oral

1. OBSERVATIONS GENERALES

Les 281 candidats admissibles ont été répartis selon deux sous-jurys, comportant chacun une commission d'algèbre et une commission d'analyse. Une concertation permanente a assuré une remarquable harmonisation de la conception et de l'appréciation des épreuves.

Le tableau suivant indique la répartition des notes (sur 80).

	Abandons	0 à 7	8 à 15	16 à 23	24 à 31	32 à 39
Algèbre	9	1	19	21	44	31
Analyse	11	8	16	39	42	47

	40 à 47	48 à 55	56 à 63	64 à 71	72 à 79
Algèbre	41	52	40	14	9
Analyse	40	34	33	9	2

Il fait apparaître une relative vulnérabilité des candidats à l'épreuve d'analyse (163 notes strictement inférieures à 40 contre 125 en algèbre ; 44 notes supérieures à 56 contre 63 en algèbre).

2. RAPPORT DES COMMISSIONS D'ANALYSE

2.1.— Observations générales

Il faut d'abord signaler avec étonnement le cas des candidats qui soumettent un plan réduit à une demi-douzaine de titres dépourvus de contenu, paraissent surpris lorsqu'on leur demande de proposer des sujets d'exposés, ou indiquent des points dont le développement ne saurait exiger plus d'une minute. N'ont-ils même pas lu la brève notice qui leur a été remise ?

Mis à part ces cas marginaux, la plupart des candidats savent en gros ce que l'on attend d'eux, et une proportion notable semble avoir pris connaissance des conseils contenus dans les précédents rapports, dont on ne saurait trop recommander la lecture. Il semble utile cependant d'insister sur les points qui sont encore le plus souvent très mal compris, et de compléter certaines indications.

Rappelons que le candidat ne doit pas effacer le tableau avant la fin de la présentation de son plan. Un usage judicieux de ce tableau permet d'y faire tenir quantité d'informations ; encore faut-il savoir faire choix d'abréviations cohérentes (mais sans excès), omettre d'écrire tout au long une indication qui va de soi au profit des hypothèses clefs, dont la suppression transforme un énoncé, formulé oralement de façon correcte, en une écriture grossièrement fausse ou fâcheusement ambiguë. Sans vouloir trop s'attarder sur des questions de forme, on ne peut s'empêcher de déplorer que de futurs (ou actuels) enseignants présentent des tableaux indéchiffrables, et de s'étonner qu'ils ignorent systématiquement l'orthographe de mots d'usage mathématique aussi courants que «corollaire», apparemment victimes de l'attraction de quelque corrélat, tandis que les ensembles adjacents revêtent un aspect fâcheusement grinçant.

Bien plus grave encore cependant, mais très souvent corrélées aux précédentes, sont les négligences au niveau logique, dans la formulation même des définitions et des énoncés. Il serait certes pédant et stérile de vouloir à tout prix formaliser et quantifier les énoncés les plus simples, et l'usage courant sous-entend fréquemment certains quantificateurs évidents ; mais des ambiguïtés apparaissent dès que plusieurs quantificateurs sont en jeu, et un énoncé tel que : «pour tout x, $f(x)$ est borné» (pour : «f est borné») est évidemment inacceptable ; tandis qu'un énoncé (d'ailleurs acceptable) tel que «toute fonction réglée sur un intervalle est limite uniforme sur tout compact d'une suite de fonctions en escalier» comporte une ambiguïté qui doit être immédiatement perçue et levée. En règle générale lorsqu'une lettre nouvelle apparaît dans un énoncé le candidat doit savoir s'il s'agit d'une donnée, ou si cette lettre est implicitement précédée d'un quantificateur, et lequel. L'usage de phrases simples permet d'éviter l'abus de quantificateurs explicites. Les candidats devraient également saisir la différence entre «on se donne» et «il existe» : ainsi un espace topologique X n'est pas un ensemble sur lequel **existe** une topologie, mais la donnée d'un couple (X, T) où T est une topologie sur X, autrement dit la **donnée** d'une topologie sur X. Notons enfin que l'expression «il faut» a souvent dans le langage courant une signification presque opposée à celle qu'elle a en mathématiques. Il est donc souhaitable, dans un texte mathématique, de réserver «il faut» à l'expression des conditions nécessaires et de lui préférer «on est amené à»,«il est utile de», «il suffit» **selon les cas** pour les autres usages (ainsi on parlera de l'utilité d'une des hypothèses d'un théorème et non de sa nécessité).

Rappelons qu'outre l'intérêt mathématique des énoncés la valeur d'un plan réside dans la logique de sa construction. Le jury est affligé de constater que certains candidats présentent, sans s'en apercevoir, dès le début de leur plan, un théorème dont la démonstration utilise un résultat figurant dans la troisième partie, (quand ce n'est pas l'énoncé qui fait intervenir une définition posée beaucoup plus loin) ; d'autres encore réduisent à une remarque rejetée à la fin la proposition clef qui devrait commander tout un chapitre.

Le jury a observé que les fautes que nous venons de signaler relèvent rarement d'une simple négligence mais trahissent le plus souvent une incompréhension profonde et grave des mécanismes logiques les plus élémentaires.

Le bon usage des notes, qui doivent servir de fil conducteur et de référence pour des points techniques, a déjà été clairement expliqué, notamment dans le précédent rapport. Quelques candidats, par une interprétation abusive, ont cru à tort qu'on leur refusait le droit d'y jeter le moindre coup d'œil, allant jusqu'à chercher à apprendre par cœur le détail des exemples proposés. Mais beaucoup trop nombreux encore sont ceux qui recopient leurs papiers, lapsus compris, sans sembler penser un seul instant à ce qu'ils écrivent, ni chercher à connaître l'énoncé des théorèmes les plus fondamentaux. Certains poussent la naïveté, croyant ainsi excuser leurs erreurs, jusqu'à invoquer l'ouvrage dans lequel ils ont auparavant recopié leurs notes. Le jury sanctionne de plus en plus sévèrement de tels abus.

Il est non moins déraisonnable de réciter par cœur sans rien comprendre. Un exposé ne se réduit pas à une question de cours, récitée en ânonnant ou avec un débit saccadé, mais doit être repensé et mettre en relief les idées directrices, privilégier la stratégie par rapport à la tactique, souligner le rôle des hypothèses (quand ce n'est pas leur nécessité !) et ne pas escamoter les temps forts de l'argumentation au profit des vérifications mécaniques. La démonstration d'un théorème substantiel ne se réduit ni à une série de calculs triviaux, ni à une suite d'astuces sans portée. Le candidat doit posséder suffisamment les idées maîtresses et la structure de son exposé, pour pouvoir reprendre le fil de ses idées s'il est interrompu par le jury (ce que celui-ci évite de faire le plus possible), ou si le jury demande d'admettre tel ou tel point technique. Il est clair que les candidats qui ne proposent au jury que des exposés de quelques lignes sans portée générale se désavantagent d'eux-mêmes. Ceci vaut également pour ceux qui ne proposent que des exposés trop touffus s'ils se révèlent incapables d'en dégager les lignes générales. Une possibilité est alors d'exposer la structure générale de la démonstration et de détailler quelques points particulièrement intéressants. Enfin les questions que le candidat n'a pas retenues dans sa liste d'exposés ne doivent pas être marquées du sceau de l'ignorance. A tout le moins le jury attend des explications éclairant le sens des énoncés et des indications sur le niveau de difficultés des techniques à utiliser, ainsi, en général que sur leur type.

Quant à la matière du plan, un défaut fréquent dans les leçons médiocres reste la juxtaposition, sans harmonisation et sans adaptation au titre exact de la leçon, de matériaux provenant de sources différentes, dont les niveaux et les points de vue sont disparates : par exemple le point de vue élémentaire des fonctions de plusieurs variables et le point de vue des espaces normés (qui interviennent d'ailleurs bien souvent sous la forme d'espaces normables) ; un autre exemple est cité à propos de la leçon 60.

Par ailleurs, on doit signaler l'extension très alarmante d'un défaut qui prend parfois l'allure d'une technique délibérée et systématique : il s'agit du détournement de sujet. Pour le prétexte le plus ténu, on attire celui-ci dans un terrain préparé à l'avance, où l'on dispose de solides munitions. On a le sentiment qu'à la limite certains candidats possèdent une demi-douzaine de sujets d'exposés parmi lesquels, quelle que soit la leçon qu'ils auront tirée, ils puiseront. Le jury sanctionne sévèrement ces pratiques qui frisent la malhonnêteté et qu'il convient d'enrayer à tout prix, faute de quoi l'on pénaliserait les candidats s'efforçant de traiter leur sujet, alors qu'ils en auraient préféré un autre, mieux préparé.

Pour terminer ces remarques générales, on soulignera une fois de plus la nécessité d'une préparation en profondeur, étalée sur toute l'année. L'expérience montre que des candidats favorablement ou même brillamment classés à l'écrit, ce qui laisse supposer de leur part certaines ressources mathématiques, se montrent incapables de dominer des sujets même très classiques et très élémentaires, lorsqu'ils les ont découverts seulement trois heures auparavant.

2.2. Remarques particulières sur certains sujets

- Applications à l'analyse de la notion de compacité (1), exemples d'espaces compacts : le jury attend dans le cadre du sujet (1), qu'au delà des théorèmes fondamentaux, les candidats présentent quelques applications faisant intervenir, si possible de manière coordonnée ces théorèmes.

- Sur le sujet (2) le jury n'attend bien sûr pas un catalogue de compacts : deux points de vue principaux sont possibles : ou classer les exemples suivant les techniques de démonstration de la compacité, et sur chaque cas montrer l'intérêt de l'exemple par une application (ceci ne doit pas revenir à traiter le sujet (1) ; ou alors présenter à propos des divers énoncés sur les compacts des exemples et des contre-exemples (ainsi : comparaison de la compacité et des diverses compacités séquentielles...).

- Sous-espaces denses, approximation (7) ; espaces vectoriels normés (8, 9 et 10) : les sujets 7 et 8 sont essentiellement des sujets d'exemples ; il est donc inutile de consacrer le plan à la théorie, les propriétés essentielles étant rappelées soit au début, soit lors de leur utilisation. Le sujet 7 vise essentiellement les possibilités d'approximation des fonctions et l'utilisation de ces approximations. De telles techniques sont fondamentales en analyse. Il convient de passer vite sur les espaces topologiques généraux (si l'on juge utile d'en parler...), les espaces métriques et particulièrement les normés fournissant une matière surabondante. A partir des fonctions en escalier, des polynômes, des polynômes trigonométriques, des fonctions à support compact, sans nécessairement aller jusqu'aux fonctions C^∞ à support compact il est possible de donner les exemples courants et les applications correspondantes. Aucun candidat n'a signalé le procédé de troncature qui est pourtant constructif ; par contre l'utilisation de la convolution a été rencontré incidemment dans un exemple proposé par un candidat.

- Le sujet 8 amène à constater que d'une manière générale les candidats manquent de technique pour calculer les normes même dans les cas les plus simples (de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par exemple !). Aucun candidat n'a songé à préciser sur des exemples si la norme est un sup effectivement atteint (on pouvait se reporter par exemple à la dernière partie du problème d'analyse).

– Les indications données dans l'intitulé de la leçon 10 sont suivies mais elles ne sont bien entendu pas limitatives. On peut regretter que l'étude des projections ne soit faite que dans le cas hilbertien général alors que d'autres résultats simples peuvent être obtenus (dans le cas d'espaces normés de dimension finie par exemple). Il est curieux de constater qu'aucun candidat ne signale les propriétés géométriques de la boule (à part la convexité) et n'en étudie la caractérisation. En ce qui concerne le théorème de Hahn-Banach souvent cité, il est normal que dans la leçon 10 figure alors la forme géométrique.

– Sujets sur R et $\mathbf{R}^n$: aussi banal que ce soit, insistons sur le fait qu'il faut savoir quelle définition ou construction de R est prise au départ. La distinction entre les propriétés «topologiques» et «métriques» doit être claire ; ainsi les candidats ont avantage à bien réfléchir aux propriétés de la topologie de l'ordre et aux relations entre propriétés de l'ordre et propriétés de la topologie. Le jury s'étonne à propos de $\mathbf{R}^n$ de constater que le point de vue de la topologie produit, fondamental au départ, soit souvent escamoté, parfois totalement oublié. Enfin, à propos du caractère complet il est indispensable de s'interroger sur le type d'équivalence des métriques le concernant (sans pour autant parler de structure uniforme, ce qu'aucun candidat ne fait, sauf par lapsus ; le jury ne pose d'ailleurs de question à ce sujet que si le point de vue soutenu le suppose ou l'impose).

– Sujets d'intégration : cette année a vu la réapparition des leçons d'intégration qui avaient été provisoirement exclues du programme d'oral. Les candidats, qui ne devaient pas l'ignorer, ont cependant paru souvent pris au dépourvu : il n'est pas raisonnable, si on dispose d'une faible culture mathématique, de renoncer à présenter les mécanismes de la recherche des primitives (44) pour se lancer dans un sujet abstrait de topologie générale.

– En ce qui concerne l'intégration, le jury n'impose nullement l'organisation de la leçon ni l'utilisation d'une théorie en particulier. En revanche, la cohérence et la solidité des connaissances au niveau choisi sont attendues. Il n'est pas acceptable de prétendre exposer une théorie abstraite de la mesure et d'annoncer sans sourciller que la mesure de l'intersection d'une suite décroissante d'ensembles mesurables est la borne inférieure dans $\mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$ des mesures des ensembles de la suite. Que dire aussi d'un candidat très bien placé à l'écrit qui pense que tout ouvert dense de R a pour complémentaire un ensemble de mesure nulle ? Le jury est souvent surpris de constater qu'après un exposé présentant les théorèmes les plus fins de la théorie de la mesure, il n'obtient aucune réponse aux exercices d'application les plus classiques.

– S'il est laissé à l'appréciation des candidats, le choix de la théorie de l'intégration ne doit pas conduire à de fâcheux oublis. Le cas des intégrales impropres est soigneusement évité par exemple dans la leçon 43, ce qui est fâcheux. Les candidats doivent réaliser que la connaissance des théorèmes de Lebesgue n'excuse pas une ignorance sur la nature de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

– D'autre part il faut rester conscient de ce qu'une théorie abstraite de la mesure ne devient une théorie de l'intégration des fonctions d'une variable réelle qu'une fois construite la mesure de Lebesgue sur R. Signalons, pour terminer, que les exemples de calcul intégral peuvent apparaître pour d'autres sujets que ceux d'intégration proprement dits (51, 27).

– Séries numériques : ici, ainsi qu'à propos des suites numériques il faut d'abord déplorer la grande pauvreté des exemples. Celle-ci est d'ailleurs le complément de la faiblesse des techniques d'études proposées. Curieusement, regroupements des termes, usage des développements limités, comparaison à une intégrale ont semblé moins connus que l'année dernière ! Les candidats pourront utilement réfléchir à des exemples tels que $\dfrac{(-1)^{\mathrm{E}(\sqrt{n})}}{n}$ (E étant la fonction «partie entière» ; exemple déjà cité en 1975) ;

$1/(1 + (-1)^n n^{\alpha})$; $\sin n / (n^{\alpha} + (-1)^n)$...

Faisons remarquer que la validité de la transformation d'un problème de convergence par regroupement des termes est assurée dès que la somme des normes des termes du nième paquet tend vers zéro. L'introduction des familles sommables ne saurait être un moyen de cacher une incompréhension de la commutation des termes d'une série et des difficultés qu'elle soulève.

Série de Taylor : si le jury admet qu'un bon nombre de développements relatifs aux séries entières ou aux fonctions analytiques peuvent être valablement rattachés à ce sujet, il n'en reste pas moins que le cœur du sujet consiste, partant de la série de Taylor d'une fonction $C^{\infty} f$, en un point, à étudier sa convergence vers f, à illustrer ceci par des exemples mettant en œuvre des variantes de technique (et aboutissant entre autres aux développements usuels), et par des contre-exemples montrant les difficultés possibles (sans que l'évocation du théorème de Borel soit ici indispensable). Les conditions d'analyticité constituent le prolongement naturel des conditions de convergence classiques de la série de Taylor vers la fonction. Elles permettent de comparer la fonction et la somme de la série dans l'ensemble commun de définition. L'étude du problème pour la variable complexe enrichit l'investigation de nouvelles expressions des coefficients, d'un résultat sur le rayon de convergence et de nouveaux moyens pour établir la convergence.

Géométrie différentielle et cinématique : la leçon 60 a été plus rarement choisie que l'année précédente, et traitée en général avec peu de bonheur, plusieurs candidats ayant cru pouvoir utiliser des sources de niveau dépassant leurs connaissances et qu'ils n'ont pas su adapter, allant jusqu'à mélanger, sans s'en rendre compte, le point de vue des sous-variétés avec le point de vue (d'ailleurs marginal dans cette leçon) des variétés abstraites, et omettant de citer un seul exemple non trivial de sous-variété.

Pour les leçons de cinématique et de géométrie des courbes, on doit signaler une fois de plus, que le candidat devrait être amené à s'interroger sur la signification des «passages en polaires», effectués souvent de façon purement formelle, sans avoir été réellement définis, et qui pourtant posent un problème de relèvement (que l'on peut ramener à un énoncé usuel relatif à l'exponentielle complexe, ou encore à une équation différentielle très simple si les données sont C^{1}).

Le traitement de beaucoup de leçons sur la géométrie des courbes manifeste au début un louable souci de précision dans la distinction entre arcs paramétrés, arcs géométriques, arcs orientés, mais on est surpris de voir ces notions disparaître entièrement de la suite de la leçon et d'ignorer jusqu'au bout quelles propriétés sont invariantes par quels changements de paramètre.

Probabilités : les leçons de calcul des probabilités ont été particulièrement mal traitées cette année, contrairement aux années précédentes. Les titres des leçons étaient pourtant les mêmes, à l'exception d'un titre nouveau : «introduire sur des exemples les bases mathématiques du calcul des probabilités».

Rappelons ce que le jury attend de ces leçons : l'importance croissante du calcul des probabilités et son introduction récente à plusieurs niveaux d'enseignement exigent que tout futur enseignant ait sur ces sujets des connaissances minimales, qui sont celles du programme d'oral. Cependant il est clair que les candidats ayant présenté l'option «probabilités» à l'écrit ont en principe plus approfondi le sujet que les autres candidats (un fait analogue se retrouve pour les leçons de cinématique et d'analyse numérique) et le jury est prêt à entendre des leçons de niveaux différents ; l'essentiel est que les notions introduites, même simples soient bien comprises et puissent être illustrées par des exemples et des exercices. Comme pour les autres sujets, le jury ne peut accepter des leçons constituées d'un déballage d'énoncés et de définitions imprécis, (sinon faux) sans idée directrice, sans motivation, sans exemples et que le candidat se révèle employer des mots qu'il ne comprend pas. Le titre nouveau cité ci-dessus a pour but d'inciter les candidats à réfléchir sur les motivations, sur le développement historique et sur la méthodologie du calcul des probabilités, et sur la façon dont cette science appliquée s'insère dans les mathématiques. On peut aussi bien la concevoir comme une leçon introductive que comme une leçon récapitulative utilisant les résultats théoriques admis (et c'est peut être plus facile ainsi). Elle doit en tout état de cause être constituée d'exemples de construction de modèles probabilistes et d'une critique de ces exemples (penser notamment aux exemples et «paradoxes» historiques).

Exemples : dans les sujets spécifiquement d'exemples le jury attend que la partie théorique soit réduite au ciment minimum permettant la présentation des exemples, de manière à ce que la plus large place possible soit faite à ceux-ci.

Insistons enfin sur le fait que dans toutes les leçons, même celles dont l'intitulé ne comporte pas le mot «exemples», le jury attend une illustration substantielle des définitions et des théorèmes.

2.3. Liste des exposés d'analyse, de mécanique et de probabilités

1) Applications à l'analyse de la notion de compacité.
2) Exemples d'espaces compacts.
3) Espaces homéomorphes. Exemples et contre-exemples.
4) Connexité. Applications.
5) Théorème du point fixe. Applications.
6) Espaces métriques complets, espaces métriques compacts ; comparaison de ces notions.
7) Sous-espaces denses. Illustration par l'approximation des fonctions.
8) Exemples d'applications linéaires continues d'un espace vectoriel normé dans un autre ; normes de telles applications.
9) Espaces vectoriels normés de dimension finie.
10) Géométrie dans un espace vectoriel normé (par exemple, convexité, projecteurs, sous-espaces de dimension ou de codimension finie ; cas des espaces de Hilbert).
11) Exemples d'utilisation de la dénombrabilité en topologie et en analyse.
12) Donner une construction de $\mathbf{R}$; en déduire les principales propriétés de $\mathbf{R}$.
13) Une caractérisation de $\mathbf{R}$ (par certaines de ses propriétés) étant connue, en déduire les autres propriétés fondamentales de $\mathbf{R}$.
14) Topologie de la droite numérique $\mathbf{R}$ et sous-ensembles remarquables de $\mathbf{R}$.
15) Droite numérique achevée. Topologie. Usage des symboles $+\infty$ et $-\infty$.
16) Parties connexes de $\mathbf{R}$ et applications entre de telles parties.
17) Propriétés topologiques de $\mathbf{R}^n$; exemples d'utilisation.
18) Limite d'une fonction numérique d'une variable réelle.
19) Exemples d'étude de suites de nombres réels.
20) Limite, limite inférieure, limite supérieure d'une suite dans $\mathbf{R}$ ou $\overline{\mathbf{R}}$.
21) Approximations d'un nombre réel.
22) Etude sur des exemples simples de suites numériques définies par une relation de récurrence. Cas particulier $u_{n+1} = f(u_n)$.
23) Continuité et dérivabilité de fonctions réelles d'une variable réelle ; exemples, contre-exemples.
24) Fonctions à variation bornée ; cas des fonctions croissantes. Applications.
25) Applications réciproques : théorèmes d'existence ; exemples.
26) Fonctions implicites. Applications.
27) Exemples d'utilisation de changements de variable.
28) Fonctions convexes d'une ou de plusieurs variables réelles.
29) Fonctions convexes d'une variable réelle ; inégalités de convexité.
30) Problèmes de prolongement de fonctions ; exemples.
31) Applications différentiables. Exemples.
32) Fonctions de plusieurs variables réelles : formule des accroissements finis et applications.
33) Différentiabilité d'ordre k des applications d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$; dérivées partielles.
34) Les différentes formules de Taylor.
35) Problèmes d'extremums.
36) Comparaison des fonctions au voisinage d'un point. Développements limités.
37) Applications des développements limités et asymptotiques.
38) Fonction exponentielle complexe. Argument d'un nombre complexe.
39) Exemples de fonctions satisfaisant à une équation fonctionnelle simple.
40) Intégrales des fonctions de variable réelle. Premières propriétés.
41) Intégrales impropres. Convergence et absolue convergence.
42) Problèmes d'interversion d'une limite et d'une intégrale. Exemples.
43) Fonctions définies par une intégrale. Exemples.
44) Recherche des primitives.
45) Calcul des intégrales.
    Méthodes de calcul approché.
46) Séries. Convergence et absolue convergence. Sommation par paquets, réindexation.
47) Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries numériques.
48) Continuité, dérivabilité, intégrabilité de la somme d'une série de fonctions d'une variable réelle.
49) Comparaison d'une série et d'une intégrale.
50) Différentes notions de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions. Exemples.
51) Exemples d'utilisation du critère de convergence de Cauchy.

52) Exemples de problèmes d'interversion de limites.
53) Domaine de convergence d'une série entière. Propriétés de la somme d'une telle série.
54) Exemples de développement d'une fonction en série entière.
55) Série de Taylor.
56) Solutions des équations différentielles $y' = f(x, y)$; solutions maximales.
57) Equations différentielles linéaires ; propriétés générales. Exemples.
58) Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants ; cas d'une équation différentielle d'ordre n.
59) Etude détaillée sur un petit nombre d'exemples d'équations différentielles non linéaires ; illustrations géométriques.
60) Sous-variétés différentiables de $\mathbf{R}^2$ et de $\mathbf{R}^3$. Exemples de représentations paramétriques et de représentations implicites.
61) Propriétés affines locales des courbes. Branches infinies. Exemples.
62) Exemples de tracés de courbes $\vec{OM} = \vec{f}(t)$.
63) Exemples de tracés de courbes $\rho = f(\theta)$.
64) Rectification des courbes planes ; courbures ; recherches des courbes dont la courbure algébrique est une fonction donnée de l'arc.
65) Courbure et torsion des courbes en géométrie euclidienne de dimension 3. Recherche des courbes dont la courbure et la torsion sont des fonctions données de l'arc.
66) Mouvement à accélération centrale.
67) Champ des vitesses d'un solide. Composition des mouvements.
68) Mouvement d'un repère orthonormé ; applications à la théorie des courbes gauches et à la cinématique du solide.
69) Mouvement d'un plan sur un plan.
70) Méthodes de calcul approché des solutions des équations numériques.
71) Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales.
72) Théorèmes limites fondamentaux en calcul des probabilités.
73) Le jeu de pile ou face (variables de Bernoulli indépendantes).
74) Probabilité conditionnelle. Exemples.
75) Loi binomiale, loi de Poisson.
76) Introduire, sur des exemples, les bases mathématiques du calcul des probabilités.

3. EPREUVE D'ALGEBRE, GEOMETRIE

3.1. Observations générales

L'agrégation est un concours de recrutement pour l'enseignement. Il va de soi que le jury est en droit d'exiger des candidats les qualités pédagogiques les plus élémentaires : parler de manière claire et audible, s'adresser à son auditoire, ne pas rester accroché à ses notes, écrire lisiblement et ne pas systématiquement cacher le tableau... Et, bien entendu, le jury insiste sur l'absolue nécessité de présenter des définitions et énoncés corrects ; faire des mathématiques et les enseigner réclame le plus grand soin et l'honnêteté intellectuelle la plus rigoureuse. Il est indispensable, par exemple, de définir précisément ce qu'est un élément irréductible d'un anneau ; il est inacceptable, pour un futur enseignant de répéter plusieurs fois qu'un corps est un anneau dans lequel tout élément est inversible ou bien d'affirmer que toute suite strictement croissante d'idéaux dans un anneau principal doit être stationnaire.

L'étalage d'un vocabulaire savant peut masquer une méconnaissance réelle des mathématiques élémentaires. Le jury a regretté par exemple que certains candidats :

— énoncent le théorème d'existence d'une clôture algébrique pour un corps quelconque sans connaître la définition de cette expression ;

— énoncent et utilisent des théorèmes généraux concernant les modules de type fini sur les anneaux principaux, mais ne sachent pas découvrir le polynôme minimal d'une matrice de Jordan ;

— énoncent et utilisent le théorème de Zorn dans la théorie de la dimension des espaces vectoriels mais ne connaissent pas de démonstration élémentaire dans le cas de la dimension finie.

Le jury a interrogé systématiquement les candidats sur les notions qu'ils introduisaient : à celui qui démontrait un résultat sur les anneaux noethériens on a demandé un exemple d'anneau non noethérien ; à celui qui démontrait que dans un anneau factoriel tout élément irréductible est premier, on a demandé de décrire la situation dans un exemple d'anneau non factoriel.

D'une manière générale le jury considère qu'une notion mathématique n'est connue et assimilée qu'à la condition qu'elle repose sur des exemples, contre-exemples et applications. Le jury souhaite que ce principe soit appliqué pour toute notion introduite, même si le titre de la leçon n'est pas accompagné du sous-titre «Applications».

Le titre des leçons détermine assez précisément leur contenu en général. Cependant le libre choix de leur niveau fait par le candidat ne doit pas lui permettre d'éviter les difficultés qui peuvent apparaître dans certaines parties du programme. Ceci s'applique par exemple à des leçons comme «Nombres premiers. Applications» ou «Algèbres des polynômes à une indéterminée sur un anneau commutatif».

Le jury a constaté une amélioration générale du niveau des connaissances des candidats. Il souhaite cependant que ces connaissances soient utilisées dans des exemples élémentaires : polynômes à plusieurs variables, anneau $\mathbb{Z}(x)$, groupes finis d'ordre petit, etc.

L'exposé a pour le jury une importance égale à celle du plan :

— Il est indispensable que le candidat ait soigneusement préparé les parties qu'il propose de développer.

— Le candidat ne doit pas proposer des exposés trop faciles.

— Plus encore pour l'exposé le jury souhaite que le candidat ne reste pas rivé à ses notes pour mieux mettre en valeur ses qualités.

— Le candidat doit bien dégager les grandes lignes de son exposé. Il doit justifier ses définitions sans les «parachuter».

En conclusion à ces remarques générales le jury recommande aux candidats la lecture des rapports des années précédentes pour divers autres points : organisation du temps, questions, etc.

3.2. Remarques particulières sur certains sujets choisis par les candidats

- RELATIONS D'EQUIVALENCE... : Plus qu'une liste de définitions le jury attend du candidat des exemples et des applications intéressants : construction du corps des fractions, de certains anneaux, quotients, etc.

- THEORIE DES GROUPES. Le candidat ne doit pas développer de théorie générale s'il ne peut pas l'étayer par des exemples non triviaux : on peut les trouver dans diverses parties du programme traitant par exemple du groupe symétrique ou alterné, du groupe linéaire ou orthogonal ou, plus généralement, des groupes issus de la géométrie. En particulier, le jury souhaite que les candidats connaissent les groupes diédraux, le groupe des quaternions d'ordre 8 et les groupes $\mathcal{A}_4$ et $\mathcal{S}_4$.

- ANNEAUX ET DIVISIBILITE. Le candidat doit se livrer à une étude comparée des anneaux euclidiens, principaux et factoriels. Il ne doit pas perdre de vue que les anneaux nouveaux introduits servent dans d'autres parties des mathématiques : par exemple l'anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$ permet d'étudier les sommes de carrés dans $\mathbb{N}$. Par ailleurs c'est dans ces leçons que le jury a noté le plus de définitions incohérentes ou d'énoncés formellement faux (sur l'irréductibilité par exemple).

- CORPS. Des exemples de corps finis permettent souvent d'illustrer les notions générales du programme.

- POLYNOMES. Les anneaux de polynômes à plusieurs variables ne sont souvent pas cités. Le jury a souvent interrogé le candidat sur les anneaux $\mathbb{Z}[x]$ et $\mathbb{Q}[x]$. A ce sujet, les critères d'irréductibilité sont les bienvenus.

- ALGEBRE LINEAIRE. Le candidat doit savoir calculer le rang d'une matrice par la méthode des bordants. En ce qui concerne la réduction des endomorphismes le candidat doit s'attacher à la détermination des sous-espaces stables (éventuellement de dimension plus grande que 1). Il doit connaître la décomposition de Jordan dans le cas algébriquement clos ainsi que la théorie de la réduction dans le cas des endomorphismes attachés à une forme quadratique.

- FORMES QUADRATIQUES. La méthode de Gauss est souvent présentée de manière incorrecte. Elle n'est pas non plus reliée à la construction effective d'une base orthogonale. La classification des formes quadratiques est aussi souvent mal comprise.

- GEOMETRIE. Beaucoup de candidats ont délaissé ces leçons. Ceci semble correspondre à un manque de préparation en Géométrie qui a en fait desservi les candidats dans les leçons d'Algèbre (par manque d'exemples notamment). Cette situation pourrait amener le jury à proposer aux candidats des couplages formés de deux leçons de géométrie.

3.3. Liste des exposés d'algèbre et de géométrie

1) Relations d'équivalence compatibles avec une structure algébrique. Applications.
2) Groupes finis. Exemples.
3) Groupe symétrique.
4) Sous-groupes distingués. Applications.
5) Groupe opérant sur un ensemble. Applications.
6) Parties génératrices d'un groupe. Exemples.
7) Groupes monogènes.
8) Groupes abéliens finis.
9) Etude d'anneaux quotients sur quelques exemples.
10) Etude de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
11) Idéaux d'un anneau unitaire.
12 Anneaux principaux.
13) Anneaux factoriels.
14) Exemples d'anneaux munis d'une division euclidienne. Applications.
15) Nombres premiers. Applications.
16) Corps : structure et exemples.
17) Racines de l'unité.
18) Factorisation dans l'anneau des polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.
19) Algèbre des polynômes à une indéterminée sur un anneau commutatif.
20) Racines d'un polynôme à une indéterminée sur un corps commutatif. Multiplicité d'une racine.
21) Polynômes symétriques.
22) Anneaux quotients de l'anneau des polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif.
23) Polynômes irréductibles à une indéterminée sur un corps commutatif.
24) Résultant de deux polynômes. Problèmes d'élimination.
25) Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.
26) Dérivation des polynômes.
27) Théorie de la dimension dans les espaces vectoriels. (Cas fini.)
28) Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel. Espaces quotients.
29) Hyperplans d'un espace vectoriel.
30) Rang en algèbre linéaire.
31) Groupe linéaire en dimension finie.
32) Dualité dans les espaces vectoriels.
33) Formes bilinéaires sur les espaces vectoriels de dimension finie.
34) Formes bilinéaires alternées, groupe symplectique (en dimension finie, sur un corps de caractéristique différente de 2).
35) Vecteurs et sous-espaces isotropes relativement à une forme bilinéaire symétrique ou alternée.
36) Formes multilinéaires alternées. Exemples.
37) Déterminants de n vecteurs, d'un endomorphisme, d'une matrice.

38) Applications des déterminants.
39) Equations linéaires.
40) Valeurs propres, sous-espaces propres, en dimension finie.
41) Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme. Applications.
42) Polynôme minimal d'un endomorphisme.
43) Expressions matricielles réduites d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.
44) Expressions matricielles réduites d'un endomorphisme d'un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension finie.
45) Formes quadratiques. Décomposition en carrés. Classification sur $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$.
46) Espaces vectoriels euclidiens (en dimension finie).
47) Groupe orthogonal en dimension finie.
48) Espaces vectoriels hermitiens (en dimension finie).
49) Groupe unitaire (en dimension finie).
50) Dualité dans les espaces vectoriels euclidiens en dimension finie. Adjoint d'un endomorphisme. Réduction d'un endomorphisme symétrique.
51) Dualité dans les espaces vectoriels hermitiens en dimension finie. Adjoint d'un endomorphisme. Réduction d'un endomorphisme auto-adjoint.
52) Produit vectoriel. Applications.
53) Barycentres.
54) Variétés linéaires affines dans un espace affine de dimension finie.
55) Applications affines et groupe affine en dimension finie.
56) Parties convexes d'un espace affine réel. Enveloppe convexe.
57) Symétries orthogonales.
58) Formes réduites des isométries d'un espace affine euclidien de dimension $\leqslant 3$.
59) Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie.
60) Diverses notions d'angles en géométrie métrique. (Dimensions 2 et 3.)
61) Exemples d'isométries d'un espace affine euclidien de dimension $\leqslant 3$, laissant globalement invariante une partie donnée.
62) Exemples de sous-groupes du groupe des isométries d'un espace affine euclidien de dimension 2.
63) Similitudes planes directes et indirectes.
64) Torseurs.
65) Inversion plane. Groupe circulaire.
66) Le cercle en géométrie plane.
67) Utilisation des nombres complexes en géométrie.
68) Droite projective. Homographies, involutions. Cas de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$.
69) Espaces projectifs.
70) Dualité dans les espaces projectifs.
71) Pôles et polaires en géométrie plane.
72) Coniques dans le plan projectif réel ou complexe.
73) Coniques dans le plan affine réel.
74) Coniques dans le plan affine euclidien.
75) Faisceaux linéaires ponctuels de coniques.
76) Quadriques dans l'espace projectif de dimension 3.

4. BIBLIOTHEQUE DE L'AGREGATION

Les candidats étaient autorisés à apporter tout livre imprimé vendu dans le commerce (à l'exclusion des textes dactylographiés ou ronéotypés) et dépourvu de notes manuscrites.

En outre, ils pouvaient consulter sur place les ouvrages suivants :

ARTIN	*Algèbre géométrique* (Gauthier-Villars)
BASS	*Cours de Mathématiques* (Masson) tomes 1 et 2
BERGER et GOSTIAUX	*Géométrie différentielle* (Colin)
BLANCHARD	*Corps non commutatifs* (Presses Universitaires)
BOURBAKI	Les tomes suivants : *Théorie des ensembles* *Algèbre* *Fonction d'une variable réelle* *Topologie générale* *Espaces vectoriels topologiques* *Intégration*
BROUSSE	*Mécanique* (Colin)
CABANNES H.	*Cours de mécanique générale* (Dunod)
CAGNAC	*Cours de mathématiques supérieures* (Masson)
CAGNAC, RAMIS	*Nouveau cours de mathématiques spéciales* (Masson)
et COMMEAU	*Géométrie,* Classes terminales C (Masson)
CAGNAC et THIBERGE	*Arithmétique/Algèbre* — Classes terminales (Masson)
CARTAN	*Fonctions analytiques* (Hermann) *Formes différentielles* (Hermann) *Calcul différentiel* (Hermann)
CASANOVA	*Cours de mathématiques spéciales* (Belin)
CHAMBADAL et OVAERT	*Cours de mathématiques* (Gauthier-Villars) (tome 1 — tome 2, analyse (1 seulement)) *Algèbre linéaire et algèbre tensorielle* (Dunod)
CHAZEL	*Traité de mathématiques* (Hachette)
CHOQUET	*Cours d'analyse* (Masson) *L'enseignement de la géométrie* (Hermann)
CONDAMINE et VISSIO	*Mathématiques :* Terminales C et T (Delagrave)
COUTY	*Analyse* (Colin)
DIEUDONNE	*Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* (Hermann) *Sur les groupes classiques* (Hermann) *Calcul infinitésimal* (Hermann) *Eléments d'analyse* (Gauthier-Villars) tomes 1 et 2
DIXMIER	*Fondements de l'analyse* (Hermann) *Analyse MP* (Gauthier-Villars)
DONEDDU	*Arithmétique générale* (Dunod) *Cours de mathématiques spéciales* (Dunod)
DUBREIL (M. et Mme)	*Leçons d'algèbre moderne* (Dunod)
DUBUC	*Géométrie plane* (Presses Universitaires)
EXBRAYAT et MAZET	*Algèbre, Analyse, Topologie*
FELLER	*And introduction to probability theory and its applications.* Viley tomes 1 et 2
FRENKEL	*Algèbre et Géométrie* *Géométrie pour l'élève professeur* (Hermann)
GODEMENT	*Algèbre* (Hermann)
GOURSAT	*Cours d'analyse* (Gauthier-Villars)
GOUYON	*Précis de Mathématiques spéciales* (Vuibert)
HARDY G.H.	*A course of Pure Mathematics* (Cambridge University Press)
HENNEQUIN et TORTRAT	*Théorie des probabilités et quelques applications* (Masson)
HOCQUENGHEM et JAFFARD	*Mathématiques* (Masson) tomes 1 et 2
KREE	*Introduction aux Mathématiques appliquées* (Dunod)

KRIVINE — *Théorie axiomatique des ensembles* (Presses universitaires)
LANG — *Introduction aux variétés différentiables* (traduction française)
Algèbre —
— Linear Algebra —
LEFORT — *Mathématiques pour les sciences biologiques et agronomiques* (Colin)
Mme LELONG-FERRAND et ARNAUDIES — *Cours de Mathématiques,* 4 tomes (Dunod)
Mme LELONG-FERRAND — *Géométrie différentielle* (Masson)
MAC-LANE et BIRKHOFF — *Algèbre, Structures fondamentales* (traduction française)
Les grands théorèmes (traduction française)
MAILLARD — *Classes terminales C* (Hachette)
MALLIAVIN — *Géométrie différentielle intrinsèque* (Hermann)
MARTIN P. — *Géométrie* (Colin)
METIVIER — *Introduction à la théorie des probabilités*
MUTAFIAN — *Le défi algébrique* (Vuibert) tomes 1 et 2
NEVEU J. — *Bases mathématiques du calcul des probabilités* (Masson)
PISOT et ZAMANSKY — *Mathématiques générales* (Dunod)
Algèbre et Algèbre linéaire (Dunod)
QUEYSANNE — *Algèbre* (Colin)
RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX — *Mathématiques spéciales* (Masson)
tome 1 : algèbre — tomes 3 et 4 : analyse
RIESZ et NAGY — *Leçons d'analyse fonctionnelle* (Gauthier-Villars)
RUDIN — *Real and complex Analysis* (Mac Grandhill)
SAMUEL — *Théorie algébrique des nombres* (Hermann)
SCHWARTZ — *Cours d'analyse* (Hermann) tomes 1 et 2
SERRE — *Cours d'arithmétique* (Presses universitaires)
VALIRON — *Cours d'analyse* (Masson) tomes 1 et 2
VAUQUOIS — *Les probabilités* (Hermann)
WARUSFEL — *Structures algébriques finies* (Hachette)
ZAMANSKY — *Algèbre et Analyse moderne* (Dunod)
ZISMAN — *Topologie algébrique* (Colin)