MÉCANIQUE GÉNÉRALE

Sujet (durée 6 heures)

Un système gyroscopique S est constitué de deux solides S_1 et S_2 ; on note (Ox, Oy, Oz) un système orthogonal d'axes principaux d'inertie de S_1, en son centre d'inertie O, et A_1, B_1, C_1 les moments d'inertie correspondants. On note $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ les vecteurs unitaires respectifs des axes Ox, Oy, Oz. Le solide S_2 est assujetti de telle sorte que son mouvement relatif par rapport à S_1 soit un mouvement de rotation uniforme, définie par le vecteur $\vec{\omega} = \omega \vec{z}$, ω désignant une constante réelle donnée. On suppose en outre que S_2 a son centre d'inertie en O et admet pour axes principaux d'inertie en ce point, d'une part Oz, et d'autre part, tout axe passant par O et contenu dans le plan équatorial Oxy. On note A_2 le moment d'inertie de S_2 par rapport à l'un quelconque de ceux-ci et D le moment d'inertie de S_2 par rapport à Oz.

On admet que le système $S = S_1 + S_2$ est mobile autour de son centre O maintenu fixe relativement à un repère galiléen OXYZ, par une liaison sans frottement; on note $\vec{\Omega} = p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z}$, le vecteur rotation instantanée de S_1 relativement à OXYZ, et on utilise les notations :

$$A = A_1 + A_2, \qquad B = B_1 + A_2, \qquad C = C_1 + D.$$

PARTIE I

1° Exprimer les composantes sur les axes mobiles Ox, Oy, Oz des moments cinétiques $\vec{H}_1$ et $\vec{H}_2$ de S_1 et S_2, au point O, dans leur mouvement par rapport à OXYZ.

2° Par application du théorème du moment cinétique à l'ensemble $S_1 + S_2$, montrer que les équations du mouvement peuvent s'écrire :

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr + Dq\,\omega = 0\,, \tag{1}$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)\,pr - Dp\,\omega = 0\,, \tag{2}$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)\,pq = 0\,. \tag{3}$$

Interpréter ces équations comme étant celles qui régissent le mouvement d'un corps solide soumis à des forces dont on précisera le moment en O.

3° On considère le cas de symétrie $A = B$.

Intégrer les équations (1), (2), (3) ; donner une description géométrique du mouvement du système S par rapport aux axes OX, OY, OZ.

4° On suppose désormais dans la suite du *problème* $A > B > C$; éliminant la variable t des équations (1), (2) grâce à (3), montrer qu'on peut exprimer p et q sous la forme :

$$p^2 = \frac{C}{A - B}P(r)\,, \qquad q^2 = -\frac{C}{A - B}Q(r) \tag{4}$$

où P et Q sont des polynômes du second degré, qui dépendent additivement de constantes arbitraires qu'on précisera en termes de conditions initiales.

Écrire l'équation différentielle qui permet d'obtenir r, en fonction de t, et décrire sommairement les différents types de solutions.

On pourra utiliser à cette fin les représentations graphiques des fonctions $r \longmapsto P(r)$ et $r \longmapsto Q(r)$.

5° Afin de réaliser le mouvement de rotation uniforme de S_2 par rapport à S_1, le solide S_1 doit exercer sur S_2, à chaque instant, des efforts appropriés dont on note le moment en O par : $\overrightarrow{\mathfrak{M}} = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z}$.

Écrire les équations auxquelles conduit l'application du théorème du moment cinétique appliqué en O à S_2 dans son mouvement par rapport à OXYZ.

Exprimer la puissance des forces intérieures au système $S_1 + S_2$ (il est rappelé que la puissance d'un système de forces équivalent à zéro agissant sur un système est indépendante du repère par rapport auquel elle est calculée).

Appliquer le théorème de l'énergie cinétique au système $S_1 + S_2$ et retrouver l'intégrale première à laquelle il conduit, par un calcul direct à partir des équations (1), (2), (3).

Obtenir une autre intégrale première en calculant le carré de la longueur du moment cinétique; la retrouver à partir des équations (1), (2), (3).

On désignera ces intégrales premières, intégrale de l'énergie, intégrale du moment cinétique; justifier ces dénominations.

6° On se propose d'étudier les solutions stationnaires des équations (1), (2), (3) ; montrer qu'il existe trois possibilités. Que peut-on dire du mouvement de S_1 par rapport à OX, OY, OZ ?

Discuter les caractères de stabilité ou d'instabilité dans chacun de ces cas.

PARTIE II

1° Dans le but de déterminer, à chaque instant, la position du système $S_1 + S_2$ relativement aux axes de référence OX, OY, OZ, dans le cas général prévu au § 4 de la première partie, on introduit la représentation $\vec{Z} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z}$ où $\vec{Z}$ désigne le vecteur unitaire de OZ (on pourrait, éventuellement, conduire des calculs analogues à ceux ci-dessous demandés, à propos des représentations des vecteurs unitaires $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ des axes OX et OY).

Écrire les équations différentielles (5), (6), (7), auxquelles satisfont les variables α, β, γ.

Le système des équations (1), (2), (3), (5), (6), (7) admet quatre intégrales premières : celles déjà identifiées au § 5 de la première partie, soient $f_1(p, q, r)$, $f_2(p, q, r)$, plus celles f_3, f_4 qu'on obtient en exprimant que $(\vec{H}_1 + \vec{H}_2).\vec{Z}$ et $\|\vec{Z}\|$ sont constants; expliciter f_3 et f_4, en fonction des variables p, q, r, α, β, γ.

Par ailleurs, le système des six équations différentielles qui régit l'évolution des variables p, q, r, α, β, γ peut être écrit sous la forme :

$$\frac{dp}{F_1} = \frac{dq}{F_2} = \frac{dr}{F_3} = \frac{d\alpha}{F_4} = \frac{d\beta}{F_5} = \frac{d\gamma}{F_6} = dt \quad . \tag{8}$$

On se propose dans ce qui suit de construire une cinquième intégrale première du système (8) de façon à pouvoir réduire son intégration à des quadratures.

2° On considère, de manière générale, le système différentiel

$$\frac{dx_1}{F_1} = \frac{dx_2}{F_2} = \ldots = \frac{dx_n}{F_n} = dt, \tag{9}$$

où $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont des fonctions à valeurs réelles des variables réelles $x_1, x_2, \ldots, x_n$, supposées continûment différentiables et telles que :

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = 0. \tag{10}$$

Il pourra être commode d'interpréter le vecteur $\vec{v} = \{ F_1, F_2, \ldots, F_n \}$, comme définissant un champ de vitesses.

Le système (9) définit, au moins localement, une solution $x = x(t\,;\,\xi)$, telle que $\xi = x(0\,;\,\xi)$, avec $x = \{ x_1, \ldots, x_n \} \in \mathbb{R}^n$, $\xi = \{ \xi_1, \ldots, \xi_n \} \in \mathbb{R}^n$, ξ état initial donné.

Pour D ouvert borné quelconque de $\mathbb{R}^n$, on note : $D_t = \{ x\,;\, x = x(t\,;\,\xi),\ \ \forall\, \xi \in D \}$, c'est-à-dire que D_t est l'image, à l'instant t, des points de D, par la transformation : $\xi \longmapsto x = x(t\,;\,\xi)$. Montrer que $\int_{D_t} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$, volume de D_t, est indépendant de t.

On pourra établir, grâce à l'interprétation mécanique du champ de vitesses $\vec{v}$, que :

$$\frac{d}{dt}\int_{D_t} dx_1 \ldots dx_n = \int_{\partial D_t} \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS$$

avec ∂D_t frontière de D_t, $\vec{n}$ normale unitaire extérieure, dS élément d'aire.

On suppose connues $(n-2)$ intégrales premières de (9), c'est-à-dire $(n-2)$ fonctions

$$f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_{n-2}(x_1, \ldots, x_n),$$

deux fois continûment différentiables, telles que :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \cdot F_j = 0\ , \qquad i = 1, 2, \ldots, n-2.$$

Par inversion du système d'équations :

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = c_1, \ldots, f_{n-2}(x_1, \ldots, x_n) = c_{n-2},$$

on peut définir la transformation $\mathscr{T} : (c, y) \longmapsto x = \mathscr{T}(c, y)$, avec $c = \{ c_1, c_2, \ldots, c_{n-2} \}$, $y = \{ x_{n-1}, x_n \}$, explicitée par :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \varphi_1(c_1, c_2, \ldots, c_{n-2}, x_{n-1}, x_n)\\
&\ \vdots\\
x_{n-2} &= \varphi_{n-2}(c_1, c_2, \ldots, c_{n-2}, x_{n-1}, x_n)\\
x_{n-1} &= x_{n-1}\\
x_n &= x_n
\end{aligned} \tag{11}$$

Toute solution de (9) peut alors être décrite par (11) avec $\{ c_1, c_2, \ldots, c_{n-2} \}$, prenant des valeurs constantes et x_{n-1}, x_n solution du système différentiel :

$$\frac{dx_{n-1}}{\tilde{F}_{n-1}} = \frac{dx_n}{\tilde{F}_n} = dt \tag{12}$$

où $\tilde{F}_{n-1}$, $\tilde{F}_n$ sont obtenus à partir de F_{n-1}, F_n après qu'on y ait remplacé les variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$ par les seconds membres de (11).

On représente la solution de (12) par :

$$x_{n-1} = x_{n-1}(t\,;\,c, \eta) \quad , \quad x_n = x_n(t\,;\,c, \eta),$$

avec $\eta = \{ \xi_{n-1}, \xi_n \}$, ξ_{n-1} et ξ_n désignant les valeurs de x_{n-1} et x_n à $t = 0$.

On prend pour le domaine D considéré plus haut l'image dans $\mathbb{R}^n$, par la transformation $\xi = \mathscr{T}(c, \eta)$, de $G \times V$, où G et V sont des ouverts bornés de $\mathbb{R}^{n-2}$, $\mathbb{R}^2$ respectivement,

$$c = \{ c_1, \ldots, c_{n-2} \} \in G \quad , \quad \eta = \{ \xi_{n-1}, \xi_n \} \in V.$$

Justifier qu'on peut écrire :

$$D_t = \mathscr{T} \mathscr{D}_t \qquad \text{avec} \qquad \mathscr{D}_t = \bigcup_{c \in G} \{ c \} \times V_{t,c}$$

et

$$V_{t,c} = \{ (x_{n-1}, x_n) \ : \ x_{n-1} = x_{n-1}(t\,;\,c, \eta) \ , \ x_n = x_n(t\,;\,c, \eta) \ , \ \forall\, \eta \in V \}.$$

Admettant les formules :

$$\int_{D_t} dx_1, \ldots, dx_n = \int_{\mathcal{D}_t} \left| \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(c_1, \ldots, c_{n-2}, x_{n-1}, x_n)} \right| dc_1\, dc_2 \ldots dc_{n-2}\, dx_{n-1}\, dx_n$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t} \left| \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2})}{\partial(c_1, \ldots, c_{n-2})} \right| dc_1\, dc_2 \ldots dc_{n-2}\, dx_{n-1}\, dx_n$$

$$= \int_G K(t, c_1, c_2, \ldots, c_{n-2})\, dc_1\, dc_2 \ldots dc_{n-2}$$

avec

$$K(t, c_1, c_2, \ldots, c_{n-2}) = \int_{V_{t,c}} |\mathfrak{J}|\, dx_{n-1}\, dx_n$$

où $\mathfrak{J} = \dfrac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2})}{\partial(c_1, c_2, \ldots, c_{n-2})}$ est le déterminant fonctionnel d'élément $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial c_j}$, montrer que l'invariance par rapport à t du volume de D_t, quel que soit G, exige que K soit indépendant de t.

Ainsi $\int_{V_{t,c}} |\mathfrak{J}|\, dx_{n-1}\, dx_n$ est, pour c fixé, indépendant de t ; justifier que, sous l'hypothèse $\mathfrak{J} \neq 0$, il est équivalent de dire que $\int_{V_{t,c}} \mathfrak{J}\, dx_{n-1}\, dx_n$ est indépendant de t pour c fixé. A l'aide des équations d'évolution (12), montrer que :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{t,c}} \mathfrak{J}\, dx_{n-1}\, dx_n = \int_{V_{t,c}} \left(\frac{\partial(\mathfrak{J}\, \tilde{F}_{n-1})}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial(\mathfrak{J}\, \tilde{F}_n)}{\partial x_n} \right) dx_{n-1}\, dx_n$$

et, tenant compte du fait que V est un ouvert borné quelconque de $\mathbb{R}^2$, en déduire que $\mathfrak{J}(\tilde{F}_n\, dx_{n-1} - \tilde{F}_{n-1}\, dx_n)$ est une différentielle totale. Conclure qu'on peut obtenir, par ce procédé, une nouvelle intégrale première des équations (9).

3° On veut appliquer la méthode décrite au paragraphe précédent au système (1), (2), (3), (5), (6), (7). Vérifier que la condition analogue à (10) est satisfaite dans ce cas particulier.

On prendra pour variables principales p, q, α, β, c'est-à-dire qu'on définira la transformation (11) en inversant par rapport à p, q, α, β le système : $f_1 = c_1$, $f_2 = c_2$, $f_3 = c_3$, $f_4 = c_4$, où f_1, f_2, f_3, f_4 sont les intégrales premières obtenues antérieurement.

Ainsi on écrit le système analogue à (11) :

$$\begin{aligned}
p &= \varphi_1(c_1, c_2, c_3, c_4, r, \gamma) \\
q &= \varphi_2(c_1, c_2, c_3, c_4, r, \gamma) \\
\alpha &= \varphi_3(c_1, c_2, c_3, c_4, r, \gamma) \\
\beta &= \varphi_4(c_1, c_2, c_3, c_4, r, \gamma) \\
r &= r \\
\gamma &= \gamma
\end{aligned}$$

Calculer

$$\mathfrak{J} = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)}{\partial(c_1, c_2, c_3, c_4)} = \left(\frac{\partial(f_1, f_2, f_3, f_4)}{\partial(p, q, \alpha, \beta)} \right)^{-1}$$

Intégrer la différentielle $\mathfrak{J}(\tilde{F}_6\, dr - \tilde{F}_3\, d\gamma)$. Conclusion.

RECTIFICATIF

A LIRE AUX CANDIDATS DES LA DISTRIBUTION DES SUJETS

1 - Page 11 - 5e ligne en partant du haut de la page

lire : $D_t = \{ x : x = x(t ; \xi) , \; . \, . \, . \, . \, .$

(c'est-à-dire remplacer le premier point et virgule du texte par le signe deux points)

2 - Page 12 - 2e ligne en partant du haut de la page

lire : $\int_{D_t} dx_1 \; \ldots \; dx_n = \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$

(c'est-à-dire supprimer les virgules placées après dx_1 et avant dx_n dans le texte)

RAPPORT SUR L'EPREUVE DE MECANIQUE

Le problème de mécanique proposé cette année avait pour objet l'étude du mouvement autour d'un point fixe d'un système constitué de deux solides assujettis de telle sorte que l'un d'eux ait par rapport à l'autre un mouvement de rotation uniforme.

Il comprenait deux parties : l'une, de niveau élémentaire, visait à obtenir la représentation en fonction du temps de la rotation du système par rapport à un référentiel lié à l'un des solides, l'autre, plus délicate, conduisait à la détermination du mouvement par rapport au référentiel absolu, utilisant une méthode, variante de celle de Jacobi, pour déterminer la dernière intégrale première des équations globales du mouvement grâce à laquelle l'intégration de celles-ci pouvait être réduite à des quadratures.

I. Solution (les renvois numérotés sont relatifs aux équations du texte).

Partie I

1. On écrit : $\vec{H}_1 = A_1 p\,\vec{x} + B_1\, q\,\vec{y} + C_1\, r\,\vec{z}$

$$\vec{H}_2 = A_2\, p\,\vec{x} + B_2\, q\,\vec{y} + C_2\, r\,\vec{z}$$

d'où : $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = A\,p\,\vec{x} + B\,q\,\vec{y} + (Cr + D\omega)\vec{z}$

2. Le théorème du moment cinétique, appliqué à $S_1 + S_2$ en O dans son mouvement par rapport à OXYZ, conduit à :

$\dfrac{d(\vec{H}_1 + \vec{H}_2)}{dt}\Big|_{OXYZ} = 0$, d'où les équations (1), (2), (3), qu'on peut interpréter en disant que le système se comporte comme un solide unique, d'éléments d'inertie A, B, C, soumis à un couple de moment $-Dq\,\omega\,\vec{x} + D\,p\,\omega\,\vec{y}$.

3. Quand il y a symétrie $A = B$, de (3) on déduit $r = r_0$, puis avec $\omega = p + iq$, on obtient à partir de (1), (2) :

$$\frac{d\,\omega}{d\,t} = i\,\sigma\,\omega \quad \text{avec } \sigma = \frac{C - A}{A}\, r_0 + \frac{D\,\omega}{A}$$

d'où : $p + iq = (p_0 + iq_0)\, e^{i\,\sigma\,t}$

Le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ est donc de norme constante et son support décrit, par rapport aux axes liés O_{xyz} , un cône de révolution d'axe Oz ; en outre le vecteur $\vec{H}_1 + \vec{H}_2$ est constant relativement à OXYZ et de $\vec{\Omega}(\vec{H}_1 + \vec{H}_2) = Ap^2 + Aq^2 + (Cr + D\omega)^2$ l'on déduit $\vec{\Omega}(\vec{H}_1 + \vec{H}_2) =$ const., de sorte que, relativement aux axes OXYZ, l'extrêmité de $\vec{\Omega}$ décrit un cercle d'axe porté par $\vec{H}_1 + \vec{H}_2$. Ainsi le cône engendré par le support de Ω relativement à $Oxyz$, roule sans glisser sur le cône lié au référentiel OXYZ engendré par ce même support, la rotation demeurant de norme constante.

4. Le texte donnait toutes indications utiles pour obtenir les formules (4) de l'énoncé et précisait que $P(r)$ et $Q(r)$ devaient être exprimés au moyen des constantes physiques et des données initiales :

$$P(r) = \frac{B - C}{A}(r^2 - r_0^{\,2}) - \frac{2\,D\,\omega}{A}(r - r_0) + \frac{A - B}{C}\, p_0^{\,2}$$

$$Q(r) = \frac{A-C}{B}(r^2 - r_0{}^2) - \frac{2D\omega}{B}(r - r_0) - \frac{A-B}{C} q_0{}^2$$

r étant obtenu par : $\frac{dr}{dt} = \frac{A-B}{C} p q$

En raison des équations (4), il convient de noter que P (r) et Q (r) qui, nécessairement à l'instant initial prennent des valeurs $\frac{A-B}{C} p_0{}^2$ et $-\frac{A-B}{C} q_0{}^2$, respectivement positive et négative, doivent conserver ces signes respectifs au cours de l'évolution ultérieure, car p et q obtenus par (4) sont toujours réels.

Cette remarque, banale, jointe au fait que les paraboles $\omega = P(r), \omega = \varphi(r)$ subissent des translations parallèles à leur direction d'axe quand on modifie les conditions initiales, permet une discussion aisée des différents types de mouvement et de la nature des fonctions que l'intégration des équations amène à introduire.

5. Le théorème du moment cinétique appliqué à S_2 en O dans son mouvement par rapport à OXYZ conduit à :

$$A_2 \frac{dp}{dt} + (D - A_2) q r + D q \omega = L$$

$$A_2 \frac{dq}{dt} + (A_2 - D) p r - D p \omega = M$$

$$D \frac{dr}{dt} = N$$

La puissance des forces intérieures au système $S_1 + S_2$ est $N\omega$.

Le théorème des forces vives appliqué au système total $S_1 + S_2$ fournit l'équation : $\frac{d}{dt}(T_1 + T_2) = N\omega$, d'où, compte tenu de $2T_1 = A_1 p^2 + B_1 q^2 + C_1 r^2$, $2T_2 = A_2 p^2 + A_2 q^2 + D(r+\omega)^2$, l'on déduit l'intégrale première : $f_1 = A p^2 + B q^2 + Cr^2 =$ const.

L'autre intégrale première demandée est :

$f_2 = A^2 p^2 + B^2 q^2 + (Cr + D\omega)^2 =$ const. dont l'interprétation est $\|\vec{H}\| =$ const.

6. L'étude des solutions stationnaires est immédiate à partir des équations (1), (2), (3) et la discussion de leur stabilité, très facile, en se référant à l'étude géométrique du § 4 pour examiner ce qui se produit lorsqu'on modifie légèrement les données initiales à partir des valeurs qui correspondent à un régime stationnaire.

On trouve :

$p_0 = a \quad q_0 = o \quad r_0 = \frac{D\omega}{A-C}$ stable

$p_0 = o \quad q_0 = b \quad r_0 = \frac{D\omega}{B-C}$ instable

$p_0 = o \quad q_0 = o \quad r_0 = c \quad \frac{D\omega}{B-C} < c$ stable

$\frac{D\omega}{B-C} > c$ instable.

Partie II

1. Les équations demandées sont :

$$\frac{d\alpha}{dt} + q\gamma - r\beta = 0$$

$$\frac{d\beta}{dt} + r\alpha - p\gamma = 0$$

$$\frac{d\gamma}{dt} + p\beta - q\alpha = 0 .$$

On écrit : $Z(H_1 + H_2) = \alpha A p + \beta B q + \gamma (Cr + D\omega)$

d'où l'intégrale première :

$f_3 = A p \alpha + B q \beta + (Cr + D\omega)\gamma = \text{const.}$

On a aussi : $f_4 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$

Le système des équations (1), (2), (3), (5), (6), (7) s'écrit :

$$\frac{dp}{F_1} = \frac{dq}{F_2} = \frac{dr}{F_3} = \frac{d\alpha}{F_4} = \frac{d\beta}{F_5} = \frac{d\gamma}{F_6} = dt \quad \text{avec}$$

$$F_1 = \frac{B-C}{A} q r - \frac{D}{A} q \omega, \quad F_2 = \frac{C-A}{B} p r + \frac{D}{B} p \omega \ , \quad F_3 = \frac{A-B}{C} p q$$

$$F_4 = r\beta - q\gamma \ , \quad F_5 = p\gamma - r\alpha \ , \quad F_6 = q\alpha - p\beta$$

2. La formule $\frac{d}{dt} \int_{D_t} d x_1 \dots d x_n = \int_{\partial D_t} \vec{v} . \vec{n} \, dS$ exprime une propriété de conservation : en effet elle signifie que pour un fluide de masse volumique unité la variation de masse enfermée dans D_t, par unité de temps, est égale au flux de masse à travers la frontière de D_t.

Transformant l'intégrale de surface par la formule de Green et tenant compte de (10) on aboutit à la loi de conservation du texte : volume $(D_t) =$ const. (théorème de Liouville).

Il est clair que D_t est l'ensemble des points décrits par (11) lorsque x_{n-1} et x_n y sont remplacés par $x_{n-1}(t, c, \eta)$ et $x_n(t ; c, \eta)$, avec $\eta \in V$, $c \in G$

Alors la formule de changement de variables dans les intégrales multiples conduit à :

$$\int_{D t} dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathfrak{D}t} \left| \frac{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial (c_1, c_2, \dots, c_{n-2}, x_{n-1}, x_n)} \right| dc_1 \dots dc_{n-2} \, dx_{n-1} \, dx_n$$

et aux représentations du texte.

Puisque G est, dans $\mathbf{R}^{n-2}$, un domaine quelconque, l'intégrale

$\int_{\mathrm{G}} \mathrm{K}(t, c_1, \ldots, c_{n-2})\, dc_1\, dc_2 \ldots dc_{n-2}$ ne peut être indépendante de t que si K est elle-même indépendante de t (propriété qui résulte de la continuité de $\mathrm{K}\ (t, c_1, \ldots, c_{n-2})$, acquise en raison des hypothèses).

Ainsi $\int_{\mathrm{V}_{t,c}} |\mathfrak{J}|\, dx_{n-1}\, dx_n$ est indépendant de t et, puisque $\mathfrak{J}$ ne s'annule pas dans les domaines considérés, (cette hypothèse est implicite dans les raisonnements développés ci-dessus), il s'ensuit que $\int_{\mathrm{V}_{t,c}} \mathfrak{J}\, dx_{n-1}\, dx_n$ est indépendant de t. Raisonnant dans $\mathbf{R}^2$ on justifie aisément la formule

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathrm{V}_{t,c}} \mathfrak{J}\, dx_{n-1}\, dx_n = \int_{\mathrm{V}_{t,c}} \left(\frac{\partial (\mathfrak{J}\widetilde{\mathrm{F}}_{n-1})}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial (\mathfrak{J}\widetilde{\mathrm{F}}_n)}{\partial x_n} \right) dx_{n-1}\, dx_n = 0$$

et puisque V est un ouvert quelconque de $\mathbf{R}^2$ et que l'intégrand est continu on obtient :

$$\frac{\partial (\mathfrak{J}\widetilde{\mathrm{F}}_{n-1})}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial (\mathfrak{J}\widetilde{\mathrm{F}}_n)}{\partial x_n} = 0$$

c'est-à-dire que $\mathfrak{J}\,(\widetilde{\mathrm{F}}_n\, dx_{n-1} - \widetilde{\mathrm{F}}_{n-1}\, dx_n)$ est une différentielle totale ou encore que $\mathfrak{J}$ est un facteur intégrant pour $\widetilde{\mathrm{F}}_n\, dx_{n-1} - \widetilde{\mathrm{F}}_{n-1}\, dx_n$.

3. Dans le cas particulier du § 1, l'identité (10) est évidemment satisfaite.

On a :

$$\mathfrak{J} = \frac{\partial (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)}{\partial (f_1, f_2, f_3, f_4)} = \left(\frac{\partial (f_1, f_2, f_3, f_4)}{\partial (p, q, \alpha, \beta)} \right)^{-1} = [8\,\mathrm{AB}\,(\mathrm{A}-\mathrm{B})\,(\mathrm{B}\,\alpha\, q - \mathrm{A}\,\beta\, p)\, p\, q]^{-1}$$

et l'on est conduit à intégrer la différentielle :

$$8\,\mathrm{AB}\,(\mathrm{A}-\mathrm{B})\,\mathfrak{J}\,(\widetilde{\mathrm{F}}_6\, dr - \widetilde{\mathrm{F}}_3\, d\gamma) = [pq\,(\mathrm{B}\,\alpha\, q - \mathrm{A}\,\beta\, p)]^{-1} \cdot [(q\,\alpha - p\,\beta)\, dr - \frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{C}}\, p\, q\, d\gamma\,]$$

On doit au préalable exprimer les termes qui interviennent dans cette expression au moyen de $f_1, f_2, f_3, f_4, r, \gamma$.

Introduisant $s = \mathrm{B}\,\alpha\, q - \mathrm{A}\,\beta\, p$, $\rho\sqrt{f_2} = \mathrm{C}r + \mathrm{D}\,\omega$ et posant $k = \dfrac{f_3}{\sqrt{f_2}}$,

on obtient : $s^2 = f_2\ [(1-k^2)(1-\rho^2) - (\gamma - k\rho)^2]$

et l'on est conduit à intégrer :

$$\frac{\mathrm{A}\,p^2 + \mathrm{B}\,q^2}{p\,q\,(\mathrm{A}^2\,p^2 + \mathrm{B}^2\,q^2)}\, dr + \frac{(\mathrm{A}-\mathrm{B})\,(f_3 - \mathrm{C}r\,\gamma - \mathrm{D}\,\omega\gamma)}{s\,(\mathrm{A}^2\,p^2 + \mathrm{B}^2\,q^2)}\, dr - \frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{C}\,s}\, d\gamma$$

c'est-à-dire :

$$\int \frac{\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2}{pq\,(\mathrm{A}^2\,p^2 + \mathrm{B}^2 q^2)}\, dr =$$

$$\int \frac{(\mathrm{A}-\mathrm{B})\,(\mathrm{A\,B})^{-1/2}\,(f_1 - \mathrm{C}r^2)\, dr}{(f_2 - \mathrm{B}f_1 + (\mathrm{C}r + \mathrm{D}\,\omega)^2 - \mathrm{BC}r^2)^{1/2} \cdot (\mathrm{A}f_1 - f_2 + \mathrm{AC}r^2 - (\mathrm{C}r + \mathrm{D}\,\omega)^2)^{1/2} \cdot (f_2 - (\mathrm{C}r + \mathrm{D}\,\omega)^2)}$$

puis :

$$\frac{A-B}{C}\int\left(\frac{c\,(f_3-(Cr+D\omega)\,\gamma\,)}{s\,(f_2-(Cr+D\omega)^2)}\,dr-\frac{d\gamma}{s}\right)=\frac{A-B}{C}\int\left(\frac{f_3\,(f_2)^{-1/2}-\rho\,\gamma}{s\,(\,1-\rho^2)}\,d\rho-\frac{d\gamma}{s}\right)$$

Prenons pour exemple le cas $|\,k\,|<1$ qui implique $|\,\rho\,|<1$. On cherche $\Theta\,(\,\gamma,\,\rho\,)$ telle

que : $$\frac{\partial\,\Theta}{\partial\,\gamma}=-\frac{1}{s}\mapsto\Theta=-(f_2)^{-1/2}\ \text{Arc cos}\ \frac{\gamma-k\,\rho}{\sqrt{(1-k^2)(1-\rho^2)}}+\psi\,(\rho)$$

puis : $$\frac{\partial\,\Theta}{\partial\,\rho}=\psi\,'\,(\rho)-(f_2)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial\,\rho}\ \text{Arc cos}\ \frac{\gamma-k\,\rho}{\sqrt{(1-k^2)(1-\rho^2)}}=\frac{k-\rho\,\gamma}{s\,(1-\rho^2)}$$

qui conduit après calcul à $\psi\,'\,(\rho)=0$, c'est-à-dire $\psi=\text{cst}$

Ainsi on obtient l'intégrale première :

$$\frac{C}{\sqrt{AB}}\int\frac{(f_1-Cr^2)\,dr}{\left((f_2-(Cr+D\omega)^2).(f_2-Bf_1+(Cr+D\omega)^2-BCr^2).(Af_1-f_2+ACr^2-(Cr+D\omega)^2)\right)^{1/2}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{f_2}}\ \text{Arc cos}\ \frac{\gamma-k\,\rho}{\sqrt{(1-k^2)(1-\rho^2)}}=\text{cst}$$

2. Observations

Partie I § 3. Aucun candidat n'a reconnu la description géométrique du mouvement.

§ 4. Les candidats, dans leur très grande majorité, se contentent d'écrire que $P\,(r)\,Q\,(r)<0$, sans s'apercevoir que les polynômes P et Q sont définis par les conditions initiales, que $P\,(r_0)>0$, $Q\,(r_0)<0$ et que r ne peut évoluer que de façon à satisfaire $P\,(r)>0$ et $Q\,(r)<0$.

§ 5. Quoiqu'on ait pris soin d'insérer dans le texte des indications précises, l'on relève ici de multiples erreurs concernant le calcul de la puissance des forces intérieures, l'application du théorème des forces vives, l'obtention des intégrales premières.

§ 6. Les candidats qui ont abordé ce paragraphe ont entrepris de discuter la stabilité des solutions stationnaires par un processus de linéarisation des équations du mouvement ; une meilleure approche eût été de recourir à l'analyse du mouvement décrit au § 4 pour le cas de petites perturbations dans les données initiales correspondant aux solutions stationnaires.

Partie II

N'appelle aucun commentaire puisque le développement des § 2 et 3 est absent de la quasi totalité des copies ; on a seulement noté quelques très rares tentatives qui, jamais, n'ont été au delà de la preuve de l'invariance de D_t .

3. Statistiques

Nombre de copies corrigées : 222

Répartition des notes (sur 40) :

0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 19	20 à 24	25 à 30	30 à 40
24	62	30	25	30	37	10	4

Moyenne générale 11,20 (excluant les copies nulles : 12,61).