques très rares tentatives qui, jamais, n'ont été au delà de la preuve de l'invariance de D_t .

3. Statistiques

Nombre de copies corrigées : 222

Répartition des notes (sur 40) :

0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 19	20 à 24	25 à 30	30 à 40
24	62	30	25	30	37	10	4

Moyenne générale 11,20 (excluant les copies nulles : 12,61).

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Sujet (durée : 6 heures)

On s'efforcera de désigner les variables aléatoires par des lettres majuscules et les valeurs qu'elles prennent par des lettres minuscules.

DÉFINITIONS, NOTATIONS ET RAPPELS

1° Dans tout le problème $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\overline{\mathbb{R}}_+$ l'ensemble $[0, \infty]$. Ces deux derniers ensembles sont munis de leur tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ respectivement. (On rappelle que la tribu borélienne sur un espace topologique est la tribu engendrée par les ouverts de cette topologie.)

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'espace vectoriel (pour les opérations usuelles) de toutes les suites de nombres réels :

$$x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \text{si} \quad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{est une suite où } x_n \in \mathbb{R} \text{ pour tout } n .$$

$\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$ désigne le sous-espace vectoriel des suites telles que $x_n = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est muni de la topologie produit usuelle qu'on peut définir de la façon suivante : soit $\Phi(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ de cardinal fini ; si $J \in \Phi(\mathbb{N})$ on désigne par Π_J la projection canonique de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^J$ définie par :

$$x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow \Pi_J(x) = x_J = (x_j)_{j \in J} .$$

Une base d'ouverts de la topologie dont on munit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est alors constituée par les cylindres ouverts c'est-à-dire les ensembles de la forme $\Pi_I^{-1}(O_I)$ où I décrit $\Phi(\mathbb{N})$ et O_I la famille des ouverts de $\mathbb{R}^I$.

On notera $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ correspondant à cette topologie. On rappelle que $\mathcal{B}$ est la plus petite tribu rendant mesurables les applications Π_J ($J \in \Phi(\mathbb{N})$) quand chaque $\mathbb{R}^J$ est muni de sa tribu borélienne.

2° Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, une variable aléatoire X (en abrégé v. a.) sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sera appelée variable aléatoire réelle (en abrégé v. a. r.). Une v. a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ sera appelée v. a. positive. Le symbole $E(X)$ désigne, quand elle existe, l'espérance mathématique de X relativement à la probabilité P.

Toute suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de v. a. r. sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ définit une v. a. X à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$. Réciproquement une v. a. X sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ définit une suite de v. a. r. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ par les relations : $X_n = \Pi_{\{n\}} X$ où $\{n\}$ désigne la partie de $\mathbb{N}$ réduite à l'entier n. Les v. a. r. X_n seront appelées les coordonnées de X. On identifiera ainsi les notions de suite de v. a. r. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et de v. a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$.

On rappelle que la loi P_X d'une v. a. X à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$, c'est-à-dire la mesure image de P par X, est uniquement déterminée par ses valeurs sur les cylindres $\Pi_I^{-1}(O_I)$ où O_I est un borélien de $\mathbb{R}^I$.

On dira qu'une v. a. X à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ est une v. a. gaussienne centrée si $\forall J \in \Phi(\mathbb{N})$, X_J est un vecteur gaussien centré. On conviendra qu'une v. a. constante est gaussienne.

Une v. a. X est dite suite de Bernoulli si la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses coordonnées est une suite de v. a. r. indépendantes de même loi de Bernoulli donnée par $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \dfrac{1}{2}$.

PARTIE I

1° Vérifier que l'application $(x, y) \rightsquigarrow (x + y)$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est mesurable relativement à $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$.

Soient X et Y deux v. a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ et indépendantes, soient P_X, P_Y et P_{X+Y} les lois respectives de X, Y et $X + Y$, soit f une fonction mesurable de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ démontrer que :

$$E\, f(X + Y) = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} E\, f(X + y)\, P_Y(dy) = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} E\, f(x + Y)\, P_X(dx)$$

Énoncer un résultat analogue si f n'est pas positive.

2° Démontrer que les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ appartiennent à la tribu $\mathcal{B}$: $\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$, l^∞ (espace des suites bornées), l^c (espace des suites convergentes dans $\mathbb{R}$).

3° Soit α la fonction de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ définie par :

$$x \rightsquigarrow \alpha(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=0}^{n} x_j \right| \quad \text{où} \quad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} ;$$ démontrer que α est borélienne.

Soit β la fonction de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ définie par :

$$x \rightsquigarrow \beta(x) = \begin{cases} \left| \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n \right| & \text{si la série } \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n \text{ est convergente dans } \mathbb{R} ; \\ \infty & \text{si cette série diverge;} \end{cases}$$

démontrer que β est borélienne.

PARTIE II

Les résultats de cette partie ne seront pas utilisés dans la suite

1° Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et V un vecteur gaussien sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, soit μ sa loi et Λ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mu(\Lambda) = 0$ ou $\mu(\Lambda) = 1$.

2° Soit $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une v. a. gaussienne centrée sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$.

Soit k un entier fixé. Pour tout n de $\mathbb{N}$ on désigne par $Z_n^k = E[X_n \mid X_0, \dots, X_k]$ une version de l'espérance conditionnelle de X_n par rapport à la tribu engendrée par le vecteur $(X_0, \dots, X_k)$. On posera

$$Y_n^k = X_n - Z_n^k ; \quad Y^k = (Y_n^k)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad Z^k = (Z_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$$

Démontrer que Y^k est indépendante du vecteur $(X_0, \dots, X_k)$ et que pour tout n il existe des réels $A_{n,j}^k$ tels que $Z_n^k = \sum_{j=0}^{k} A_{n,j}^k X_j$. A quelle condition ces coefficients sont-ils uniques pour tout n ?

3° Soit $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $T(y) = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^{k+1} ; \left(y_n + \sum_{j=r}^{k} A_{n,j}^k \theta_j \right)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty \right\}$

Comparer les ensembles $\{ Z^k \in l^\infty \}$ et $\{ (X_0, \dots, X_k) \in T(0) \}$.

En déduire que $P\{ Z^k \in l^\infty \} = 0$ ou $P\{ Z^k \in l^\infty \} = 1$.

4° Si $T(0)^c$ désigne le complémentaire de $T(0)$, vérifier que pour tout y de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble $T(y) \cap T(0)^c$ rencontre en au plus un point toute droite de R^{k+1}. En déduire que $T(y) \cap T(0)^c$ est négligeable pour la loi de tout vecteur gaussien centré sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{k+1}$.

5° On suppose que $P\{Z^k \in l^\infty\} = 0$; démontrer que $P\{X \in l^\infty\} = 0$.

6° On suppose que $P\{Z^k \in l^\infty\} = 1$; on pose $B_k = \{Y^k \in l^\infty\}$ et $B = \{X \in l^\infty\}$. On désigne par $B \Delta B_k$ l'ensemble $[B \cap B_k^c] \cup [B_k \cap B^c]$; démontrer que $P(B \Delta B_k) = 0$.

En déduire que si $P\{Z^p \in l^\infty\} = 1 \quad \forall p \in \mathbb{N}$, $P(B) = 0$ ou $P(B) = 1$.

7° Donner un exemple simple de v. a. gaussienne X dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $P\{X \in l^\infty\} = 1$. Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v. a. r. indépendantes, gaussiennes et centrées et X la v. a. gaussienne correspondante dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\sum_{n \in \mathbb{N}} E(X_n^2) < \infty$. Démontrer que $P\{X \in l^\infty\} = 1$.

8° Soit $\tilde{X} = (\tilde{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ (notée du).

Démontrer que $P_{\tilde{X}}\{l^\infty\} = 0$. Quelle est la probabilité $P\{\sup_n X_n < 0\}$?

PARTIE III

Une v. a. $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ est dite symétrique si les v. a. X et $-X$ ont même loi. Elle est dite strictement symétrique si pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\{(-1), (+1)\}^{\mathbb{N}}$ les v. a. X et $\varepsilon X = (\varepsilon_n X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont même loi.

1° Donner un exemple simple de v. a. symétrique qui n'est pas strictement symétrique.

2° Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v. a. r. indépendantes et X la v. a. correspondante dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, montrer que X est strictement symétrique si et seulement si elle est symétrique.

3° Soit $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une v. a. de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et W une v. a. strictement symétrique sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ et indépendante de X. Démontrer que la v. a. $Z = (X_n W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement symétrique.

4° Soit $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une v. a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ et $B = (B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une v. a. de Bernoulli définie sur le même espace et indépendante de X. On suppose X strictement symétrique. Démontrer que les v. a. X, $BX = (B_n X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $B|X| = (B_n |X_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ ont même loi.

5° Soit X une v. a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ et de loi P_X. Soient X' et X'' deux v. a. indépendantes à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ et de même loi P_X. Démontrer que $Y = X' - X''$ est symétrique. On appelle symétrisée de X toute v. a. obtenue par ce procédé. Démontrer que toutes les symétrisées de X ont même loi.

6° On suppose X symétrique ; soit $\tilde{X}$ une symétrisée de X ; $\tilde{X}$ a-t-elle même loi que X ?

7° Soit X une v. a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$, Y une symétrisée de X. Soit W une v. a. strictement symétrique sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ indépendante de X. Soit Z la v. a. définie à la question 3°. Z et Y ont-elles même loi?

8° Soit X une v. a. r. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dont la loi est une loi de Poisson de paramètre λ. Soit Y une symétrisée de X, quelle est la loi de Y ? Déterminer sa fonction caractéristique $t \rightsquigarrow \varphi(t) = E(e^{itX})$.

9° Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$ n nombres réels et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n réels positifs, soit $\psi_n(t)$ la fonction $t \rightsquigarrow \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\cos u_i t - 1}{a_i}\right)$; montrer que ψ_n est la fonction caractéristique d'une v. a. Y_n.

10° Soit r un réel tel que $0 < r < 2$. Soit $I(t) = \int_0^\infty \frac{1 - \cos ut}{u^{1+r}}\, du$ et $\psi(t) = \exp[-I(t)]$.

En utilisant le fait que $I(t)$ est limite de « sommes de Riemann » montrer que $\psi(t)$ est la fonction caractéristique d'une v. a. r. Y ; expliquer comment Y s'obtient à partir de v. a. de Poisson.

PARTIE IV

Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et k un entier, on désignera par H_k l'application de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans lui-même définie par $H_k(x) = (x_0, x_1, \ldots, x_k, 0, 0 \ldots)$.

Soient X une v. a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$, q une application mesurable de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ et n un entier. On posera $U_n = q(H_k(x))$, $M_n = \max_{0 \leqslant j \leqslant n} U_j$ et $M = \sup_n M_n = \sup_p U_p$.

Soit t un réel $0 \leqslant t < \infty$ et $T_t(\omega) = \inf(j \in \mathbb{N}, U_j > t)$ (on conviendra que $\inf \varnothing = +\infty$).

La fonction q est dite quasi convexe si pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : q\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \max[q(x), q(y)]$.

Dans toute la suite q désignera une fonction borélienne quasi convexe.

1° Pour tout couple d'entiers (j, n) $0 \leqslant j \leqslant n$ on pose :

$$Z_{n,j} = (X_0, X_1, \ldots X_j, -X_{j+1}, -X_{j+2}, \ldots, -X_n, 0, 0, \ldots) ;$$

démontrer que pour tout $t \geqslant 0$

$$P\{T_t = j\} \leqslant P\{T_t = j ; U_n > t\} + P\{T_t = j ; q(Z_{n,j}) > t\}.$$

2° On suppose désormais X strictement symétrique.

Comparer $P\{T_t = j\}$ et $2P\{T_t = j ; U_n > t\}$; démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$P\{M_n > t\} \leqslant 2P\{U_n > t\}$, en déduire que $P\{M > t\} \leqslant 2 \liminf_n P\{U_n > t\}$.

3° Soit $\varphi : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction croissante, continue à gauche. Soit ν la mesure sur $(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ définie par $\nu[s, t[= \varphi(t) - \varphi(s)$ si $0 \leqslant s \leqslant t$ (on convient que $\infty - \infty = 0$).

a. Soit Y une v. a. r. positive sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ démontrer que

$E[\varphi(Y)] = \varphi(0) + \int_{[0,\infty]} P[Y > t]\, d\nu(t)$; que devient cette formule si φ est continue?

b. φ n'étant plus supposée continue démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad E[\varphi(M_n)] \leqslant 2\,E[\varphi(U_n)] \quad \text{et que}$$
$$E[\varphi(M)] \leqslant 2 \liminf_n E[\varphi(U_n)].$$

4° Démontrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

a. $E[\varphi(M)] < \infty$

b. $\sup_n E[\varphi(U_n)] < \infty$

5° On dit qu'une suite $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de v. a. r. est bornée en probabilités si

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists A \in]0\ \infty[\ : \qquad \forall n \qquad P\{|V_n| > A\} \leqslant \varepsilon.$$

Démontrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

a. La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée en probabilités.

b. $M < \infty$ presque sûrement.

6° On suppose que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une v. a. U. On sait qu'alors, pour tout ouvert O de $\overline{R}_+$: $P\{U \in O\} \leqslant \liminf_n P\{U_n \in O\}$. Démontrer que pour tout $t \in [0, \infty[$: $P\{U > t\} \leqslant P\{M > t\} \leqslant 2\,P\{U \geqslant t\}$; en supposant φ continue, comparer $E[\varphi(U)]$, $E[\varphi(M)]$ et $2\,E[\varphi(U)]$.

7° Soit $S_n = X_0 + X_{1+} \dots + X_n$. Démontrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

a. $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée en probabilités.

b. $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée presque sûrement (c'est-à-dire $\sup_n |S_n| < \infty$ presque sûrement).

Démontrer également celle des deux suivantes :

a'. $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente en probabilités.

b'. $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement.

8° Soit $r \in]0\ \infty[$, démontrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

a. $\sup_n E[|S_n|^r] < \infty$

b. $E[\sup_n |S_n|^r] < \infty$

PARTIE V

Cette partie est indépendante de la partie IV *et fait suite aux questions* 8° *et* 9° *de la* partie III.

Soit r un réel tel que $0 < r < 2$, $I(t) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1 - \cos ut}{u^{1+r}}\,du$ et $\Psi(t) = \exp[-I(t)]$

1° Soit $s > 0$, comparer les fonctions $t \rightsquigarrow I(t)$ et $t \rightsquigarrow I(st)$

Démontrer que $t \rightsquigarrow \exp[-|t|^r]$ est une fonction caractéristique.

On appelle v. a. r. r-stable toute v. a. r. dont la fonction caractéristique est $\exp(-|t|^r)$.

2° Soit $r_1 \in]0,2[$ un réel et X une v. a. r. Comparer les quantités $E[|X|^{r_1}]$ et $\int_0^{\infty} [1 - \mathcal{R}e\,\Psi_X(t)] \frac{dt}{t^{r_1+1}}$ où $\mathcal{R}e\,\Psi_X(t)$ désigne la partie réelle de la fonction caractéristique Ψ_X de X.

Si X est r-stable en déduire toutes les valeurs de r_1 telles que $E[|X|^{r_1}] < \infty$.

3° Soit X r-stable, démontrer que sa loi admet une densité f_r par rapport à la mesure de Lebesgue et que f_r est indéfiniment dérivable.

4° Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v. a. r. r-stables indépendantes, soit $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} x_k X_k$.

Donner une condition nécessaire et suffisante relativement à x pour que Σ_n converge en loi.

5° Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v. a. r. indépendantes positives; démontrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

a. $\sum_n Y_n < \infty$ presque sûrement.

b. $\sum_n P\{Y_n \geqslant 1\} < \infty$ et $\sum_n \int_{\{Y_n \leqslant 1\}} Y_n\, dP < \infty$.

6° Soit X_n une suite de v. a. r. indépendantes r-stables et x un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Démontrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

a. $\sum_n |x_n X_n|^r < \infty$ presque sûrement.

b. $\sum_n |x_n|^r \left(1 + \operatorname{Log} \frac{1}{|x_n|}\right) < \infty$.

On pourra utiliser le fait que $\int_{|u| \geqslant t} f_r(x)\, dx$ est équivalent à $\frac{1}{t^r}$ quand t tend vers $+\infty$.

RAPPORT SUR L'EPREUVE DE PROBABILITES ET STATISTIQUES

1.— Thème du sujet

L'objet du problème était un "pot-pourri" sur le thème : toute suite de variables aléatoires réelles définit une variable aléatoire à valeurs dans l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites de nombres réels. Il était composé de telle façon que sa résolution impliquait la connaissance de différentes parties du programme: théorie générale de la mesure ; vecteurs aléatoires gaussiens, fonctions caractéristiques, séries de variables aléatoires indépendantes ...

2.— Observations générales

Les correcteurs qui avaient participé aux jurys des années précédentes ont constaté une amélioration des connaissances des candidats (c'est la preuve que ceux-ci ont lu leurs rapports). A peu près tous savent qu'il existe des variables aléatoires qui ne sont pas discrètes ou absolument continues et ils maîtrisent le concept de loi d'une variable aléatoire. Toutefois il reste encore un effort à faire ... Trop souvent on a pu lire des affirmations du genre "Deux variables aléatoires réelles X et Y ont même loi si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$ les probabilités $P\{X = x\}$ et $P\{Y = x\}$ sont égales" (horresco referens).

Et certaines lacunes apparues à l'occasion de la manipulation des vecteurs gaussiens sont inquiétantes (voir plus loin).

Que dire enfin des candidats qui ne savent même pas ce qu'est une loi de Poisson et la confondent avec une loi exponentielle ?

3.— Résultats généraux

847 candidats ont composé (en 1977, il y en avait 837)

Répartition des notes (y compris les copies blanches) par classes d'amplitude 5

0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	25 à 30	30 à 35	35 à 40
146	266	87	95	96	74	58	23	2

4.— Observations détaillées sur le problème

Partie I

Cette partie était très facile et aurait dû être traitée entièrement (et correctement) par tout candidat. Néanmoins trop peu ont vraiment démontré que l'application "somme" de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est mesurable (relativement aux tribus spécifiées dans le texte) : pour démontrer que la continuité impliquait la mesurabilité, il fallait démontrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est identique à la tribu produit (ce qui n'est pas vrai pour un espace topologique quelconque).

Pour démontrer que le sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites convergentes dans $\mathbb{R}$ est un borélien de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la meilleure méthode est peut être d'utiliser la condition de Cauchy, comme beaucoup l'ont vu. Ceux qui ont utilisé les notions de limites supérieure et inférieure ont très souvent omis un détail : l'ensemble des suites $x = (x_n)_n$ telles que $\limsup x_n = \liminf x_n$ est l'ensemble des suites convergeant dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Partie II

Elle était consacrée à la démonstration d'un cas très particulier de la célèbre-loi de type "zéro-un" pour les v.a. gaussiennes vectorielles. La méthode choisie n'était pas la plus directe, mais elle permettait de tester les connaissances des candidats dans le domaine des vecteurs gaussiens de dimension finie et de la "prévision linéaire" des vecteurs gaussiens. Le découpage avait été fait de telle façon que chaque question était devenue facile. Beaucoup de candidats n'ont pas abordé cette partie et ont préféré la sauter, ce qui prouve leur ignorance totale des vecteurs gaussiens. Mais chez nombre de ceux qui se sont attachés à résoudre cette partie, on a constaté de grosses erreurs que les futurs candidats devraient s'efforcer d'éviter.

Par exemple :

- un vecteur est gaussien si toutes ses composantes sont gaussiennes
- tout vecteur gaussien de dimension n a une loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$

- Des v.a. réelles linéairement indépendantes sont stochastiquement indépendantes.

Peu savent que si les deux composants d'un vecteur gaussien centré sont orthogonales, elles sont indépendantes ; beaucoup ignorent tout de l'espérance conditionnelle d'un vecteur gaussien étant données certaines de ses composantes ; et nombre de ceux qui savent qu'on peut l'obtenir par une projection orthogonale ne savent pas au juste sur quel sous-espace projeter.

Partie III

Cette partie introduisait les notions de symétrie et de symétrie stricte pour les suites de variables aléatoires réelles. Une bonne partie était constituée de "gymnastique" sur ces notions : avec le théorème de Fubini (et un peu de jugeotte) on pouvait en faire facilement une bonne portion. Si de plus on savait la définition d'une loi de Poisson on pouvait traiter rapidement les neuf premières questions. Si certaines questions étaient ouvertes (i.e. la conclusion n'était pas indiquée) c'était dans l'intention de juger des capacités des candidats à réfléchir, mais certainement pas pour leur permettre d'affirmer sans démonstration des résultats (au demeurant faux !), comme certains l'ont fait.

La dixième question, la moins facile, a été rarement traitée de manière satisfaisante : on omet de vérifier que l'intégrale I (t) est finie, qu'elle définit une fonction continue (pour pouvoir appliquer le théorème de continuité de Paul Lévy).

Partie IV

Il est bien connu que, pour les séries de variables aléatoires réelles, indépendantes, la convergence en probabilité équivaut à la convergence presque sûre. Il est peut-être moins connu, mais encore vrai, que ce résultat subsiste pour les v.a. strictement symétriques. Cette partie était consacrée à la démonstration de généralisation de ce résultat, et de ce résultat lui-même comme cas particulier.

Reconnaissons une erreur typographique : il fallait lire dans la ligne (4) : "$U_n = q\ (H_n\ (X))$" au lieu de $U_n = q\,(H_k\ (x))$. Mais cette erreur était tellement évidente qu'elle n'a gêné aucun candidat ayant abordé cette partie, tous ayant signalé la rectification à apporter au texte.

La question (1) était absolument immédiate ; dans la question (2) peu de candidats ont démontré de manière satisfaisante que

$$P\left\{T_t = j\ ;\ U_n > t\right\} \quad = \quad P\left\{T_t = j\ ;\ q(Z_{n,j}) > t\right\}$$

La première partie de la question (3) était la démonstration d'un résultat préliminaire utile par la suite (formule d'intégration par parties généralisée) et n'avait rien à voir avec ce qui précédait ; elle a été réussie par ceux qui l'ont abordée. Ensuite tout devenait très facile (ce qui ne signifie que cela a été réussi) jusqu'à la question (7), deuxième partie. Dans l'ensemble, beaucoup de candidats ont "grappillé" de ci, de là mais peu l'ont traitée entièrement.

Partie V

Cette partie était constituée par l'application des résultats précédents aux variables aléatoires stables symétriques d'ordre r ($0 < r < 2$), ainsi qu'aux suites r-stables.

Peu de candidats l'ont abordée, malgré la facilité des questions (1) à (4). Les questions (5) et (6) ont été traitées (de manière à peu près satisfaisante) par moins d'une dizaine de candidats.

5.– Résumé de la solution

Partie I

(1) Le plus simple est de démontrer que la tribu borélienne (pour la topologie produit) sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est identique au produit des tribus boréliennes sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, puisque l'application $(x, y) \rightsquigarrow x + y$ est continue. Il suffit pour cela de démontrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ appartient à la tribu produit. Or, grâce au fait que la topologie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ satisfait au second axiome de dénombrabilité (i.e possède une base dénombrable d'ouverts), tout ouvert U est réunion <u>dénombrable</u> d'ouverts de la forme A x B (A et B ouverts dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$). Mais les ensembles de cette dernière forme appartiennent à la tribu produit ; donc U aussi.

Le reste est une simple transcription des théorèmes de Tonelli et Fubini.

(2) Soit E_k le sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites $x = (x_n)$ nulles à partir de k ($k \in \mathbb{N}$). Chaque E_k est <u>fermé</u>, donc $\mathbb{R}_o^{\mathbb{N}} = \bigcup_k E_k$ est un borélien.

– $$\ell^{\infty} = \bigcup_{M \in \mathbb{N}} \bigcap_n \{x \,;\, |x_n| \leqslant M\}$$; donc ℓ^{∞}

est un borélien car c'est une réunion dénombrable de fermés.

– Une suite est convergente dans $\mathbb{R}$ si et seulement si elle satisfait à la condition de Cauchy usuelle, donc

$$\ell^{c} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n'=n+1}^{\infty} \{x \,;\, |x_n - x_{n'}| \leqslant \frac{1}{m}\}$$

On pouvait également remarquer que

$$\ell^{c} = \{x \,;\, \limsup x_n = \liminf x_n\} \cap \{x \,;\, \limsup x_n \in \mathbb{R}\}$$

(3) Le fait que α soit borélienne est absolument trivial. Pour démontrer que β est borélienne, il faut démontrer que l'ensemble des séries convergentes (dans $\mathbb{R}$) est un borélien. Or cet ensemble n'est autre que :

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n'=n+1}^{\infty} \{ x \; ; \; |x_n + x_{n+1} + \dots x_{n'}| \leq \frac{1}{m} \}$$

Partie II

(1) V étant gaussien, le support de μ est une variété affine. Si cette variété est de dimension zéro (auquel cas V est un vecteur "presque certain") le résultat est trivial. Sinon, désignons par L le support de μ ; alors la restriction de μ à L est équivalente à la mesure de Lebesgue sur L et $\mu(\Lambda) = \mu(\Lambda \cap L)$. On désignera par μ_L la restriction de μ à L . On a :

$$\mu(\Lambda) = \mu_L(\Lambda \cap L).$$

D'autre part, ou bien $\Lambda \cap L = L$ (auquel cas $\mu_L(\Lambda \cap L) = 1$, donc $\mu(\Lambda) = 1$), ou bien $\Lambda \cap L$ est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue sur L et dans ce cas $\mu_L(\Lambda \cap L) = 0$, donc $\mu(\Lambda) = 0$

(2) Le vecteur $(X_o, X_1, \dots X_k, Y_o^k, Y_1^k, Y_2^k, \dots)$ est également un vecteur gaussien centré. En outre pour tout $i = 0, 1, \dots k$ et tout $j \in \mathbb{N}$ on a $\mathbb{E}\{X_i \cdot Y_j^k\} = 0$. Donc le vecteur $(X_o, X_1, \dots X_k)$ est indépendant de tout vecteur de la forme $\pi_J(Y^k)$ $(J \in \Phi(\mathbb{N}))$. En définitive $(X_o, X_1, \dots X_k)$ est indépendant de Y^k.

On en déduit alors que pour tout k les vecteurs Z^k et Y^k à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont aussi indépendants.

(Remarquons que la rédaction de la question (2) n'est pas un modèle à imiter par le candidat : il lui est demandé d'étayer ce qui est simplement affirmé ici, ce qui nécessite naturellement la connaissance précise des résultats classiques sur les vecteurs gaussiens de dimension finie : espérance conditionnelle, lien entre indépendance et orthogonalité, etc ...)

Dans le cours de la démonstration esquissée ci-dessus, on a déjà remarqué que Z_n^k est une combinaison linéaire des $(X_o, X_1, \dots X_k)$, donc

$$Z_n^k = \sum_{j=0}^{k} A_{n,j}^k \; X_j \; .$$

On a unicité des $A_{n,j}^k$ pour tout n si et seulement si les $X_o, X_1 \dots X_k$ sont des variables aléatoires linéairement indépendantes (ce qui ne signifie pas qu'elles sont stochastiquement indépendantes !)

(3) on a les égalités d'ensembles suivants :

$$\{Z^k \in \ell^\infty\} = \{(\sum_{j=0}^{k} A_{n,j}^k \; X_j)_n \in \ell^\infty\} = \{(X_o, X_1 \dots X_k) \in T\ (o)\} \; .$$

T (o) étant évidemment un sous-espace de $\mathbb{R}^{k+1}$ on a :

$$P\ \{Z^k \in \ell^\infty\} = 0 \quad \text{ou} \quad P\ \{Z^k \in \ell^\infty\} = 1$$

(4) On a pour tout $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$\{\ \omega\ ;\ y + Z^k\ (\omega) \in \ell^\infty\ \} = \{\ \omega\ ;\ (y_n + \sum_{j=0}^{k} A_{n,j}^k \; X_j(\omega))_n \in \ell^\infty\ \}$$

$$= \{\ \omega\ ;\ (X_o(\omega),\ X_1(\omega),\ \dots X_k(\omega)) \in T\ (y)\}$$

Soit donc $\Theta \in T\ (y) \cap T\ (o)^c$ c'est-à-dire :

$$(\sum_{j=0}^{k} A_{n,j}^k \; \Theta_j)_n \notin \ell^\infty \quad \text{et} \quad (y_n + \sum_{j=0}^{k} A_{n,j}^k \; \Theta_j)_n \in \ell^\infty$$

Soit en outre ρ un réel, distinct de 1. Si l'on avait $\rho\ \Theta \in T\ (y) \cap T\ (o)^c$ on aurait :

$$(y_n + \rho \, . \sum_{j=0}^{k} A_{n,j}^k \; \Theta_j)_n \in \ell^\infty \; ; \text{ ou encore :}$$

$$((\rho-1) \sum_{j=0}^{k} A_{n,j}^k \; \Theta_j)_n \in \ell^\infty \; ; \text{ or ceci est absurde d'après l'hypothèse.}$$

Naturellement l'élément zéro de $\mathbb{R}^{k+1}$ n'appartient pas à $T\ (y) \cap T\ (o)^c$, donc la mesure de $T\ (y) \cap T\ (o)^c$ relativement à la mesure de Dirac δ (o), sur

$\mathbb{R}^{k+1}$ est nulle. On peut donc supposer que la loi gaussienne centrée sur $\mathbb{R}^{k+1}$ n'est pas égale à δ (o) et on la désignera par μ. Soit L le support de μ : L est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{k+1}$. Une partie de $\mathbb{R}^{k+1}$ rencontrant toute droite issue de zéro en au plus un point est de mesure nulle pour la mesure sur $\mathbb{R}^{k+1}$ image par l'injection canonique $L \to \mathbb{R}^{k+1}$ de la mesure de Lebesgue sur L ; donc elle est également de mesure nulle pour μ .

(5) On a $X = Y^k + Z^k$ et d'après ce que l'on a vu plus haut les variables aléatoires Y^k et Z^k à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont indépendantes. Alors :

$$P\{X \in \ell^\infty\} = P\{Y^k + Z^k \in \ell^\infty\} = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} P\{y + Z^k \in \ell^\infty\} P_{Y^k}(dy)$$

$$= \int_{y \in \ell^\infty} P\{y + Z^k \in \ell^\infty\} P_{Y^k}(dy) + \int_{y \notin \ell^\infty} P\{y + Z^k \in \ell^\infty\} P_{Y^k}(dy).$$

Or si $y \in \ell^\infty$ $\{y + Z^k \in \ell^\infty\} = \{Z^k \in \ell^\infty\}$, donc la première intégrale est nulle. Par contre si $y \notin \ell^\infty$, om a :

$$P\{y + Z^k \in \ell^\infty\} \subset \{Z^k \notin \ell^\infty\} \quad \text{et :}$$

$$P\{y + Z^k \in \ell^\infty\} = P\{y + Z^k \in \ell^\infty\} , Z^k \notin \ell^\infty\}$$
$$= P\{(X_o, \ldots, X_k) \in T(y) \cap T(o)^c\} = 0 ;$$

donc la seconde intégrale est également nulle.

(6) On a $B \,\Delta\, B_k \subset \{Z^k \notin \ell^\infty\}$; donc $P(B \,\Delta\, B_k) = 0$. Si maintenant l'on suppose que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $P\{Z^k \in \ell^\infty\} = 1$ alors l'évènement B est indépendant de Z^p . En effet B_p est évidemment indépendant de Z^p , donc B qui lui est "presque égal" est aussi indépendant de Z^p . B est par conséquent indépendant dans chaque Z^p , donc de la plus petite tribu rendant mesurables les Z_p.

Cela étant, p étant fixé on a $\sigma(Z^p) = \sigma(X_o, \ldots X_p)$. En définitive B est indépendant de la tribu rendant mesurables les variables aléatoires r (X_n), donc indépendant de lui-même.

Remarque : on a, bien évidemment, la dichotomie suivante :

- $\exists\, k$ tel que $P\ \{Z^k \in \ell^\infty\} = 0$
- $\forall\, k$, $P\ \{Z^k \in \ell^\infty\} = 1$

(puisque en effet $P\ \{Z^k \in \ell^\infty\}$ ne peut prendre que les valeurs zéro ou un). Dans le premier cas $P\ \{X \in \ell^\infty\} = 0$ (question (3)) et dans le second cas $P\ \{X \in \ell^\infty\} = 0$ ou 1. Donc on a démontré que si X est un vecteur à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gaussien centré $P\ \{X \in \ell^\infty\} = 0$ ou $P\ \{X \in \ell^\infty\} = 1$.

Partie III

(1) Si X est une v.a. r gaussienne centrée, non dégénérée, la v.a. $(X, X, o, o, o, \ldots)$ est symétrique sans être strictement symétrique.

(3) Remarquons les deux faits suivants

- Si (X_n) est strictement symétrique, pour tout $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la v.a. $a\,X = (a_n\, X_n)$ est strictement symétrique
- (X_n) est strictement symétrique si et seulement si pour toute $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longmapsto [0, \infty]$ borélienne on a l'égalité :

$$\mathbb{E}\ \{f\ (X)\} = \mathbb{E}\ \{f\ (\varepsilon\, X)\} \qquad \forall\ \varepsilon \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$$

Soit alors W strictement symétrique et $\varepsilon_o \in \{-1\ ;\ +1\}^{\mathbb{N}}$; on a :

$$\mathbb{E}\ \{f\ (\varepsilon_o\ W\, X|\} = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \mathbb{E}\ \{f\ (\varepsilon_o\ x\ W)\}\ P_X\ (dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \mathbb{E}\ \{f\ (x\ W)\}\ P_X\ (dx) = \mathbb{P}\ \{f\ (W\, X)\}.$$

(4) $$\mathbb{E}\ \{f\ (BX)\} = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \mathbb{E}\ \{f\ (bX)\}\ d\ P_B\ (b)$$

$$= \int_{\{-1,\ +1\}^{\mathbb{N}}} \mathbb{E}\ \{f\ (bX)\}\ d\ P_B\ (b) = \mathbb{E}\ \{f\ (X)\}.$$

Donc BX et X sont isonomes. D'autre part

$$\mathbb{E}\ \{f\ (B\ |X|\} = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \mathbb{E}\ \{f\ (B\ |x|\}\ d\ P_X\ (x).$$

Soit alors $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et soit $\varepsilon \in \{-1, +1\}^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n = \varepsilon_n x_n$ pour tout n (ε n'est pas déterminé de manière unique !).

On a :

$$\mathbb{E} \{f (B |x|) = \mathbb{E} \{f (\varepsilon \; B x)\} = \mathbb{E} \{f (Bx)\}$$

D'où l'on déduit immédiatement

$$\mathbb{E} \{f (B |X|)\} = \mathbb{E} \{f (B X)\} .$$

(6) La réponse est non : si X_1 est une v.a. réelle de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, sa symétrisée $\tilde{X}_1$ a pour loi $\mathcal{N}(0, \sqrt{2})$. On en déduit qu'une symétrisée de $X = (X_1, 0, 0, \ldots)$ n'est pas isonome à X.

(9) Soient pour $i = 1, 2 \ldots n$, n v.a. r, $X_1, X_2 \ldots X_n$ obéissant à des lois de Poisson de paramètres respectifs $\frac{1}{2 a_1}$; $\frac{1}{2 a_2}$, ... $\frac{1}{2 a_n}$; et soit $Y_1, Y_2 \ldots Y_n$ leurs symétrisées. Supposons les Y_i indépendantes (ce qui est toujours possible). Alors ψ_n est la f.c de la v.a. r $\sum_{i=1}^{n} u_i Y_i$.

(10) $t \rightsquigarrow I (t)$ donc $t \rightsquigarrow \exp (- I (t))$ est continue. Par ailleurs pour tout t , I (t) est limite de sommes de Riemann de la forme $\sum \frac{1 - \cos u_i t}{u_i^{1+r}}$.

Donc exp (- I (t)) est une f.c d'après la question (9) et la théorème de continuité de Paul Lévy. Toute v.a. Y dont ψ est la fonction caractéristique est limite en loi de symétrisées indépendantes de lois de Poisson.

Partie IV

(1) On a $H_j (X) = \frac{1}{2} [H_n (X) + Z_{n,j}]$

Donc $U_j = q (H_j (X)) \leqslant \max [q (H_n (X)) , q (Z_{n,j})]$

et $\{U_j > t\} \subset \{U_n > t\} \cup \{q (Z_{n,j}) > t\}$. En définitive :

$$\{T_t = j\} = \{T_t = j , U_j > t\} \subset \{T_t = j , U_n > t\} \quad \{T_t = j ; q (Z_{n,j}) > t\}$$

(2) Si X est strictement symétrique, les v.a. H_n (X) et $Z_{n,j}$ sont isonomes. Par ailleurs je dis que $P\{T_t = j \,;\, U_n > t\} = P\{T_t = j \,;\, q\,(Z_{n,j}) > t\}$. En effet l'évènement $\{T_t = j\}$ ne dépend que de $X_1, X_2 \ldots X_j$ et d'autre part les deux v.a. suivantes à valeurs dans $\mathbb{R}^j \times \mathbb{R}^n$ sont isonomes :

$\omega \rightsquigarrow (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots X_j(\omega), X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots X_n(\omega))$; et

$\omega \rightsquigarrow (X_1(\omega), X_2(\omega), X_j(\omega), X_j(\omega), \ldots X_j(\omega), -X_{j+1}(\omega) \,; \ldots -X_n(\omega))$

ce qui démontre le résultat annoncé.

On en déduit que pour tout $j \in \{1, 2, \ldots n\}$ on a

$$P\{T_t = j\} \leqslant 2\,P\{T_t = j \,;\, U_n > t\}$$

Sommant alors, par rapport à j, ces inégalités on obtient

$$\begin{aligned} P\{M_n > t\} = \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} P\{T_t = n\} &\leqslant 2 \sum_j P\{T_t = j \,;\, U_n > t\} \\ &= 2\,P\,\{U_n > t\} \end{aligned}$$

De ces inégalités, valables pour tout n on déduit

$$\liminf_n P\{M_n > t\} \leqslant 2 \liminf_n P\{U_n > t\}$$

Or $M_n \uparrow M$ donc $\liminf P\{M_n > t\} = \lim P\{M_n > t\} = P\{M > t\}$;
ce qui démontre que $P\{M > t\} \leqslant 2 \liminf P\{U_n > t\}$

(3) (a) n'est autre que la formule d'intégration par parties généralisées. Il faut examiner à part le cas $\varphi \equiv \infty$ qui est trivial. Si φ est continue, on peut encore écrire :

$$E\,\{\varphi(Y)\} = \varphi(0) + \int_{[0,\infty]} P\,\{Y \geqslant t\}\, d\tau\,(t)$$

(b) La question (2) et la formule d'intégration par parties donnent immédiatement $\mathbb{E}\,\{\varphi(M_n)\} \leqslant 2\,\mathbb{E}\,\{\varphi(U_n)\}$ $\forall\, n$. On en déduit alors $\liminf_n \mathbb{E}\,\{\varphi\,(M_n)\} \leqslant 2 \liminf_n \mathbb{E}\,\{\varphi\,(U_n)\}$. Or φ étant continue à gauche et croissante $\varphi(M_n) \uparrow \varphi(M)$. Donc par Beppo LEVI $E\,\{\varphi\,(M)\} = \lim_n \mathbb{E}\,\{\varphi(M_n)\}$. Ce qui démontre (b).

(5) (b) $\Longrightarrow$ (a) Trivialement (sans aucune hypothèse de stricte symétrie !)

(a) $\Longrightarrow$ (b) ; Dire que $M < \infty$ presque sûrement équivaut à dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in]0, \infty[$ tel que $P\{M > A\} < \varepsilon$ (ou encore $\{M\}$ est bornée en probabilité).

Mais $P\{M > A\} \leqslant 2 \liminf_n P\{U_n > A\}$ (par la question (2)).

Donc $P\{M > A\} \leqslant 2 \sup_n P\{U_n > A\}$; ce qui démontre l'implication

(6) On a évidemment pour tout n :

$$P(U_n > t) \leqslant P\{M_n > t\} \leqslant 2P\{U_n > t\} .$$

Donc $P\{U > t\} \leqslant \liminf_n P\{U_n > t\} \leqslant \liminf_n P\{M_n > t\}$

$$\leqslant \limsup P\{M_n > t\} \leqslant 2 \limsup P\{U_n > t\}$$

$$\leqslant 2 \limsup P\{U_n \geqslant t\} \leqslant 2P\{U \geqslant t\}$$

Or, du fait que φ est continue : $\int_{[0,\infty]} P\{Y>t\}\, d\tau(t) = \int_{[0,\infty]} P\{Y\geqslant t\}\, dv(t)$

pour toute v.a. Y positive. Donc en intégrant par rapport à V la double inégalité

$P\{U > t\} \leqslant P\{M > t\} \leqslant 2P\{U \geqslant t\}$, on obtient le résultat demandé.

(7) Pour démontrer l'équivalence de (a) et (b) il suffit d'appliquer la question (5) en prenant pour fonction g la fonction qui dans la partie I, question (3) a été appelée β .

Pour démontrer l'équivalence de (a') et (b') on remarque que :

(a') $\Longleftrightarrow$ $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_0$ tel que pour tout $n' \geqslant n_0$, on ait :

$$P\{|X_{n_0} + X_{n_0+1} + \dots X_{n'}| > \varepsilon\} < \varepsilon \text{ ; et que}$$

(b') $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_0$ tel que pour tout $n' \geqslant n_0$, on ait :

$$P\{\sup_{n_0 \leqslant k \leqslant n'} |X_{n_0} + X_{n_0+1} + \dots X_{n'}| > \varepsilon\} \leqslant \varepsilon$$

Il suffit alors de considérer la nouvelle v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $(X_{n_o}, X_{n_o+1}, \ldots)$ et la fonction β ci-dessus pour obtenir le résultat demandé.

(8) On utilise la fonction β de la question (7) et la fonction $\varphi : t \to t^r$ et on applique la question (4).

Partie V

(1) On a $I(st) = s^r \; I(t) \quad \forall t \qquad (s > 0)$

Donc $I(t) = C_1 \times |t|^r$ avec $C_1 = I(1)$.

Dans la 3ème partie, on a démontré que $\exp\left(- \int_0^\infty \dfrac{1 - \cos ut}{C_1 \; u^{1+r}} du\right)$ est une fonction caractéristique. Donc $t \rightsquigarrow \exp(-|t|^r)$ est une f. C

(2) On a

$$\int_0^\infty [1 - \mathcal{R}e \; \psi_X(t)| \frac{dt}{t^{r_1+1}} = \int_0^\infty \frac{dt}{t^{r_1+1}} \int_\Omega [1 - \cos t\, X(\omega)] \; P(d\omega)$$

$$= \int_\Omega P(d\omega) \int_0^\infty \frac{1 - \cos t\, X(\omega)}{t^{r_1+1}} dt \quad \text{(Tonnelli)}$$

$$= C_1 \int_\Omega |X(\omega)|^{r_1} \; P(d\omega) = C_1 \; \mathbb{E}\{ |X|^{r_1} \}$$

Si X est r-stable, alors $\mathcal{R}e \; \psi_X(t) = \exp(-|t|^r)$. On en déduit que $E \{ |X|^{r_1} \} < \infty$ si et seulement si $r_1 < r$.

(3) La fonction $t \rightsquigarrow \exp(-|t|^r)$ étant Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$, on en déduit qu'une v.a. réelle r-stable a une densité f_r (par rapport à la mesure de Lebesgue). Plus précisément :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} \; \exp(-|t|^r) \, dt$$

Sous cette forme, il est immédiat que f_r est indéfiniment dérivable.

(4) $\sum_n$ a pour fonction caractéristique la fonction

$$t \rightsquigarrow \exp\left(- \sum_{k=0}^{n} |x_k|^r \; |t|^r\right).$$

Donc on a l'équivalence

$$\sum_n \text{ converge en loi} \Longleftrightarrow \sum_n |x_n|^r < \infty$$

(5) C'est la "loi des deux séries" pour les v.a. positives. Sa démonstration est analogue à celle du théorème des trois séries :

Pour tout n , soit $Y_n^1 = Y_n \times 1_{\{Y_n < 1\}}$.

Démontrons d'abord (a) $\Longrightarrow$ (b) : Si $\sum Y_n < \infty$ p.s. alors $Y_n \to 0$ p.s. Donc l'ensemble $\limsup_n \{Y_n \geqslant 1\}$ a une probabilité nulle. Or les Y_n étant indépendantes par Borel Cantelli, on en déduit $\sum P \{Y_n \geqslant 1\} < \infty$. Donc la première condition de (b) est vérifiée.

Maintenant $0 \leqslant Y_n^1 \leqslant Y_n$ $\forall$ n ; donc $\sum Y_n^1 < \infty$ p.s. Or les Y_n^1 étant indépendantes on a (par exemple en appliquant le théorème des trois séries) : $\sum_n E(Y_n^1) < \infty$.

Il suffit de remarquer que $E(Y_n^1) = \int_{\{Y_n<1\}} Y_n \, dP$ pour voir que la seconde condition de (b) est vérifiée.

Démontrons ensuite que (b) $\Longrightarrow$ (a). La seconde contiion de (b) s'écrit $\sum_n \mathbb{E} \{Y_n^1\} < \infty$. Donc les Y_n^1 étant positives, $\sum Y_n^1$ converge dans $L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$. Toujours grâce à la positivité des Y_n^1 , on en déduit que $\sum Y_n^1$ converge p.s. Maintenant la première condition de (b) implique

$$P \limsup \{Y_n \neq Y_n^1\} = 0 \quad ; \text{ donc } \quad \sum Y_n < \infty \quad \text{p.s.}$$

(6) Par la question (5) on déduit l'équivalence :

$$\sum_n |x_n X_n|^r < \infty \Longleftrightarrow \begin{cases} - \sum\limits_n P \{|x_n X_n| > 1\} < \infty \\ - \sum\limits_n |x_n|^r \int_{|x_n X_n| \leq 1} |X_n|^r \, dP < \infty \end{cases}$$

Mais du fait que $P \{|X_n| \geq t\} \sim \frac{1}{t^r}$ $(|t| \to \infty)$ la première condition de droits équivaut à $\sum |x_n|^2 < \infty$. Pour démontrer complètement la question (6) il faut utiliser l'équivalence $f_r (t) \sim \frac{1}{t^{r+1}}$ $(|t| \to \infty)$ (condition qui est plus forte que celle donnée dans l'énoncé et qui est vérifiée). Tenant alors compte de cette propriété, on voit immédiatement que la seconde condition de droite équivaut à $\sum |x_n|^r \operatorname{Log} \frac{1}{|x_n|} < \infty$. D'où le résultat.

oral

1. OBSERVATIONS GENERALES

Les 281 candidats admissibles ont été répartis selon deux sous-jurys, comportant chacun une commission d'algèbre et une commission d'analyse. Une concertation permanente a assuré une remarquable harmonisation de la conception et de l'appréciation des épreuves.

Le tableau suivant indique la répartition des notes (sur 80).

	Abandons	0 à 7	8 à 15	16 à 23	24 à 31	32 à 39
Algèbre	9	1	19	21	44	31
Analyse	11	8	16	39	42	47

	40 à 47	48 à 55	56 à 63	64 à 71	72 à 79
Algèbre	41	52	40	14	9
Analyse	40	34	33	9	2

Il fait apparaître une relative vulnérabilité des candidats à l'épreuve d'analyse (163 notes strictement inférieures à 40 contre 125 en algèbre ; 44 notes supérieures à 56 contre 63 en algèbre).

2. RAPPORT DES COMMISSIONS D'ANALYSE

2.1.— Observations générales

Il faut d'abord signaler avec étonnement le cas des candidats qui soumettent un plan réduit à une demi-douzaine de titres dépourvus de contenu, paraissent surpris lorsqu'on leur demande de proposer des sujets d'exposés, ou indiquent des points dont le développement ne saurait exiger plus d'une minute. N'ont-ils même pas lu la brève notice qui leur a été remise ?

Mis à part ces cas marginaux, la plupart des candidats savent en gros ce que l'on attend d'eux, et une proportion notable semble avoir pris connaissance des conseils contenus dans les précédents rapports, dont on ne saurait trop recommander la lecture. Il semble utile cependant d'insister sur les points qui sont encore le plus souvent très mal compris, et de compléter certaines indications.

Rappelons que le candidat ne doit pas effacer le tableau avant la fin de la présentation de son plan. Un usage judicieux de ce tableau permet d'y faire tenir quantité d'informations ; encore faut-il savoir faire choix d'abréviations cohérentes (mais sans excès), omettre d'écrire tout au long une indication qui va de soi au profit des hypothèses clefs, dont la suppression transforme un énoncé, formulé oralement de façon correcte, en une écriture grossièrement fausse ou fâcheusement ambiguë. Sans vouloir trop s'attarder sur des questions de forme, on ne peut s'empêcher de déplorer que de futurs (ou actuels) enseignants présentent des tableaux indéchiffrables, et de s'étonner qu'ils ignorent systématiquement l'orthographe de mots d'usage mathématique aussi courants que «corollaire», apparemment victimes de l'attraction de quelque corrélat, tandis que les ensembles adjacents revêtent un aspect fâcheusement grinçant.

Bien plus grave encore cependant, mais très souvent corrélées aux précédentes, sont les négligences au niveau logique, dans la formulation même des définitions et des énoncés. Il serait certes pédant et stérile de vouloir à tout prix formaliser et quantifier les énoncés les plus simples, et l'usage courant sous-entend fréquemment certains quantificateurs évidents ; mais des ambiguïtés apparaissent dès que plusieurs quantificateurs sont en jeu, et un énoncé tel que : «pour tout x, $f(x)$ est borné» (pour : «f est borné») est évidemment inacceptable ; tandis qu'un énoncé (d'ailleurs acceptable) tel que «toute fonction réglée sur un intervalle est limite uniforme sur tout compact d'une suite de fonctions en escalier» comporte une ambiguïté qui doit être immédiatement perçue et levée. En règle générale lorsqu'une lettre nouvelle apparaît dans un énoncé le candidat doit savoir s'il s'agit d'une donnée, ou si cette lettre est implicitement précédée d'un quantificateur, et lequel. L'usage de phrases simples permet d'éviter l'abus de quantificateurs explicites. Les candidats devraient également saisir la différence entre «on se donne» et «il existe» : ainsi un espace topologique X n'est pas un ensemble sur lequel **existe** une topologie, mais la donnée d'un couple (X, T) où T est une topologie sur X, autrement dit la **donnée** d'une topologie sur X. Notons enfin que l'expression «il faut» a souvent dans le langage courant une signification presque opposée à celle qu'elle a en mathématiques. Il est donc souhaitable, dans un texte mathématique, de réserver «il faut» à l'expression des conditions nécessaires et de lui préférer «on est amené à»,«il est utile de», «il suffit» **selon les cas** pour les autres usages (ainsi on parlera de l'utilité d'une des hypothèses d'un théorème et non de sa nécessité).

Rappelons qu'outre l'intérêt mathématique des énoncés la valeur d'un plan réside dans la logique de sa construction. Le jury est affligé de constater que certains candidats présentent, sans s'en apercevoir, dès le début de leur plan, un théorème dont la démonstration utilise un résultat figurant dans la troisième partie, (quand ce n'est pas l'énoncé qui fait intervenir une définition posée beaucoup plus loin) ; d'autres encore réduisent à une remarque rejetée à la fin la proposition clef qui devrait commander tout un chapitre.

Le jury a observé que les fautes que nous venons de signaler relèvent rarement d'une simple négligence mais trahissent le plus souvent une incompréhension profonde et grave des mécanismes logiques les plus élémentaires.

Le bon usage des notes, qui doivent servir de fil conducteur et de référence pour des points techniques, a déjà été clairement expliqué, notamment dans le précédent rapport. Quelques candidats, par une interprétation abusive, ont cru à tort qu'on leur refusait le droit d'y jeter le moindre coup d'œil, allant jusqu'à chercher à apprendre par cœur le détail des exemples proposés. Mais beaucoup trop nombreux encore sont ceux qui recopient leurs papiers, lapsus compris, sans sembler penser un seul instant à ce qu'ils écrivent, ni chercher à connaître l'énoncé des théorèmes les plus fondamentaux. Certains poussent la naïveté, croyant ainsi excuser leurs erreurs, jusqu'à invoquer l'ouvrage dans lequel ils ont auparavant recopié leurs notes. Le jury sanctionne de plus en plus sévèrement de tels abus.

Il est non moins déraisonnable de réciter par cœur sans rien comprendre. Un exposé ne se réduit pas à une question de cours, récitée en ânonnant ou avec un débit saccadé, mais doit être repensé et mettre en relief les idées directrices, privilégier la stratégie par rapport à la tactique, souligner le rôle des hypothèses (quand ce n'est pas leur nécessité !) et ne pas escamoter les temps forts de l'argumentation au profit des vérifications mécaniques. La démonstration d'un théorème substantiel ne se réduit ni à une série de calculs triviaux, ni à une suite d'astuces sans portée. Le candidat doit posséder suffisamment les idées maîtresses et la structure de son exposé, pour pouvoir reprendre le fil de ses idées s'il est interrompu par le jury (ce que celui-ci évite de faire le plus possible), ou si le jury demande d'admettre tel ou tel point technique. Il est clair que les candidats qui ne proposent au jury que des exposés de quelques lignes sans portée générale se désavantagent d'eux-mêmes. Ceci vaut également pour ceux qui ne proposent que des exposés trop touffus s'ils se révèlent incapables d'en dégager les lignes générales. Une possibilité est alors d'exposer la structure générale de la démonstration et de détailler quelques points particulièrement intéressants. Enfin les questions que le candidat n'a pas retenues dans sa liste d'exposés ne doivent pas être marquées du sceau de l'ignorance. A tout le moins le jury attend des explications éclairant le sens des énoncés et des indications sur le niveau de difficultés des techniques à utiliser, ainsi, en général que sur leur type.

Quant à la matière du plan, un défaut fréquent dans les leçons médiocres reste la juxtaposition, sans harmonisation et sans adaptation au titre exact de la leçon, de matériaux provenant de sources différentes, dont les niveaux et les points de vue sont disparates : par exemple le point de vue élémentaire des fonctions de plusieurs variables et le point de vue des espaces normés (qui interviennent d'ailleurs bien souvent sous la forme d'espaces normables) ; un autre exemple est cité à propos de la leçon 60.

Par ailleurs, on doit signaler l'extension très alarmante d'un défaut qui prend parfois l'allure d'une technique délibérée et systématique : il s'agit du détournement de sujet. Pour le prétexte le plus ténu, on attire celui-ci dans un terrain préparé à l'avance, où l'on dispose de solides munitions. On a le sentiment qu'à la limite certains candidats possèdent une demi-douzaine de sujets d'exposés parmi lesquels, quelle que soit la leçon qu'ils auront tirée, ils puiseront. Le jury sanctionne sévèrement ces pratiques qui frisent la malhonnêteté et qu'il convient d'enrayer à tout prix, faute de quoi l'on pénaliserait les candidats s'efforçant de traiter leur sujet, alors qu'ils en auraient préféré un autre, mieux préparé.

Pour terminer ces remarques générales, on soulignera une fois de plus la nécessité d'une préparation en profondeur, étalée sur toute l'année. L'expérience montre que des candidats favorablement ou même brillamment classés à l'écrit, ce qui laisse supposer de leur part certaines ressources mathématiques, se montrent incapables de dominer des sujets même très classiques et très élémentaires, lorsqu'ils les ont découverts seulement trois heures auparavant.

2.2. Remarques particulières sur certains sujets

– Applications à l'analyse de la notion de compacité (1), exemples d'espaces compacts : le jury attend dans le cadre du sujet (1), qu'au delà des théorèmes fondamentaux, les candidats présentent quelques applications faisant intervenir, si possible de manière coordonnée ces théorèmes.

– Sur le sujet (2) le jury n'attend bien sûr pas un catalogue de compacts : deux points de vue principaux sont possibles : ou classer les exemples suivant les techniques de démonstration de la compacité, et sur chaque cas montrer l'intérêt de l'exemple par une application (ceci ne doit pas revenir à traiter le sujet (1) ; ou alors présenter à propos des divers énoncés sur les compacts des exemples et des contre-exemples (ainsi : comparaison de la compacité et des diverses compacités séquentielles...).

– Sous-espaces denses, approximation (7) ; espaces vectoriels normés (8, 9 et 10) : les sujets 7 et 8 sont essentiellement des sujets d'exemples ; il est donc inutile de consacrer le plan à la théorie, les propriétés essentielles étant rappelées soit au début, soit lors de leur utilisation. Le sujet 7 vise essentiellement les possibilités d'approximation des fonctions et l'utilisation de ces approximations. De telles techniques sont fondamentales en analyse. Il convient de passer vite sur les espaces topologiques généraux (si l'on juge utile d'en parler...), les espaces métriques et particulièrement les normés fournissant une matière surabondante. A partir des fonctions en escalier, des polynômes, des polynômes trigonométriques, des fonctions à support compact, sans nécessairement aller jusqu'aux fonctions C^∞ à support compact il est possible de donner les exemples courants et les applications correspondantes. Aucun candidat n'a signalé le procédé de troncature qui est pourtant constructif ; par contre l'utilisation de la convolution a été rencontré incidemment dans un exemple proposé par un candidat.

– Le sujet 8 amène à constater que d'une manière générale les candidats manquent de technique pour calculer les normes même dans les cas les plus simples (de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par exemple !). Aucun candidat n'a songé à préciser sur des exemples si la norme est un sup effectivement atteint (on pouvait se reporter par exemple à la dernière partie du problème d'analyse).

– Les indications données dans l'intitulé de la leçon 10 sont suivies mais elles ne sont bien entendu pas limitatives. On peut regretter que l'étude des projections ne soit faite que dans le cas hilbertien général alors que d'autres résultats simples peuvent être obtenus (dans le cas d'espaces normés de dimension finie par exemple). Il est curieux de constater qu'aucun candidat ne signale les propriétés géométriques de la boule (à part la convexité) et n'en étudie la caractérisation. En ce qui concerne le théorème de Hahn-Banach souvent cité, il est normal que dans la leçon 10 figure alors la forme géométrique.

– Sujets sur $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^n$: aussi banal que ce soit, insistons sur le fait qu'il faut savoir quelle définition ou construction de $\mathbf{R}$ est prise au départ. La distinction entre les propriétés «topologiques» et «métriques» doit être claire ; ainsi les candidats ont avantage à bien réfléchir aux propriétés de la topologie de l'ordre et aux relations entre propriétés de l'ordre et propriétés de la topologie. Le jury s'étonne à propos de $\mathbf{R}^n$ de constater que le point de vue de la topologie produit, fondamental au départ, soit souvent escamoté, parfois totalement oublié. Enfin, à propos du caractère complet il est indispensable de s'interroger sur le type d'équivalence des métriques le concernant (sans pour autant parler de structure uniforme, ce qu'aucun candidat ne fait, sauf par lapsus ; le jury ne pose d'ailleurs de question à ce sujet que si le point de vue soutenu le suppose ou l'impose).

– Sujets d'intégration : cette année a vu la réapparition des leçons d'intégration qui avaient été provisoirement exclues du programme d'oral. Les candidats, qui ne devaient pas l'ignorer, ont cependant paru souvent pris au dépourvu : il n'est pas raisonnable, si on dispose d'une faible culture mathématique, de renoncer à présenter les mécanismes de la recherche des primitives (44) pour se lancer dans un sujet abstrait de topologie générale.

– En ce qui concerne l'intégration, le jury n'impose nullement l'organisation de la leçon ni l'utilisation d'une théorie en particulier. En revanche, la cohérence et la solidité des connaissances au niveau choisi sont attendues. Il n'est pas acceptable de prétendre exposer une théorie abstraite de la mesure et d'annoncer sans sourciller que la mesure de l'intersection d'une suite décroissante d'ensembles mesurables est la borne inférieure dans $\mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$ des mesures des ensembles de la suite. Que dire aussi d'un candidat très bien placé à l'écrit qui pense que tout ouvert dense de $\mathbf{R}$ a pour complémentaire un ensemble de mesure nulle ? Le jury est souvent surpris de constater qu'après un exposé présentant les théorèmes les plus fins de la théorie de la mesure, il n'obtient aucune réponse aux exercices d'application les plus classiques.

– S'il est laissé à l'appréciation des candidats, le choix de la théorie de l'intégration ne doit pas conduire à de fâcheux oublis. Le cas des intégrales impropres est soigneusement évité par exemple dans la leçon 43, ce qui est fâcheux. Les candidats doivent réaliser que la connaissance des théorèmes de Lebesgue n'excuse pas une ignorance sur la nature de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

– D'autre part il faut rester conscient de ce qu'une théorie abstraite de la mesure ne devient une théorie de l'intégration des fonctions d'une variable réelle qu'une fois construite la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$. Signalons, pour terminer, que les exemples de calcul intégral peuvent apparaître pour d'autres sujets que ceux d'intégration proprement dits (51, 27).

– Séries numériques : ici, ainsi qu'à propos des suites numériques il faut d'abord déplorer la grande pauvreté des exemples. Celle-ci est d'ailleurs le complément de la faiblesse des techniques d'études proposées. Curieusement, regroupements des termes, usage des développements limités, comparaison à une intégrale ont semblé moins connus que l'année dernière ! Les candidats pourront utilement réfléchir à des exemples tels que $\dfrac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n}$ (E étant la fonction «partie entière» ; exemple déjà cité en 1975) ;

$1/(1+(-1)^n n^{\alpha})$; $\sin n / (n^{\alpha} + (-1)^n)$...

Faisons remarquer que la validité de la transformation d'un problème de convergence par regroupement des termes est assurée dès que la somme des normes des termes du nième paquet tend vers zéro. L'introduction des familles sommables ne saurait être un moyen de cacher une incompréhension de la commutation des termes d'une série et des difficultés qu'elle soulève.

Série de Taylor : si le jury admet qu'un bon nombre de développements relatifs aux séries entières ou aux fonctions analytiques peuvent être valablement rattachés à ce sujet, il n'en reste pas moins que le cœur du sujet consiste, partant de la série de Taylor d'une fonction $C^\infty f$, en un point, à étudier sa convergence vers f, à illustrer ceci par des exemples mettant en œuvre des variantes de technique (et aboutissant entre autres aux développements usuels), et par des contre-exemples montrant les difficultés possibles (sans que l'évocation du théorème de Borel soit ici indispensable). Les conditions d'analyticité constituent le prolongement naturel des conditions de convergence classiques de la série de Taylor vers la fonction. Elles permettent de comparer la fonction et la somme de la série dans l'ensemble commun de définition. L'étude du problème pour la variable complexe enrichit l'investigation de nouvelles expressions des coefficients, d'un résultat sur le rayon de convergence et de nouveaux moyens pour établir la convergence.

Géométrie différentielle et cinématique : la leçon 60 a été plus rarement choisie que l'année précédente, et traitée en général avec peu de bonheur, plusieurs candidats ayant cru pouvoir utiliser des sources de niveau dépassant leurs connaissances et qu'ils n'ont pas su adapter, allant jusqu'à mélanger, sans s'en rendre compte, le point de vue des sous-variétés avec le point de vue (d'ailleurs marginal dans cette leçon) des variétés abstraites, et omettant de citer un seul exemple non trivial de sous-variété.

Pour les leçons de cinématique et de géométrie des courbes, on doit signaler une fois de plus, que le candidat devrait être amené à s'interroger sur la signification des «passages en polaires», effectués souvent de façon purement formelle, sans avoir été réellement définis, et qui pourtant posent un problème de relèvement (que l'on peut ramener à un énoncé usuel relatif à l'exponentielle complexe, ou encore à une équation différentielle très simple si les données sont C^1).

Le traitement de beaucoup de leçons sur la géométrie des courbes manifeste au début un louable souci de précision dans la distinction entre arcs paramétrés, arcs géométriques, arcs orientés, mais on est surpris de voir ces notions disparaître entièrement de la suite de la leçon et d'ignorer jusqu'au bout quelles propriétés sont invariantes par quels changements de paramètre.

Probabilités : les leçons de calcul des probabilités ont été particulièrement mal traitées cette année, contrairement aux années précédentes. Les titres des leçons étaient pourtant les mêmes, à l'exception d'un titre nouveau : «introduire sur des exemples les bases mathématiques du calcul des probabilités».

Rappelons ce que le jury attend de ces leçons : l'importance croissante du calcul des probabilités et son introduction récente à plusieurs niveaux d'enseignement exigent que tout futur enseignant ait sur ces sujets des connaissances minimales, qui sont celles du programme d'oral. Cependant il est clair que les candidats ayant présenté l'option «probabilités» à l'écrit ont en principe plus approfondi le sujet que les autres candidats (un fait analogue se retrouve pour les leçons de cinématique et d'analyse numérique) et le jury est prêt à entendre des leçons de niveaux différents ; l'essentiel est que les notions introduites, même simples soient bien comprises et puissent être illustrées par des exemples et des exercices. Comme pour les autres sujets, le jury ne peut accepter des leçons constituées d'un déballage d'énoncés et de définitions imprécis, (sinon faux) sans idée directrice, sans motivation, sans exemples et que le candidat se révèle employer des mots qu'il ne comprend pas. Le titre nouveau cité ci-dessus a pour but d'inciter les candidats à réfléchir sur les motivations, sur le développement historique et sur la méthodologie du calcul des probabilités, et sur la façon dont cette science appliquée s'insère dans les mathématiques. On peut aussi bien la concevoir comme une leçon introductive que comme une leçon récapitulative utilisant les résultats théoriques admis (et c'est peut être plus facile ainsi). Elle doit en tout état de cause être constituée d'exemples de construction de modèles probabilistes et d'une critique de ces exemples (penser notamment aux exemples et «paradoxes» historiques).

Exemples : dans les sujets spécifiquement d'exemples le jury attend que la partie théorique soit réduite au ciment minimum permettant la présentation des exemples, de manière à ce que la plus large place possible soit faite à ceux-ci.

Insistons enfin sur le fait que dans toutes les leçons, même celles dont l'intitulé ne comporte pas le mot «exemples», le jury attend une illustration substantielle des définitions et des théorèmes.

2.3. Liste des exposés d'analyse, de mécanique et de probabilités

1) Applications à l'analyse de la notion de compacité.
2) Exemples d'espaces compacts.
3) Espaces homéomorphes. Exemples et contre-exemples.
4) Connexité. Applications.
5) Théorème du point fixe. Applications.
6) Espaces métriques complets, espaces métriques compacts ; comparaison de ces notions.
7) Sous-espaces denses. Illustration par l'approximation des fonctions.
8) Exemples d'applications linéaires continues d'un espace vectoriel normé dans un autre ; normes de telles applications.
9) Espaces vectoriels normés de dimension finie.
10) Géométrie dans un espace vectoriel normé (par exemple, convexité, projecteurs, sous-espaces de dimension ou de codimension finie ; cas des espaces de Hilbert).
11) Exemples d'utilisation de la dénombrabilité en topologie et en analyse.
12) Donner une construction de $\mathbf{R}$; en déduire les principales propriétés de $\mathbf{R}$.
13) Une caractérisation de $\mathbf{R}$ (par certaines de ses propriétés) étant connue, en déduire les autres propriétés fondamentales de $\mathbf{R}$.
14) Topologie de la droite numérique $\mathbf{R}$ et sous-ensembles remarquables de $\mathbf{R}$.
15) Droite numérique achevée. Topologie. Usage des symboles $+\infty$ et $-\infty$.
16) Parties connexes de $\mathbf{R}$ et applications entre de telles parties.
17) Propriétés topologiques de $\mathbf{R}^n$; exemples d'utilisation.
18) Limite d'une fonction numérique d'une variable réelle.
19) Exemples d'étude de suites de nombres réels.
20) Limite, limite inférieure, limite supérieure d'une suite dans $\mathbf{R}$ ou $\overline{\mathbf{R}}$.
21) Approximations d'un nombre réel.
22) Etude sur des exemples simples de suites numériques définies par une relation de récurrence. Cas particulier $u_{n+1} = f(u_n)$.
23) Continuité et dérivabilité de fonctions réelles d'une variable réelle ; exemples, contre-exemples.
24) Fonctions à variation bornée ; cas des fonctions croissantes. Applications.
25) Applications réciproques : théorèmes d'existence ; exemples.
26) Fonctions implicites. Applications.
27) Exemples d'utilisation de changements de variable.
28) Fonctions convexes d'une ou de plusieurs variables réelles.
29) Fonctions convexes d'une variable réelle ; inégalités de convexité.
30) Problèmes de prolongement de fonctions ; exemples.
31) Applications différentiables. Exemples.
32) Fonctions de plusieurs variables réelles : formule des accroissements finis et applications.
33) Différentiabilité d'ordre k des applications d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$; dérivées partielles.
34) Les différentes formules de Taylor.
35) Problèmes d'extremums.
36) Comparaison des fonctions au voisinage d'un point. Développements limités.
37) Applications des développements limités et asymptotiques.
38) Fonction exponentielle complexe. Argument d'un nombre complexe.
39) Exemples de fonctions satisfaisant à une équation fonctionnelle simple.
40) Intégrales des fonctions de variable réelle. Premières propriétés.
41) Intégrales impropres. Convergence et absolue convergence.
42) Problèmes d'interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples.
43) Fonctions définies par une intégrale. Exemples.
44) Recherche des primitives.
45) Calcul des intégrales.
Méthodes de calcul approché.
46) Séries. Convergence et absolue convergence. Sommation par paquets, réindexation.
47) Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries numériques.
48) Continuité, dérivabilité, intégrabilité de la somme d'une série de fonctions d'une variable réelle.
49) Comparaison d'une série et d'une intégrale.
50) Différentes notions de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions. Exemples.
51) Exemples d'utilisation du critère de convergence de Cauchy.

52) Exemples de problèmes d'interversion de limites.
53) Domaine de convergence d'une série entière. Propriétés de la somme d'une telle série.
54) Exemples de développement d'une fonction en série entière.
55) Série de Taylor.
56) Solutions des équations différentielles $y' = f(x, y)$; solutions maximales.
57) Equations différentielles linéaires ; propriétés générales. Exemples.
58) Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants ; cas d'une équation différentielle d'ordre n.
59) Etude détaillée sur un petit nombre d'exemples d'équations différentielles non linéaires ; illustrations géométriques.
60) Sous-variétés différentiables de $\mathbf{R}^2$ et de $\mathbf{R}^3$. Exemples de représentations paramétriques et de représentations implicites.
61) Propriétés affines locales des courbes. Branches infinies. Exemples.
62) Exemples de tracés de courbes $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{f}(t)$.
63) Exemples de tracés de courbes $\rho = f(\theta)$.
64) Rectification des courbes planes ; courbures ; recherches des courbes dont la courbure algébrique est une fonction donnée de l'arc.
65) Courbure et torsion des courbes en géométrie euclidienne de dimension 3. Recherche des courbes dont la courbure et la torsion sont des fonctions données de l'arc.
66) Mouvement à accélération centrale.
67) Champ des vitesses d'un solide. Composition des mouvements.
68) Mouvement d'un repère orthonormé ; applications à la théorie des courbes gauches et à la cinématique du solide.
69) Mouvement d'un plan sur un plan.
70) Méthodes de calcul approché des solutions des équations numériques.
71) Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales.
72) Théorèmes limites fondamentaux en calcul des probabilités.
73) Le jeu de pile ou face (variables de Bernoulli indépendantes).
74) Probabilité conditionnelle. Exemples.
75) Loi binomiale, loi de Poisson.
76) Introduire, sur des exemples, les bases mathématiques du calcul des probabilités.

3. EPREUVE D'ALGEBRE, GEOMETRIE

3.1. Observations générales

L'agrégation est un concours de recrutement pour l'enseignement. Il va de soi que le jury est en droit d'exiger des candidats les qualités pédagogiques les plus élémentaires : parler de manière claire et audible, s'adresser à son auditoire, ne pas rester accroché à ses notes, écrire lisiblement et ne pas systématiquement cacher le tableau... Et, bien entendu, le jury insiste sur l'absolue nécessité de présenter des définitions et énoncés corrects ; faire des mathématiques et les enseigner réclame le plus grand soin et l'honnêteté intellectuelle la plus rigoureuse. Il est indispensable, par exemple, de définir précisément ce qu'est un élément irréductible d'un anneau ; il est inacceptable, pour un futur enseignant de répéter plusieurs fois qu'un corps est un anneau dans lequel tout élément est inversible ou bien d'affirmer que toute suite strictement croissante d'idéaux dans un anneau principal doit être stationnaire.

L'étalage d'un vocabulaire savant peut masquer une méconnaissance réelle des mathématiques élémentaires. Le jury a regretté par exemple que certains candidats :

— énoncent le théorème d'existence d'une clôture algébrique pour un corps quelconque sans connaître la définition de cette expression ;

— énoncent et utilisent des théorèmes généraux concernant les modules de type fini sur les anneaux principaux, mais ne sachent pas découvrir le polynôme minimal d'une matrice de Jordan ;

— énoncent et utilisent le théorème de Zorn dans la théorie de la dimension des espaces vectoriels mais ne connaissent pas de démonstration élémentaire dans le cas de la dimension finie.

Le jury a interrogé systématiquement les candidats sur les notions qu'ils introduisaient : à celui qui démontrait un résultat sur les anneaux noethériens on a demandé un exemple d'anneau non noethérien ; à celui qui démontrait que dans un anneau factoriel tout élément irréductible est premier, on a demandé de décrire la situation dans un exemple d'anneau non factoriel.

D'une manière générale le jury considère qu'une notion mathématique n'est connue et assimilée qu'à la condition qu'elle repose sur des exemples, contre-exemples et applications. Le jury souhaite que ce principe soit appliqué pour toute notion introduite, même si le titre de la leçon n'est pas accompagné du sous-titre «Applications».

Le titre des leçons détermine assez précisément leur contenu en général. Cependant le libre choix de leur niveau fait par le candidat ne doit pas lui permettre d'éviter les difficultés qui peuvent apparaître dans certaines parties du programme. Ceci s'applique par exemple à des leçons comme «Nombres premiers. Applications» ou «Algèbres des polynômes à une indéterminée sur un anneau commutatif».

Le jury a constaté une amélioration générale du niveau des connaissances des candidats. Il souhaite cependant que ces connaissances soient utilisées dans des exemples élémentaires : polynômes à plusieurs variables, anneau $\mathbb{Z}(x)$, groupes finis d'ordre petit, etc.

L'exposé a pour le jury une importance égale à celle du plan :

— Il est indispensable que le candidat ait soigneusement préparé les parties qu'il propose de développer.

— Le candidat ne doit pas proposer des exposés trop faciles.

— Plus encore pour l'exposé le jury souhaite que le candidat ne reste pas rivé à ses notes pour mieux mettre en valeur ses qualités.

— Le candidat doit bien dégager les grandes lignes de son exposé. Il doit justifier ses définitions sans les «parachuter».

En conclusion à ces remarques générales le jury recommande aux candidats la lecture des rapports des années précédentes pour divers autres points : organisation du temps, questions, etc.

3.2. Remarques particulières sur certains sujets choisis par les candidats

- RELATIONS D'EQUIVALENCE... : Plus qu'une liste de définitions le jury attend du candidat des exemples et des applications intéressants : construction du corps des fractions, de certains anneaux, quotients, etc.

- THEORIE DES GROUPES. Le candidat ne doit pas développer de théorie générale s'il ne peut pas l'étayer par des exemples non triviaux : on peut les trouver dans diverses parties du programme traitant par exemple du groupe symétrique ou alterné, du groupe linéaire ou orthogonal ou, plus généralement, des groupes issus de la géométrie. En particulier, le jury souhaite que les candidats connaissent les groupes diédraux, le groupe des quaternions d'ordre 8 et les groupes $\mathcal{A}_4$ et $\mathcal{S}_4$.

- ANNEAUX ET DIVISIBILITE. Le candidat doit se livrer à une étude comparée des anneaux euclidiens, principaux et factoriels. Il ne doit pas perdre de vue que les anneaux nouveaux introduits servent dans d'autres parties des mathématiques : par exemple l'anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$ permet d'étudier les sommes de carrés dans $\mathbb{N}$. Par ailleurs c'est dans ces leçons que le jury a noté le plus de définitions incohérentes ou d'énoncés formellement faux (sur l'irréductibilité par exemple).

- CORPS. Des exemples de corps finis permettent souvent d'illustrer les notions générales du programme.

- POLYNOMES. Les anneaux de polynômes à plusieurs variables ne sont souvent pas cités. Le jury a souvent interrogé le candidat sur les anneaux $\mathbb{Z}[x]$ et $\mathbb{Q}[x]$. A ce sujet, les critères d'irréductibilité sont les bienvenus.

- ALGEBRE LINEAIRE. Le candidat doit savoir calculer le rang d'une matrice par la méthode des bordants. En ce qui concerne la réduction des endomorphismes le candidat doit s'attacher à la détermination des sous-espaces stables (éventuellement de dimension plus grande que 1). Il doit connaître la décomposition de Jordan dans le cas algébriquement clos ainsi que la théorie de la réduction dans le cas des endomorphismes attachés à une forme quadratique.

- FORMES QUADRATIQUES. La méthode de Gauss est souvent présentée de manière incorrecte. Elle n'est pas non plus reliée à la construction effective d'une base orthogonale. La classification des formes quadratiques est aussi souvent mal comprise.

- GEOMETRIE. Beaucoup de candidats ont délaissé ces leçons. Ceci semble correspondre à un manque de préparation en Géométrie qui a en fait desservi les candidats dans les leçons d'Algèbre (par manque d'exemples notamment). Cette situation pourrait amener le jury à proposer aux candidats des couplages formés de deux leçons de géométrie.

3.3. Liste des exposés d'algèbre et de géométrie

1) Relations d'équivalence compatibles avec une structure algébrique. Applications.
2) Groupes finis. Exemples.
3) Groupe symétrique.
4) Sous-groupes distingués. Applications.
5) Groupe opérant sur un ensemble. Applications.
6) Parties génératrices d'un groupe. Exemples.
7) Groupes monogènes.
8) Groupes abéliens finis.
9) Etude d'anneaux quotients sur quelques exemples.
10) Etude de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
11) Idéaux d'un anneau unitaire.
12 Anneaux principaux.
13) Anneaux factoriels.
14) Exemples d'anneaux munis d'une division euclidienne. Applications.
15) Nombres premiers. Applications.
16) Corps : structure et exemples.
17) Racines de l'unité.
18) Factorisation dans l'anneau des polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.
19) Algèbre des polynômes à une indéterminée sur un anneau commutatif.
20) Racines d'un polynôme à une indéterminée sur un corps commutatif. Multiplicité d'une racine.
21) Polynômes symétriques.
22) Anneaux quotients de l'anneau des polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif.
23) Polynômes irréductibles à une indéterminée sur un corps commutatif.
24) Résultant de deux polynômes. Problèmes d'élimination.
25) Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.
26) Dérivation des polynômes.
27) Théorie de la dimension dans les espaces vectoriels. (Cas fini.)
28) Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel. Espaces quotients.
29) Hyperplans d'un espace vectoriel.
30) Rang en algèbre linéaire.
31) Groupe linéaire en dimension finie.
32) Dualité dans les espaces vectoriels.
33) Formes bilinéaires sur les espaces vectoriels de dimension finie.
34) Formes bilinéaires alternées, groupe symplectique (en dimension finie, sur un corps de caractéristique différente de 2).
35) Vecteurs et sous-espaces isotropes relativement à une forme bilinéaire symétrique ou alternée.
36) Formes multilinéaires alternées. Exemples.
37) Déterminants de n vecteurs, d'un endomorphisme, d'une matrice.

38) Applications des déterminants.
39) Equations linéaires.
40) Valeurs propres, sous-espaces propres, en dimension finie.
41) Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme. Applications.
42) Polynôme minimal d'un endomorphisme.
43) Expressions matricielles réduites d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.
44) Expressions matricielles réduites d'un endomorphisme d'un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension finie.
45) Formes quadratiques. Décomposition en carrés. Classification sur $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$.
46) Espaces vectoriels euclidiens (en dimension finie).
47) Groupe orthogonal en dimension finie.
48) Espaces vectoriels hermitiens (en dimension finie).
49) Groupe unitaire (en dimension finie).
50) Dualité dans les espaces vectoriels euclidiens en dimension finie. Adjoint d'un endomorphisme. Réduction d'un endomorphisme symétrique.
51) Dualité dans les espaces vectoriels hermitiens en dimension finie. Adjoint d'un endomorphisme. Réduction d'un endomorphisme auto-adjoint.
52) Produit vectoriel. Applications.
53) Barycentres.
54) Variétés linéaires affines dans un espace affine de dimension finie.
55) Applications affines et groupe affine en dimension finie.
56) Parties convexes d'un espace affine réel. Enveloppe convexe.
57) Symétries orthogonales.
58) Formes réduites des isométries d'un espace affine euclidien de dimension $\leqslant 3$.
59) Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie.
60) Diverses notions d'angles en géométrie métrique. (Dimensions 2 et 3.)
61) Exemples d'isométries d'un espace affine euclidien de dimension $\leqslant 3$, laissant globalement invariante une partie donnée.
62) Exemples de sous-groupes du groupe des isométries d'un espace affine euclidien de dimension 2.
63) Similitudes planes directes et indirectes.
64) Torseurs.
65) Inversion plane. Groupe circulaire.
66) Le cercle en géométrie plane.
67) Utilisation des nombres complexes en géométrie.
68) Droite projective. Homographies, involutions. Cas de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$.
69) Espaces projectifs.
70) Dualité dans les espaces projectifs.
71) Pôles et polaires en géométrie plane.
72) Coniques dans le plan projectif réel ou complexe.
73) Coniques dans le plan affine réel.
74) Coniques dans le plan affine euclidien.
75) Faisceaux linéaires ponctuels de coniques.
76) Quadriques dans l'espace projectif de dimension 3.

4. BIBLIOTHEQUE DE L'AGREGATION

Les candidats étaient autorisés à apporter tout livre imprimé vendu dans le commerce (à l'exclusion des textes dactylographiés ou ronéotypés) et dépourvu de notes manuscrites.

En outre, ils pouvaient consulter sur place les ouvrages suivants :

ARTIN	*Algèbre géométrique* (Gauthier-Villars)
BASS	*Cours de Mathématiques* (Masson) tomes 1 et 2
BERGER et GOSTIAUX	*Géométrie différentielle* (Colin)
BLANCHARD	*Corps non commutatifs* (Presses Universitaires)
BOURBAKI	Les tomes suivants :
	Théorie des ensembles
	Algèbre
	Fonction d'une variable réelle
	Topologie générale
	Espaces vectoriels topologiques
	Intégration
BROUSSE	*Mécanique* (Colin)
CABANNES H.	*Cours de mécanique générale* (Dunod)
CAGNAC	*Cours de mathématiques supérieures* (Masson)
CAGNAC, RAMIS	*Nouveau cours de mathématiques spéciales* (Masson)
et COMMEAU	*Géométrie,* Classes terminales C (Masson)
CAGNAC et THIBERGE	*Arithmétique/Algèbre* — Classes terminales (Masson)
CARTAN	*Fonctions analytiques* (Hermann)
	Formes différentielles (Hermann)
	Calcul différentiel (Hermann)
CASANOVA	*Cours de mathématiques spéciales* (Belin)
CHAMBADAL et OVAERT	*Cours de mathématiques* (Gauthier-Villars)
	(tome 1 — tome 2, analyse (1 seulement))
	Algèbre linéaire et algèbre tensorielle (Dunod)
CHAZEL	*Traité de mathématiques* (Hachette)
CHOQUET	*Cours d'analyse* (Masson)
	L'enseignement de la géométrie (Hermann)
CONDAMINE et VISSIO	*Mathématiques :* Terminales C et T (Delagrave)
COUTY	*Analyse* (Colin)
DIEUDONNE	*Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* (Hermann)
	Sur les groupes classiques (Hermann)
	Calcul infinitésimal (Hermann)
	Eléments d'analyse (Gauthier-Villars) tomes 1 et 2
DIXMIER	*Fondements de l'analyse* (Hermann)
	Analyse MP (Gauthier-Villars)
DONEDDU	*Arithmétique générale* (Dunod)
	Cours de mathématiques spéciales (Dunod)
DUBREIL (M. et Mme)	*Leçons d'algèbre moderne* (Dunod)
DUBUC	*Géométrie plane* (Presses Universitaires)
EXBRAYAT et MAZET	*Algèbre, Analyse, Topologie*
FELLER	*And introduction to probability theory and its applications.*
	Viley tomes 1 et 2
FRENKEL	*Algèbre et Géométrie*
	Géométrie pour l'élève professeur (Hermann)
GODEMENT	*Algèbre* (Hermann)
GOURSAT	*Cours d'analyse* (Gauthier-Villars)
GOUYON	*Précis de Mathématiques spéciales* (Vuibert)
HARDY G.H.	*A course of Pure Mathematics* (Cambridge University Press)
HENNEQUIN et TORTRAT	*Théorie des probabilités et quelques applications* (Masson)
HOCQUENGHEM et JAFFARD	*Mathématiques* (Masson) tomes 1 et 2
KREE	*Introduction aux Mathématiques appliquées* (Dunod)

KRIVINE	*Théorie axiomatique des ensembles* (Presses universitaires)
LANG	*Introduction aux variétés différentiables* (traduction française)
	Algèbre —
	— *Linear Algebra* —
LEFORT	*Mathématiques pour les sciences biologiques et agronomiques* (Colin)
Mme LELONG-FERRAND et ARNAUDIES	*Cours de Mathématiques,* 4 tomes (Dunod)
Mme LELONG-FERRAND	*Géométrie différentielle* (Masson)
MAC-LANE et BIRKHOFF	*Algèbre, Structures fondamentales* (traduction française)
	Les grands théorèmes (traduction française)
MAILLARD	*Classes terminales C* (Hachette)
MALLIAVIN	*Géométrie différentielle intrinsèque* (Hermann)
MARTIN P.	*Géométrie* (Colin)
METIVIER	*Introduction à la théorie des probabilités*
MUTAFIAN	*Le défi algébrique* (Vuibert) tomes 1 et 2
NEVEU J.	*Bases mathématiques du calcul des probabilités* (Masson)
PISOT et ZAMANSKY	*Mathématiques générales* (Dunod)
	Algèbre et Algèbre linéaire (Dunod)
QUEYSANNE	*Algèbre* (Colin)
RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX	*Mathématiques spéciales* (Masson)
	tome 1 : algèbre — tomes 3 et 4 : analyse
RIESZ et NAGY	*Leçons d'analyse fonctionnelle* (Gauthier-Villars)
RUDIN	*Real and complex Analysis* (Mac Grandhill)
SAMUEL	*Théorie algébrique des nombres* (Hermann)
SCHWARTZ	*Cours d'analyse* (Hermann) tomes 1 et 2
SERRE	*Cours d'arithmétique* (Presses universitaires)
VALIRON	*Cours d'analyse* (Masson) tomes 1 et 2
VAUQUOIS	*Les probabilités* (Hermann)
WARUSFEL	*Structures algébriques finies* (Hachette)
ZAMANSKY	*Algèbre et Analyse moderne* (Dunod)
ZISMAN	*Topologie algébrique* (Colin)