PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Sujet (durée : 6 heures)

On s'efforcera de désigner les variables aléatoires par des lettres majuscules et les valeurs qu'elles prennent par des lettres minuscules.

DÉFINITIONS, NOTATIONS ET RAPPELS

1° Dans tout le problème $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\overline{\mathbb{R}}_+$ l'ensemble $[0, \infty]$. Ces deux derniers ensembles sont munis de leur tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ respectivement. (On rappelle que la tribu borélienne sur un espace topologique est la tribu engendrée par les ouverts de cette topologie.)

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'espace vectoriel (pour les opérations usuelles) de toutes les suites de nombres réels :

$$x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \text{si} \quad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{est une suite où } x_n \in \mathbb{R} \text{ pour tout } n .$$

$\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$ désigne le sous-espace vectoriel des suites telles que $x_n = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est muni de la topologie produit usuelle qu'on peut définir de la façon suivante : soit $\Phi(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ de cardinal fini ; si $J \in \Phi(\mathbb{N})$ on désigne par Π_J la projection canonique de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^J$ définie par :

$$x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightsquigarrow \Pi_J(x) = x_J = (x_j)_{j \in J} .$$

Une base d'ouverts de la topologie dont on munit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est alors constituée par les cylindres ouverts c'est-à-dire les ensembles de la forme $\Pi_I^{-1}(O_I)$ où I décrit $\Phi(\mathbb{N})$ et O_I la famille des ouverts de $\mathbb{R}^I$.

On notera $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ correspondant à cette topologie. On rappelle que $\mathcal{B}$ est la plus petite tribu rendant mesurables les applications Π_J ($J \in \Phi(\mathbb{N})$) quand chaque $\mathbb{R}^J$ est muni de sa tribu borélienne.

2° Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, une variable aléatoire X (en abrégé v. a.) sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sera appelée variable aléatoire réelle (en abrégé v. a. r.). Une v. a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ sera appelée v. a. positive. Le symbole E(X) désigne, quand elle existe, l'espérance mathématique de X relativement à la probabilité P.

Toute suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de v. a. r. sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ définit une v. a. X à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$. Réciproquement une v. a. X sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ définit une suite de v. a. r. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ par les relations : $X_n = \Pi_{\{n\}} X$ où $\{n\}$ désigne la partie de $\mathbb{N}$ réduite à l'entier n. Les v. a. r. X_n seront appelées les coordonnées de X. On identifiera ainsi les notions de suite de v. a. r. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et de v. a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$.

On rappelle que la loi P_X d'une v. a. X à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$, c'est-à-dire la mesure image de P par X, est uniquement déterminée par ses valeurs sur les cylindres $\Pi_I^{-1}(O_I)$ où O_I est un borélien de $\mathbb{R}^I$.

On dira qu'une v. a. X à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ est une v. a. gaussienne centrée si $\forall J \in \Phi(\mathbb{N})$, X_J est un vecteur gaussien centré. On conviendra qu'une v. a. constante est gaussienne.

Une v. a. X est dite suite de Bernoulli si la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses coordonnées est une suite de v. a. r. indépendantes de même loi de Bernoulli donnée par $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \dfrac{1}{2}$.

PARTIE I

1° Vérifier que l'application $(x, y) \rightsquigarrow (x + y)$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est mesurable relativement à $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$.

Soient X et Y deux v. a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ et indépendantes, soient P_X, P_Y et P_{X+Y} les lois respectives de X, Y et X + Y, soit f une fonction mesurable de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ démontrer que :

$$E\, f(X + Y) = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} E\, f(X + y)\, P_Y(dy) = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} E\, f(x + Y)\, P_X(dx)$$

Énoncer un résultat analogue si f n'est pas positive.

2° Démontrer que les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ appartiennent à la tribu $\mathcal{B}$: $\mathbb{R}_0^{\mathbb{N}}$, l^∞ (espace des suites bornées), l^c (espace des suites convergentes dans $\mathbb{R}$).

3° Soit α la fonction de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ définie par :

$$x \rightsquigarrow \alpha(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=0}^{n} x_j \right| \quad \text{où} \quad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}\,;$$ démontrer que α est borélienne.

Soit β la fonction de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ définie par :

$$x \rightsquigarrow \beta(x) = \begin{cases} \left| \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n \right| & \text{si la série } \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n \text{ est convergente dans } \mathbb{R}\,; \\ \infty & \text{si cette série diverge;} \end{cases}$$

démontrer que β est borélienne.

PARTIE II

Les résultats de cette partie ne seront pas utilisés dans la suite

1° Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et V un vecteur gaussien sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, soit μ sa loi et Λ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mu(\Lambda) = 0$ ou $\mu(\Lambda) = 1$.

2° Soit $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une v. a. gaussienne centrée sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$.

Soit k un entier fixé. Pour tout n de $\mathbb{N}$ on désigne par $Z_n^k = E[X_n \mid X_0, \ldots, X_k]$ une version de l'espérance conditionnelle de X_n par rapport à la tribu engendrée par le vecteur $(X_0, \ldots, X_k)$. On posera

$$Y_n^k = X_n - Z_n^k\,; \quad Y^k = (Y_n^k)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad Z^k = (Z_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$$

Démontrer que Y^k est indépendante du vecteur $(X_0, \ldots, X_k)$ et que pour tout n il existe des réels $A_{n,j}^k$ tels que $Z_n^k = \sum\limits_{j=0}^{k} A_{n,j}^k X_j$. A quelle condition ces coefficients sont-ils uniques pour tout n ?

3° Soit $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $T(y) = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^{k+1}\,; \left(y_n + \sum\limits_{j=r}^{k} A_{n,j}^k \theta_j \right)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty \right\}$

Comparer les ensembles $\{ Z^k \in l^\infty \}$ et $\{ (X_0, \ldots, X_k) \in T(0) \}$.

En déduire que $P\{ Z^k \in l^\infty \} = 0$ ou $P\{ Z^k \in l^\infty \} = 1$.

4° Si $T(0)^c$ désigne le complémentaire de $T(0)$, vérifier que pour tout y de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble $T(y) \cap T(0)^c$ rencontre en au plus un point toute droite de R^{k+1}. En déduire que $T(y) \cap T(0)^c$ est négligeable pour la loi de tout vecteur gaussien centré sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{k+1}$.

5° On suppose que $P\{Z^k \in l^\infty\} = 0$; démontrer que $P\{X \in l^\infty\} = 0$.

6° On suppose que $P\{Z^k \in l^\infty\} = 1$; on pose $B_k = \{Y^k \in l^\infty\}$ et $B = \{X \in l^\infty\}$. On désigne par $B \Delta B_k$ l'ensemble $[B \cap B_k^c] \cup [B_k \cap B^c]$; démontrer que $P(B \Delta B_k) = 0$.

En déduire que si $P\{Z^p \in l^\infty\} = 1 \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad P(B) = 0$ ou $P(B) = 1$.

7° Donner un exemple simple de v. a. gaussienne X dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $P\{X \in l^\infty\} = 1$. Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v. a. r. indépendantes, gaussiennes et centrées et X la v. a. gaussienne correspondante dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\sum_{n \in \mathbb{N}} E(X_n^2) < \infty$. Démontrer que $P\{X \in l^\infty\} = 1$.

8° Soit $\tilde{X} = (\tilde{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ (notée du).

Démontrer que $P_{\tilde{X}}\{l^\infty\} = 0$. Quelle est la probabilité $P\{\sup_n X_n < 0\}$?

PARTIE III

Une v. a. $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ est dite symétrique si les v. a. X et $-X$ ont même loi. Elle est dite strictement symétrique si pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\{(-1), (+1)\}^{\mathbb{N}}$ les v. a. X et $\varepsilon X = (\varepsilon_n X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont même loi.

1° Donner un exemple simple de v. a. symétrique qui n'est pas strictement symétrique.

2° Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v. a. r. indépendantes et X la v. a. correspondante dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, montrer que X est strictement symétrique si et seulement si elle est symétrique.

3° Soit $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une v. a. de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et W une v. a. strictement symétrique sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ et indépendante de X. Démontrer que la v. a. $Z = (X_n W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement symétrique.

4° Soit $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une v. a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ et $B = (B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une v. a. de Bernoulli définie sur le même espace et indépendante de X. On suppose X strictement symétrique. Démontrer que les v. a. X, $BX = (B_n X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $B|X| = (B_n |X_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ ont même loi.

5° Soit X une v. a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ et de loi P_X. Soient X' et X'' deux v. a. indépendantes à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ et de même loi P_X. Démontrer que $Y = X' - X''$ est symétrique. On appelle symétrisée de X toute v. a. obtenue par ce procédé. Démontrer que toutes les symétrisées de X ont même loi.

6° On suppose X symétrique ; soit $\tilde{X}$ une symétrisée de X ; $\tilde{X}$ a-t-elle même loi que X ?

7° Soit X une v. a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$, Y une symétrisée de X. Soit W une v. a. strictement symétrique sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ indépendante de X. Soit Z la v. a. définie à la question 3°. Z et Y ont-elles même loi?

8° Soit X une v. a. r. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dont la loi est une loi de Poisson de paramètre λ. Soit Y une symétrisée de X, quelle est la loi de Y ? Déterminer sa fonction caractéristique $t \rightsquigarrow \varphi(t) = E(e^{itX})$.

9° Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$ n nombres réels et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n réels positifs, soit $\psi_n(t)$ la fonction $t \rightsquigarrow \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\cos u_i t - 1}{a_i}\right)$; montrer que ψ_n est la fonction caractéristique d'une v. a. Y_n.

10° Soit r un réel tel que $0 < r < 2$. Soit $I(t) = \int_0^\infty \frac{1 - \cos ut}{u^{1+r}}\, du$ et $\psi(t) = \exp[-I(t)]$.

En utilisant le fait que $I(t)$ est limite de « sommes de Riemann » montrer que $\psi(t)$ est la fonction caractéristique d'une v. a. r. Y ; expliquer comment Y s'obtient à partir de v. a. de Poisson.

PARTIE IV

Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et k un entier, on désignera par H_k l'application de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans lui-même définie par $H_k(x) = (x_0, x_1, \ldots, x_k, 0, 0 \ldots)$.

Soient X une v. a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$, q une application mesurable de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ et n un entier. On posera $U_n = q(H_k(x))$, $M_n = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant n} U_j$ et $M = \sup\limits_n M_n = \sup\limits_p U_p$.

Soit t un réel $0 \leqslant t < \infty$ et $T_t(\omega) = \inf(j \in \mathbb{N}, U_j > t)$ (on conviendra que $\inf \varnothing = +\infty$).

La fonction q est dite quasi convexe si pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: $q\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \max[q(x), q(y)]$.

Dans toute la suite q désignera une fonction borélienne quasi convexe.

1° Pour tout couple d'entiers (j, n) $0 \leqslant j \leqslant n$ on pose :

$$Z_{n,j} = (X_0, X_1, \ldots X_j, -X_{j+1}, -X_{j+2}, \ldots, -X_n, 0, 0, \ldots) ;$$

démontrer que pour tout $t \geqslant 0$

$$P\{T_t = j\} \leqslant P\{T_t = j ; U_n > t\} + P\{T_t = j ; q(Z_{n,j}) > t\}.$$

2° On suppose désormais X strictement symétrique.

Comparer $P\{T_t = j\}$ et $2P\{T_t = j ; U_n > t\}$; démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$P\{M_n > t\} \leqslant 2P\{U_n > t\}$, en déduire que $P\{M > t\} \leqslant 2 \liminf\limits_n P\{U_n > t\}$.

3° Soit $\varphi : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction croissante, continue à gauche. Soit ν la mesure sur $(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ définie par $\nu[s, t[= \varphi(t) - \varphi(s)$ si $0 \leqslant s \leqslant t$ (on convient que $\infty - \infty = 0$).

a. Soit Y une v. a. r. positive sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ démontrer que

$E[\varphi(Y)] = \varphi(0) + \int_{[0,\infty]} P[Y > t]\, d\nu(t)$; que devient cette formule si φ est continue?

b. φ n'étant plus supposée continue démontrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad E[\varphi(M_n)] \leqslant 2\,E[\varphi(U_n)] \quad \text{et que}$$
$$E[\varphi(M)] \leqslant 2 \liminf_n E[\varphi(U_n)].$$

4° Démontrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

a. $E[\varphi(M)] < \infty$

b. $\sup_n E[\varphi(U_n)] < \infty$

5° On dit qu'une suite $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de v. a. r. est bornée en probabilités si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \exists\, A \in \,]0\ \infty[\ : \qquad \forall\, n \qquad P\{|V_n| > A\} \leqslant \varepsilon.$$

Démontrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

a. La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée en probabilités.

b. $M < \infty$ presque sûrement.

6° On suppose que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une v. a. U. On sait qu'alors, pour tout ouvert O de $\overline{R}_+$: $P\{U \in O\} \leqslant \liminf_n P\{U_n \in O\}$. Démontrer que pour tout $t \in [0, \infty[$: $P\{U > t\} \leqslant P\{M > t\} \leqslant 2\,P\{U \geqslant t\}$; en supposant φ continue, comparer $E[\varphi(U)]$, $E[\varphi(M)]$ et $2\,E[\varphi(U)]$.

7° Soit $S_n = X_0 + X_{1+} \ldots + X_n$. Démontrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

a. $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée en probabilités.

b. $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée presque sûrement (c'est-à-dire $\sup_n |S_n| < \infty$ presque sûrement).

Démontrer également celle des deux suivantes :

a'. $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente en probabilités.

b'. $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement.

8° Soit $r \in \,]0\ \infty[$, démontrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

a. $\sup_n E[|S_n|^r] < \infty$

b. $E[\sup_n |S_n|^r] < \infty$

PARTIE V

Cette partie est indépendante de la partie IV *et fait suite aux questions* 8° *et* 9° *de la* partie III.

Soit r un réel tel que $0 < r < 2$, $I(t) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1 - \cos ut}{u^{1+r}}\, du$ et $\Psi(t) = \exp[-I(t)]$

1° Soit $s > 0$, comparer les fonctions $t \rightsquigarrow I(t)$ et $t \rightsquigarrow I(st)$

Démontrer que $t \rightsquigarrow \exp[-|t|^r]$ est une fonction caractéristique.

On appelle v. a. r. r-stable toute v. a. r. dont la fonction caractéristique est $\exp(-|t|^r)$.

2° Soit $r_1 \in]0,2[$ un réel et X une v. a. r. Comparer les quantités $E[|X|^{r_1}]$ et $\int_0^{\infty} [1 - \mathcal{R}e\, \Psi_X(t)] \frac{dt}{t^{r_1+1}}$ où $\mathcal{R}e\, \Psi_X(t)$ désigne la partie réelle de la fonction caractéristique Ψ_X de X.

Si X est r-stable en déduire toutes les valeurs de r_1 telles que $E[|X|^{r_1}] < \infty$.

3° Soit X r-stable, démontrer que sa loi admet une densité f_r par rapport à la mesure de Lebesgue et que f_r est indéfiniment dérivable.

4° Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v. a. r. r-stables indépendantes, soit $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} x_k X_k$.

Donner une condition nécessaire et suffisante relativement à x pour que Σ_n converge en loi.

5° Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v. a. r. indépendantes positives; démontrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

a. $\sum_n Y_n < \infty$ presque sûrement.

b. $\sum_n P\{Y_n \geqslant 1\} < \infty$ et $\sum_n \int_{\{Y_n \leqslant 1\}} Y_n \, dP < \infty$.

6° Soit X_n une suite de v. a. r. indépendantes r-stables et x un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Démontrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

a. $\sum_n |x_n X_n|^r < \infty$ presque sûrement.

b. $\sum_n |x_n|^r \left(1 + \operatorname{Log} \frac{1}{|x_n|}\right) < \infty$.

On pourra utiliser le fait que $\int_{|u| \geqslant t} f_r(x)\, dx$ est équivalent à $\frac{1}{t^r}$ quand t tend vers $+\infty$.

RAPPORT SUR L'EPREUVE DE PROBABILITES ET STATISTIQUES

1.— Thème du sujet

L'objet du problème était un "pot-pourri" sur le thème : toute suite de variables aléatoires réelles définit une variable aléatoire à valeurs dans l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites de nombres réels. Il était composé de telle façon que sa résolution impliquait la connaissance de différentes parties du programme: théorie générale de la mesure ; vecteurs aléatoires gaussiens, fonctions caractéristiques, séries de variables aléatoires indépendantes ...

2.— Observations générales

Les correcteurs qui avaient participé aux jurys des années précédentes ont constaté une amélioration des connaissances des candidats (c'est la preuve que ceux-ci ont lu leurs rapports). A peu près tous savent qu'il existe des variables aléatoires qui ne sont pas discrètes ou absolument continues et ils maîtrisent le concept de loi d'une variable aléatoire. Toutefois il reste encore un effort à faire ... Trop souvent on a pu lire des affirmations du genre "Deux variables aléatoires réelles X et Y ont même loi si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$ les probabilités $P\{X = x\}$ et $P\{Y = x\}$ sont égales" (horresco referens).

Et certaines lacunes apparues à l'occasion de la manipulation des vecteurs gaussiens sont inquiétantes (voir plus loin).

Que dire enfin des candidats qui ne savent même pas ce qu'est une loi de Poisson et la confondent avec une loi exponentielle ?

3.— Résultats généraux

847 candidats ont composé (en 1977, il y en avait 837)

Répartition des notes (y compris les copies blanches) par classes d'amplitude 5

0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	25 à 30	30 à 35	35 à 40
146	266	87	95	96	74	58	23	2

4.– Observations détaillées sur le problème

Partie I

Cette partie était très facile et aurait dû être traitée entièrement (et correctement) par tout candidat. Néanmoins trop peu ont vraiment démontré que l'application "somme" de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est mesurable (relativement aux tribus spécifiées dans le texte) : pour démontrer que la continuité impliquait la mesurabilité, il fallait démontrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est identique à la tribu produit (ce qui n'est pas vrai pour un espace topologique quelconque).

Pour démontrer que le sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites convergentes dans $\mathbb{R}$ est un borélien de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la meilleure méthode est peut être d'utiliser la condition de Cauchy, comme beaucoup l'ont vu. Ceux qui ont utilisé les notions de limites supérieure et inférieure ont très souvent omis un détail : l'ensemble des suites $x = (x_n)_n$ telles que $\limsup x_n = \liminf x_n$ est l'ensemble des suites convergeant dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Partie II

Elle était consacrée à la démonstration d'un cas très particulier de la célèbre-loi de type "zéro-un" pour les v.a. gaussiennes vectorielles. La méthode choisie n'était pas la plus directe, mais elle permettait de tester les connaissances des candidats dans le domaine des vecteurs gaussiens de dimension finie et de la "prévision linéaire" des vecteurs gaussiens. Le découpage avait été fait de telle façon que chaque question était devenue facile. Beaucoup de candidats n'ont pas abordé cette partie et ont préféré la sauter, ce qui prouve leur ignorance totale des vecteurs gaussiens. Mais chez nombre de ceux qui se sont attachés à résoudre cette partie, on a constaté de grosses erreurs que les futurs candidats devraient s'efforcer d'éviter. Par exemple :

- un vecteur est gaussien si toutes ses composantes sont gaussiennes
- tout vecteur gaussien de dimension n a une loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$

- Des v.a. réelles linéairement indépendantes sont stochastiquement indépendantes.

Peu savent que si les deux composants d'un vecteur gaussien centré sont orthogonales, elles sont indépendantes ; beaucoup ignorent tout de l'espérance conditionnelle d'un vecteur gaussien étant données certaines de ses composantes ; et nombre de ceux qui savent qu'on peut l'obtenir par une projection orthogonale ne savent pas au juste sur quel sous-espace projeter.

Partie III

Cette partie introduisait les notions de symétrie et de symétrie stricte pour les suites de variables aléatoires réelles. Une bonne partie était constituée de "gymnastique" sur ces notions : avec le théorème de Fubini (et un peu de jugeotte) on pouvait en faire facilement une bonne portion. Si de plus on savait la définition d'une loi de Poisson on pouvait traiter rapidement les neuf premières questions. Si certaines questions étaient ouvertes (i.e. la conclusion n'était pas indiquée) c'était dans l'intention de juger des capacités des candidats à réfléchir, mais certainement pas pour leur permettre d'affirmer sans démonstration des résultats (au demeurant faux !), comme certains l'ont fait.

La dixième question, la moins facile, a été rarement traitée de manière satisfaisante : on omet de vérifier que l'intégrale I (t) est finie, qu'elle définit une fonction continue (pour pouvoir appliquer le théorème de continuité de Paul Lévy).

Partie IV

Il est bien connu que, pour les séries de variables aléatoires réelles, indépendantes, la convergence en probabilité équivaut à la convergence presque sûre. Il est peut-être moins connu, mais encore vrai, que ce résultat subsiste pour les v.a. strictement symétriques. Cette partie était consacrée à la démonstration de généralisation de ce résultat, et de ce résultat lui-même comme cas particulier.

Reconnaissons une erreur typographique : il fallait lire dans la ligne (4) : "$U_n = q\ (H_n\ (X))$" au lieu de $U_n = q\,(H_k\ (x))$. Mais cette erreur était tellement évidente qu'elle n'a gêné aucun candidat ayant abordé cette partie, tous ayant signalé la rectification à apporter au texte.

La question (1) était absolument immédiate ; dans la question (2) peu de candidats ont démontré de manière satisfaisante que

$$P\left\{T_t = j\ ;\ U_n > t\right\} = P\left\{T_t = j\ ;\ q(Z_{n,j}) > t\right\}$$

La première partie de la question (3) était la démonstration d'un résultat préliminaire utile par la suite (formule d'intégration par parties généralisée) et n'avait rien à voir avec ce qui précédait ; elle a été réussie par ceux qui l'ont abordée. Ensuite tout devenait très facile (ce qui ne signifie que cela a été réussi) jusqu'à la question (7), deuxième partie. Dans l'ensemble, beaucoup de candidats ont "grappillé" de ci, de là mais peu l'ont traitée entièrement.

Partie V

Cette partie était constituée par l'application des résultats précédents aux variables aléatoires stables symétriques d'ordre r ($0 < r < 2$), ainsi qu'aux suites r-stables.

Peu de candidats l'ont abordée, malgré la facilité des questions (1) à (4). Les questions (5) et (6) ont été traitées (de manière à peu près satisfaisante) par moins d'une dizaine de candidats.

5.— Résumé de la solution

Partie I

(1) Le plus simple est de démontrer que la tribu borélienne (pour la topologie produit) sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est identique au produit des tribus boréliennes sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, puisque l'application $(x, y) \rightsquigarrow x + y$ est continue. Il suffit pour cela de démontrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ appartient à la tribu produit. Or, grâce au fait que la topologie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ satisfait au second axiome de dénombrabilité (i.e possède une base dénombrable d'ouverts), tout ouvert U est réunion <u>dénombrable</u> d'ouverts de la forme A x B (A et B ouverts dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$). Mais les ensembles de cette dernière forme appartiennent à la tribu produit ; donc U aussi.

Le reste est une simple transcription des théorèmes de Tonelli et Fubini.

(2) Soit E_k le sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites $x = (x_n)$ nulles à partir de k ($k \in \mathbb{N}$). Chaque E_k est <u>fermé</u>, donc $\mathbb{R}_o^{\mathbb{N}} = \bigcup_k E_k$ est un borélien.

- $$\ell^\infty = \bigcup_{M \in \mathbb{N}} \bigcap_n \{x ; |x_n| \leqslant M\}$$; donc ℓ^∞

est un borélien car c'est une réunion dénombrable de fermés.

- Une suite est convergente dans $\mathbb{R}$ si et seulement si elle satisfait à la condition de Cauchy usuelle, donc

$$\ell^c = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n'=n+1}^{\infty} \{x ; |x_n - x_{n'}| \leqslant \frac{1}{m}\}$$

On pouvait également remarquer que

$$\ell^c = \{x ; \limsup x_n = \liminf x_n\} \cap \{x ; \limsup x_n \in \mathbb{R}\}$$

(3) Le fait que α soit borélienne est absolument trivial. Pour démontrer que β est borélienne, il faut démontrer que l'ensemble des séries convergentes (dans $\mathbb{R}$) est un borélien. Or cet ensemble n'est autre que :

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n'=n+1}^{\infty} \{ x \; ; \; |x_n + x_{n+1} + \dots x_{n'}| \leq \frac{1}{m} \}$$

Partie II

(1) V étant gaussien, le support de μ est une variété affine. Si cette variété est de dimension zéro (auquel cas V est un vecteur "presque certain") le résultat est trivial. Sinon, désignons par L le support de μ ; alors la restriction de μ à L est équivalente à la mesure de Lebesgue sur L et $\mu\ (\Lambda) = \mu\ (\Lambda \cap L)$. On désignera par μ_L la restriction de μ à L . On a :

$$\mu\ (\Lambda) = \mu_L\ (\Lambda \cap L).$$

D'autre part, ou bien $\Lambda \cap L = L$ (auquel cas $\mu_L\ (\Lambda \cap L) = 1$, donc $\mu\ (\Lambda) = 1$), ou bien $\Lambda \cap L$ est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue sur L et dans ce cas $\mu_L\ (\Lambda \cap L) = 0$, donc $\mu\ (\Lambda) = 0$

(2) Le vecteur $(X_o, X_1, \dots X_k , Y_o^k , Y_1^k , Y_2^k , \dots)$ est également un vecteur gaussien centré. En outre pour tout $i = 0, 1, \dots k$ et tout $j \in \mathbb{N}$ on a $\mathbb{E}\ \{X_i \cdot Y_j^k\} = 0$. Donc le vecteur $(X_o, X_1, \dots X_k)$ est indépendant de tout vecteur de la forme $\pi_J\ (Y^k)$ $(J \in \Phi\ (\mathbb{N}))$. En définitive $(X_o, X_1, \dots X_k)$ est indépendant de Y^k.

On en déduit alors que pour tout k les vecteurs Z^k et Y^k à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont aussi indépendants.

(Remarquons que la rédaction de la question (2) n'est pas un modèle à imiter par le candidat : il lui est demandé d'étayer ce qui est simplement affirmé ici, ce qui nécessite naturellement la connaissance précise des résultats classiques sur les vecteurs gaussiens de dimension finie : espérance conditionnelle, lien entre indépendance et orthogonalité, etc ...)

Dans le cours de la démonstration esquissée ci-dessus, on a déjà remarqué que Z_n^k est une combinaison linéaire des $(X_o, X_1, \dots X_k)$, donc

$$Z_n^k = \sum_{j=0}^{k} A_{n,j}^k \; X_j \; .$$

On a unicité des $A_{n,j}^k$ pour tout n si et seulement si les $X_o, X_1 \dots X_k$ sont des variables aléatoires linéairement indépendantes (ce qui ne signifie pas qu'elles sont stochastiquement indépendantes !)

(3) on a les égalités d'ensembles suivants :

$$\{Z^k \in \ell^\infty\} = \{(\sum_{j=0}^{k} A_{n,j}^k \; X_j)_n \in \ell^\infty\} = \{(X_o, X_1 \dots X_k) \in T\,(o)\} \; .$$

T (o) étant évidemment un sous-espace de $\mathbb{R}^{k+1}$ on a :

$$P\,\{Z^k \in \ell^\infty\} = 0 \quad \text{ou} \quad P\,\{Z^k \in \ell^\infty\} = 1$$

(4) On a pour tout $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$\{\,\omega\,;\, y + Z^k\,(\omega) \;\in\; \ell^\infty\,\} = \{\,\omega\,;\, (y_n + \sum_{j=0}^{k} A_{n,j}^k \; X_j(\omega))_n \;\in\; \ell^\infty\,\}$$

$$= \{\,\omega\,;\, (X_o(\omega),\, X_1(\omega),\, \dots\, X_k(\omega)) \in T\,(y)\}$$

Soit donc $\Theta \in T\,(y) \cap T\,(o)^c$ c'est-à-dire :

$$(\sum_{j=0}^{k} A_{n,j}^k \; \Theta_j)_n \notin \ell^\infty \qquad \text{et} \qquad (y_n + \sum_{j=0}^{k} A_{n,j}^k \; \Theta_j)_n \in \ell^\infty$$

Soit en outre ρ un réel, distinct de 1. Si l'on avait $\rho\,\Theta \in T\,(y) \cap T\,(o)^c$ on aurait :

$$(y_n + \rho \, \sum_{j=0}^{k} A_{n,j}^k \; \Theta_j)_n \in \ell^\infty \text{ ; ou encore :}$$

$$((\rho-1) \sum_{j=0}^{k} A_{n,j}^k \; \Theta_j)_n \in \ell^\infty$$; or ceci est absurde d'après l'hypothèse.

Naturellement l'élément zéro de $\mathbb{R}^{k+1}$ n'appartient pas à $T\,(y) \cap T\,(o)^c$, donc la mesure de $T\,(y) \cap T\,(o)^c$ relativement à la mesure de Dirac δ (o), sur

$\mathbb{R}^{k+1}$ est nulle. On peut donc supposer que la loi gaussienne centrée sur $\mathbb{R}^{k+1}$ n'est pas égale à δ (o) et on la désignera par μ. Soit L le support de μ : L est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{k+1}$. Une partie de $\mathbb{R}^{k+1}$ rencontrant toute droite issue de zéro en au plus un point est de mesure nulle pour la mesure sur $\mathbb{R}^{k+1}$ image par l'injection canonique $L \to \mathbb{R}^{k+1}$ de la mesure de Lebesgue sur L ; donc elle est également de mesure nulle pour μ .

(5) On a $X = Y^k + Z^k$ et d'après ce que l'on a vu plus haut les variables aléatoires Y^k et Z^k à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont indépendantes. Alors :

$$P\{X \in \ell^\infty\} = P\{Y^k + Z^k \in \ell^\infty\} = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} P\{y + Z^k \in \ell^\infty\} P_{Y^k}(dy)$$

$$= \int_{y \in \ell^\infty} P\{y + Z^k \in \ell^\infty\} P_{Y^k}(dy) + \int_{y \notin \ell^\infty} P\{y + Z^k \in \ell^\infty\} P_{Y^k}(dy).$$

Or si $y \in \ell^\infty$ $\{y + Z^k \in \ell^\infty\} = \{Z^k \in \ell^\infty\}$, donc la première intégrale est nulle. Par contre si $y \notin \ell^\infty$, om a :

$$P\{y + Z^k \in \ell^\infty\} \subset \{Z^k \notin \ell^\infty\} \quad \text{et :}$$

$$P\{y + Z^k \in \ell^\infty\} = P\{y + Z^k \in \ell^\infty\ ,\ Z^k \notin \ell^\infty\}$$

$$= P\{(X_o, \ldots, X_k) \in T(y) \cap T(o)^c\} = 0 ;$$

donc la seconde intégrale est également nulle.

(6) On a $B \,\Delta\, B_k \subset \{Z^k \notin \ell^\infty\}$; donc $P(B \,\Delta\, B_k) = 0$. Si maintenant l'on suppose que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $P\{Z^k \in \ell^\infty\} = 1$ alors l'évènement B est indépendant de Z^p. En effet B_p est évidemment indépendant de Z^p, donc B qui lui est "presque égal" est aussi indépendant de Z^p. B est par conséquent indépendant dans chaque Z^p, donc de la plus petite tribu rendant mesurables les Z_p.

Cela étant, p étant fixé on a $\sigma(Z^p) = \sigma(X_o, \ldots X_p)$. En définitive B est indépendant de la tribu rendant mesurables les variables aléatoires r (X_n), donc indépendant de lui-même.

Remarque : on a, bien évidemment, la dichotomie suivante :

- $\exists$ k tel que $P\{Z^k \in \ell^\infty\} = 0$
- $\forall$ k, $P\{Z^k \in \ell^\infty\} = 1$

(puisque en effet $P\{Z^k \in \ell^\infty\}$ ne peut prendre que les valeurs zéro ou un). Dans le premier cas $P\{X \in \ell^\infty\} = 0$ (question (3)) et dans le second cas $P\{X \in \ell^\infty\} = 0$ ou 1. Donc on a démontré que si X est un vecteur à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gaussien centré $P\{X \in \ell^\infty\} = 0$ ou $P\{X \in \ell^\infty\} = 1$.

Partie III

(1) Si X est une v.a. r gaussienne centrée, non dégénérée, la v.a. (X, X, o, o, o, ...) est symétrique sans être strictement symétrique.

(3) Remarquons les deux faits suivants

- Si (X_n) est strictement symétrique, pour tout $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la v.a. $a X = (a_n X_n)$ est strictement symétrique
- (X_n) est strictement symétrique si et seulement si pour toute $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longmapsto [0, \infty]$ borélienne on a l'égalité :

$$\mathbb{E}\{f(X)\} = \mathbb{E}\{f(\varepsilon X)\} \qquad \forall \varepsilon \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$$

Soit alors W strictement symétrique et $\varepsilon_o \in \{-1 ; +1\}^{\mathbb{N}}$; on a :

$$\mathbb{E}\{f(\varepsilon_o W X|\} = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \mathbb{E}\{f(\varepsilon_o x W)\} P_X(dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \mathbb{E}\{f(x W)\} P_X(dx) = \mathbb{P}\{f(W X)\}.$$

(4) $$\mathbb{E}\{f(BX)\} = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \mathbb{E}\{f(bX)\} \, d P_B(b)$$

$$= \int_{\{-1, +1\}^{\mathbb{N}}} \mathbb{E}\{f(bX)\} \, d P_B(b) = \mathbb{E}\{f(X)\}.$$

Donc BX et X sont isonomes. D'autre part

$$\mathbb{E}\{f(B|X|\} = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \mathbb{E}\{f(B|x|\} \, d P_X(x).$$

Soit alors $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et soit $\varepsilon \in \{-1, +1\}^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n = \varepsilon_n x_n$ pour tout n (ε n'est pas déterminé de manière unique !).

On a :

$$\mathbb{E}\ \{f\ (B\ |x|)\ = \mathbb{E}\ \{f\ (\varepsilon\ B\ x)\} = \mathbb{E}\ \{f\ (Bx)\}$$

D'où l'on déduit immédiatement

$$\mathbb{E}\ \{f\ (B\ |X|)\} = \mathbb{E}\ \{f\ (B\ X)\}\ .$$

(6) La réponse est non : si X_1 est une v.a. réelle de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, sa symétrisée $\tilde{X}_1$ a pour loi $\mathcal{N}(0, \sqrt{2})$. On en déduit qu'une symétrisée de $X = (X_1, 0, 0, \ldots)$ n'est pas isonome à X.

(9) Soient pour i = 1, 2 ... n , n v.a. r, $X_1, X_2 \ldots X_n$ obéissant à des lois de Poisson de paramètres respectifs $\frac{1}{2\ a_1}$; $\frac{1}{2\ a_2}$, ... $\frac{1}{2\ a_n}$; et soit $Y_1, Y_2 \ldots Y_n$ leurs symétrisées. Supposons les Y_i indépendantes (ce qui est toujours possible). Alors ψ_n est la f.c de la v.a. r $\sum_{i=1}^{n} u_i\ Y_i$.

(10) $t \rightsquigarrow I\ (t)$ donc $t \rightsquigarrow \exp\ (-\ I\ (t))$ est <u>continue</u>. Par ailleurs pour tout t , I (t) est limite de sommes de Riemann de la forme $\sum \frac{1 - \cos u_i\ t}{u_i^{1+r}}$.

Donc exp (- I (t)) est une f.c d'après la question (9) et la théorème de continuité de Paul Lévy. Toute v.a. Y dont ψ est la fonction caractéristique est limite en loi de symétrisées indépendantes de lois de Poisson.

Partie IV

(1) On a $H_j\ (X) = \frac{1}{2}\ [H_n\ (X) + Z_{n,j}]$

Donc $U_j = q\ (H_j\ (X)) \leqslant \max\ [q\ (H_n\ (X))\ ,\ q\ (Z_{n,j})]$

et $\{U_j > t\} \subset \{U_n > t\} \cup \{q\ (Z_{n,j}) > t\}$. En définitive :

$$\{T_t = j\} = \{T_t = j\ ,\ U_j > t\} \subset \{T_t = j\ ,\ U_n > t\} \quad \{T_t = j\ ;\ q\ (Z_{n,j}) > t\}$$

(2) Si X est strictement symétrique, les v.a. H_n (X) et $Z_{n,j}$ sont isonomes. Par ailleurs je dis que $P\{T_t = j\ ;\ U_n > t\} = P\{T_t = j\ ;\ q\ (Z_{n,j}) > t\}$. En effet l'évènement $\{T_t = j\}$ ne dépend que de X_1, X_2 ... X_j et d'autre part les deux v.a. suivantes à valeurs dans $\mathbb{R}^j \times \mathbb{R}^n$ sont isonomes :

$\omega \rightsquigarrow (X_1(\omega),\ X_2(\omega),\ \dots\ X_j(\omega),\ X_1(\omega),\ X_2(\omega),\ \dots\ X_n(\omega))$; et

$\omega \rightsquigarrow (X_1(\omega),\ X_2(\omega)\ ,\ X_j(\omega),\ X_j(\omega),\ \dots\ X_j(\omega),\ -\ X_{j+1}(\omega)\ ;\ \dots\ -\ X_n(\omega))$

ce qui démontre le résultat annoncé.

On en déduit que pour tout $j \in \{1,\ 2,\ \dots\ n\}$ on a

$$P\{T_t = j\} \leqslant 2\ P\{T_t = j\ ;\ U_n > t\}$$

Sommant alors, par rapport à j, ces inégalités on obtient

$$P\{M_n > t\} = \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} P\{T_t = n\} \leqslant 2 \sum_j P\{T_t = j\ ;\ U_n > t\}$$
$$= 2\ P\ \{U_n > t\}$$

De ces inégalités, valables pour tout n on déduit

$$\liminf_n\ P\{M_n > t\} \leqslant 2 \liminf_n\ P\{U_n > t\}$$

Or $M_n \uparrow M$ donc $\liminf\ P\{M_n > t\} = \lim P\{M_n > t\} = P\{M > t\}$;
ce qui démontre que $P\{M > t\} \leqslant 2 \liminf P\{U_n > t\}$

(3) (a) n'est autre que la formule d'intégration par parties généralisées. Il faut examiner à part le cas $\varphi \equiv \infty$ qui est trivial. Si φ est continue, on peut encore écrire :

$$E\ \{\varphi(Y)\} = \varphi(0) + \int_{[0,\infty]} P\ \{Y \geqslant t\}\ d\tau\ (t)$$

(b) La question (2) et la formule d'intégration par parties donnent immédiatement $\mathbb{E}\ \{\varphi(M_n)\} \leqslant 2\ \mathbb{E}\ \{\varphi(U_n)\}$ $\forall$ n . On en déduit alors $\liminf_n \mathbb{E}\{\varphi\ (M_n)\} \leqslant 2 \liminf_n \mathbb{E}\ \{\varphi\ (U_n)\}$. Or φ étant continue à gauche et croissante $\varphi(M_n) \uparrow \varphi(M)$. Donc par Beppo LEVI $E\{\varphi\ (M)\} = \lim_n\ \mathbb{E}\ \{\varphi(M_n)\}$. Ce qui démontre (b).

(5) (b) $\Longrightarrow$ (a) Trivialement (sans aucune hypothèse de stricte symétrie !)

(a) $\Longrightarrow$ (b) ; Dire que $M < \infty$ presque sûrement équivaut à dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in]0, \infty[$ tel que $P\{M > A\} < \varepsilon$ (ou encore $\{M\}$ est bornée en probabilité).

Mais $P\{M > A\} \leqslant 2 \liminf_n P\{U_n > A\}$ (par la question (2)).

Donc $P\{M > A\} \leqslant 2 \sup_n P\{U_n > A\}$; ce qui démontre l'implication

(6) On a évidemment pour tout n :

$$P(U_n > t) \leqslant P\{M_n > t\} \leqslant 2P\{U_n > t\} .$$

Donc $P\{U > t\} \leqslant \liminf_n P\{U_n > t\} \leqslant \liminf_n P\{M_n > t\}$

$$\leqslant \limsup P\{M_n > t\} \leqslant 2 \limsup P\{U_n > t\}$$

$$\leqslant 2 \limsup P\{U_n \geqslant t\} \leqslant 2P\{U \geqslant t\}$$

Or, du fait que φ est continue : $\int_{[0,\infty]} P\{Y>t\}\, d\tau(t) = \int_{[0,\infty]} P\{Y \geqslant t\}\, dv(t)$ pour toute v.a. Y positive. Donc en intégrant par rapport à V la double inégalité

$P\{U > t\} \leqslant P\{M > t\} \leqslant 2P\{U \geqslant t\}$, on obtient le résultat demandé.

(7) Pour démontrer l'équivalence de (a) et (b) il suffit d'appliquer la question (5) en prenant pour fonction g la fonction qui dans la partie I, question (3) a été appelée β .

Pour démontrer l'équivalence de (a') et (b') on remarque que :

(a') $\Longleftrightarrow$ $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_0$ tel que pour tout $n' \geqslant n_0$, on ait :

$$P\ \{ |X_{n_0} + X_{n_0+1} + \dots X_{n'}| > \varepsilon\} < \varepsilon \text{ ; et que .}$$

(b') $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_0$ tel que pour tout $n' \geqslant n_0$, on ait :

$$P\ \{ \sup_{n_0 \leqslant k \leqslant n'} |X_{n_0} + X_{n_0+1} + \dots X_{n'}| > \varepsilon\} \leqslant \varepsilon$$

Il suffit alors de considérer la nouvelle v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $(X_{n_0}, X_{n_0+1}, \dots)$ et la fonction β ci-dessus pour obtenir le résultat demandé.

(8) On utilise la fonction β de la question (7) et la fonction $\varphi : t \to t^r$ et on applique la question (4).

Partie V

(1) On a $I(st) = s^r \; I(t) \quad \forall t \qquad (s > 0)$

Donc $I(t) = C_1 \times |t|^r$ avec $C_1 = I(1)$.

Dans la 3ème partie, on a démontré que $\exp\left(- \int_0^\infty \frac{1 - \cos ut}{C_1 \; u^{1+r}} du\right)$ est une fonction caractéristique. Donc $t \leadsto \exp(- |t|^r)$ est une f. C

(2) On a

$$\int_0^\infty [1 - \mathcal{R}e \; \psi_X(t)| \frac{dt}{t^{r_1+1}} = \int_0^\infty \frac{dt}{t^{r_1+1}} \int_\Omega [1 - \cos t\, X(\omega)] \; P(d\omega)$$

$$= \int_\Omega P(d\omega) \int_0^\infty \frac{1 - \cos t\, X(\omega)}{t^{r_1+1}} dt \quad \text{(Tonnelli)}$$

$$= C_1 \int_\Omega |X(\omega)|^{r_1} \; P(d\omega) = C_1 \; \mathbb{E}\{ |X|^{r_1} \}$$

Si X est r-stable, alors $\mathcal{R}e \; \psi_X(t) = \exp(- |t|^r)$. On en déduit que $E\{ |X|^{r_1} \} < \infty$ si et seulement si $r_1 < r$.

(3) La fonction $t \leadsto \exp(- |t|^r)$ étant Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$, on en déduit qu'une v.a. réelle r-stable a une densité f_r (par rapport à la mesure de Lebesgue). Plus précisément :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} \; \exp(- |t|^r) \, dt$$

Sous cette forme, il est immédiat que f_r est indéfiniment dérivable.

(4) $\sum_n$ a pour fonction caractéristique la fonction

$$t \rightsquigarrow \exp\left(- \sum_{k=0}^{n} |x_k|^r \; |t|^r\right).$$

Donc on a l'équivalence

$$\sum_n \text{ converge en loi} \Longleftrightarrow \sum_n |x_n|^r < \infty$$

(5) C'est la "loi des deux séries" pour les v.a. positives. Sa démonstration est analogue à celle du théorème des trois séries :

Pour tout n , soit $Y_n^1 = Y_n \times 1_{\{Y_n < 1\}}$.

Démontrons d'abord (a) $\Longrightarrow$ (b) : Si $\sum Y_n < \infty$ p.s. alors $Y_n \to 0$ p.s. Donc l'ensemble $\limsup_n \{Y_n \geqslant 1\}$ a une probabilité nulle. Or les Y_n étant indépendantes par Borel Cantelli, on en déduit $\sum P \{Y_n \geqslant 1\} < \infty$. Donc la première condition de (b) est vérifiée.

Maintenant $0 \leqslant Y_n^1 \leqslant Y_n$ $\forall$ n ; donc $\sum Y_n^1 < \infty$ p.s. Or les Y_n^1 étant indépendantes on a (par exemple en appliquant le théorème des trois séries) : $\sum_n E\,(Y_n^1) < \infty$.

Il suffit de remarquer que $E\,(Y_n^1) = \int_{\{Y_n<1\}} Y_n \, dP$ pour voir que la seconde condition de (b) est vérifiée.

Démontrons ensuite que (b) $\Longrightarrow$ (a). La seconde contiion de (b) s'écrit $\sum_n \mathbb{E}\,\{Y_n^1\} < \infty$. Donc les Y_n^1 étant positives, $\sum Y_n^1$ converge dans $L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$. Toujours grâce à la positivité des Y_n^1 , on en déduit que $\sum Y_n^1$ converge p.s. Maintenant la première condition de (b) implique

$$P \limsup \{Y_n \neq Y_n^1\} = 0 \quad ; \text{ donc } \quad \sum Y_n < \infty \quad \text{p.s.}$$

(6) Par la question (5) on déduit l'équivalence :

$$\sum_n |x_n X_n|^r < \infty \Longleftrightarrow \begin{cases} - \sum\limits_n P \{|x_n X_n| > 1\} < \infty \\ - \sum\limits_n |x_n|^r \int_{|x_n X_n| \leq 1} |X_n|^r \, dP < \infty \end{cases}$$

Mais du fait que $P \{|X_n| \geqslant t\} \sim \frac{1}{t^r}$ $(|t| \to \infty)$ la première condition de droits équivaut à $\sum |x_n|^2 < \infty$. Pour démontrer complètement la question (6) il faut utiliser l'équivalence $f_r(t) \sim \frac{1}{t^{r+1}}$ $(|t| \to \infty)$ (condition qui est plus forte que celle donnée dans l'énoncé et qui est vérifiée).

Tenant alors compte de cette propriété, on voit immédiatement que la seconde condition de droite équivaut à $\sum |x_n|^r \operatorname{Log} \frac{1}{|x_n|} < \infty$. D'où le résultat.