ANALYSE NUMÉRIQUE

Sujet (durée : 6 heures)

0. NOTATIONS ET DÉFINITIONS

On convient d'appeler *polygone fermé* l'adhérence d'un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^2$ à frontière polygonale, *quadrilatère fermé* un polygone fermé dont la frontière est formée de quatre côtés.

Pour tout quadrilatère fermé K et pour tout $m \in \mathbb{N}$ (resp. pour $m = +\infty$), on désigne par $C^m(K)$ l'espace vectoriel des restrictions à K des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ m fois (resp. indéfiniment) continûment différentiables dans $\mathbb{R}^2$. Pour tout $m' \in \mathbb{N}$, $m' \leqslant m$, on définit sur $C^m(K)$ la semi-norme

$$v \longmapsto |v|_{m',\infty,K} = \sup_{|\alpha| = m'} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha v(x)|,$$

où l'on a noté $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, $x = (x_1, x_2)$ et $\partial^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on désigne par $P_k(\mathbb{R}^2)$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de degré $\leqslant k$ par rapport à l'ensemble des variables x_1 et x_2 et, pour tout quadrilatère fermé K, par $P_k(K)$ l'espace vectoriel des restrictions à K des éléments de $P_k(\mathbb{R}^2)$.

On appellera *élément fini* (en abrégé E.F.) tout triplet (K, V_K, Σ_K) où K est un quadrilatère fermé, V_K un sous-espace vectoriel de dimension finie N $(N > 0)$ de $C^\infty(K)$ et Σ_K un ensemble de N points distincts $a_1, \dots, a_N$ de K (les *nœuds* de l'E.F.), vérifiant la propriété suivante : il existe un (unique) système de N fonctions $w_1, \dots, w_N$ appartenant à V_K (les *fonctions de base* de l'E.F.), telles que pour tout entier i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant N$, et pour tout entier j vérifiant $1 \leqslant j \leqslant N$,

$$w_i(a_j) = \delta_{ij},$$

où $\delta_{i,j} = 0$, si $j \neq i$, et $\delta_{i,i} = 1$ pour tout i $(1 \leqslant i \leqslant N)$.

A tout E.F. (K, V_K, Σ_K), on associe un opérateur Π_K de $C^0(K)$ dans V_K (l'*opérateur d'interpolation* de l'E.F.), défini par

$$\Pi_K v = \sum_{i=1}^{N} v(a_i)\, w_i.$$

On dira que l'E.F. (K, V_K, Σ_K) *a la propriété* $\mathcal{F}_0$ s'il vérifie la condition suivante: pour toute fonction $v \in V_K$ et pour tout côté K' de K,

$$(\forall x \in K' \cap \Sigma_K,\ v(x) = 0) \Rightarrow (v|_{K'} = 0),$$

où l'on a noté $v|_{K'}$ la restriction de v à K'.

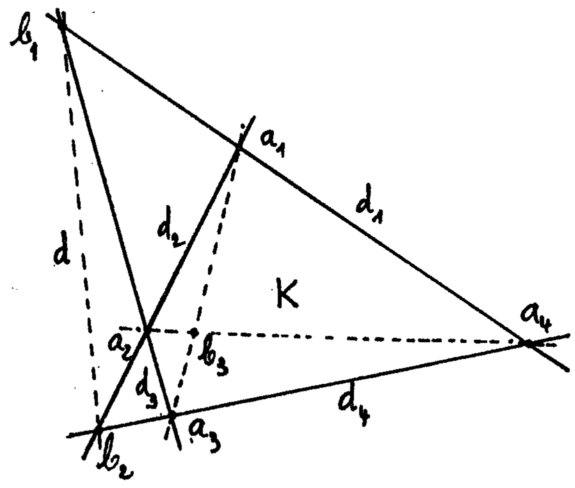

Figure 1

Soit $I = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, qui servira d'ensemble d'indices (on convient de l'écriture suivante : *à la place de* $\bar{i} \in I$, *on mettra* $i \in \mathbb{Z}$, *représentant quelconque de la classe* $\bar{i}$). Soit K un quadrilatère fermé *convexe* et *à côtés deux à deux opposés non parallèles* (cf. fig. 1). On désignera par d la diagonale extérieure de K et, pour tout $i \in I$, on notera a_i les sommets de K (indicés de façon que a_4 désigne le sommet *le plus éloigné de* d et que, pour tout $i \in I$, a_{i-1} et a_i soient consécutifs) et d_i la droite portant le côté d'extrémités a_{i-1} et a_i. On désignera par l (resp., pour tout $i \in I$, par l_i) un élément de $P_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $l(x) = 0$ (resp. $l_i(x) = 0$) soit une équation de la droite d (resp. de la droite d_i). On notera b_3 le point de concours des diagonales intérieures, b_1 (resp. b_2) le point d'intersection de d_1 et de d_3 (resp. de d_2 et de d_4). Enfin, on désignera par h_K (resp. par ρ_K) le *diamètre de* K (resp. le *maximum des diamètres des cercles contenus dans* K), $\mathbb{R}^2$ étant muni de la distance euclidienne usuelle δ. *Dans la suite,* K *désignera toujours un quadrilatère défini comme ci-dessus.*

On utilisera également le carré fermé $\hat{K} = \{\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \mathbb{R}^2 ; |\hat{x}_1| \leqslant 1, |\hat{x}_2| \leqslant 1\}$, de sommets $\hat{a}_1 = (-1, 1)$, $\hat{a}_2 = (-1, -1)$, $\hat{a}_3 = (1, -1)$, $\hat{a}_4 = (1, 1)$. Pour tout $i \in I$, on notera $\hat{d}_i$ la droite portant le côté d'extrémités $\hat{a}_{i-1}$ et $\hat{a}_i$, et $\hat{l}_i$ un élément de $P_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $\hat{l}_i(\hat{x}) = 0$ soit une équation de la droite $\hat{d}_i$.

I

Q. 1 Pour tout $i \in I$, soit w_i la fonction de K dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\text{(I.1)} \qquad \forall x \in K, \quad w_i(x) = C_i \frac{l_{i+2}(x)\ l_{i+3}(x)}{l(x)},$$

où C_i est une constante telle que $w_i(a_i) = 1$. On désigne par V_K l'espace vectoriel (réel) engendré par l'ensemble $\{w_i ; i \in I\}$ et par Σ_K l'ensemble $\{a_i ; i \in I\}$.

a. Vérifier que (K, V_K, Σ_K) est un E.F.

Remarquant que, pour tout $i \in I$, les droites d_i, d_{i+2} et d sont concourantes, montrer que, pour tout $i \in I$ et pour tout côté K′ de K, la restriction de w_i à K′ est *affine*.

En déduire que (K, V_K, Σ_K) a la propriété $\mathcal{F}_0$.

b. Soit Ψ un élément quelconque de $P_1(K)$. Vérifier que la fonction $\Psi - \Pi_K \Psi$ s'annule sur la frontière de K.

En déduire que $V_K \supset P_1(K)$.

Peut-on avoir $V_K \supset P_2(K)$?

Q. 2 Pour tout $i \in \mathrm{I}$, soient $a_{i-1,\,i}$ un point de d_i différent de a_{i-1} et de a_i, l'_i un élément de $\mathrm{P}_1(\mathbb{R}^2)$ tel que $l'_i(x) = 0$ soit une équation de la droite passant par les points $a_{i-1,\,i}$ et $a_{i,\,i+1}$, et soient w_i et $w_{i-1,\,i}$ les fonctions de K dans $\mathbb{R}$ définies par

$$
\text{(I.2)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\forall x \in \mathrm{K}, \quad w_i(x) = \mathrm{C}_i \, \frac{l_{i+2}(x)\; l_{i+3}(x)\; l'_i(x)}{l(x)}, \\ &\forall x \in \mathrm{K}, \quad w_{i-1,i}(x) = \mathrm{C}_{i-1,i} \, \frac{l_{i+1}(x)\; l_{i+2}(x)\; l_{i+3}(x)}{l(x)}, \end{aligned} \right.
$$

où C_i et $\mathrm{C}_{i-1,\,i}$ sont des constantes telles que $w_i(a_i) = 1$, $w_{i-1,\,i}(a_{i-1,\,i}) = 1$.

On désigne maintenant par $\mathrm{V_K}$ l'espace vectoriel engendré par l'ensemble $\{w_i,\ i \in \mathrm{I}\ ;\ w_{i-1,\,i},\ i \in \mathrm{I}\}$ et par Σ_K l'ensemble $\{a_i,\ i \in \mathrm{I}\ ;\ a_{i-1,\,i},\ i \in \mathrm{I}\}$.

Le triplet $(\mathrm{K}, \mathrm{V_K}, \Sigma_\mathrm{K})$ est-il un E.F. ?

A-t-il la propriété $\mathcal{F}_0$?

Existe-t-il $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{V_K} \supset \mathrm{P}_k(\mathrm{K})$ et $\mathrm{V_K} \not\supset \mathrm{P}_{k+1}(\mathrm{K})$?

II

Soient K défini comme au § 0., quelconque, et $\mathrm{G_K}$ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$
\text{(II.1)} \qquad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathrm{G_K}(\lambda) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\, b_3 .
$$

Soient $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ l'élément de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$
\text{(II.2)} \qquad \mathrm{G_K}(\xi) = a_4 ,
$$

et s l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$
\text{(II.3)} \qquad s(\hat{x}) = \xi_1 \hat{x}_1 + \xi_2 \hat{x}_2 + \xi_3 ,
$$

où l'on a posé $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ et $\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$ (on remarquera que $\xi_1 < 0$, $\xi_2 < 0$, $\xi_3 > 1$ et que, pour tout $\hat{x} \in \hat{\mathrm{K}}$, $s(\hat{x}) \geqslant 1$).

Soient enfin S la droite d'équation $s(\hat{x}) = 0$ et $\mathrm{H_K}$ l'application de $\complement_{\mathbb{R}^2} \mathrm{S}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$
\text{(II.4)} \qquad \forall \hat{x} \in \mathbb{R}^2,\ s(\hat{x}) \neq 0, \quad \mathrm{H_K}(\hat{x}) = \left(\frac{\xi_1 \hat{x}_1}{s(\hat{x})}, \frac{\xi_2 \hat{x}_2}{s(\hat{x})} \right).
$$

On considère alors l'application composée

$$
\text{(II.5)} \qquad \mathrm{F_K} = \mathrm{G_K} \circ \mathrm{H_K} .
$$

Q. 3 *a.* Vérifier que $\mathrm{F_K}$ est injective, que $\mathrm{F_K}(\hat{a}_4) = a_4$ et que $\mathrm{F_K}(0) = b_3$.

Montrer que, pour tout couple $(\hat{x}, x)$ de points de $\mathbb{R}^2$ tels que $l(x) \neq 0$ et $x = \mathrm{F_K}(\hat{x})$, on a

$$
\text{(II.6)} \qquad s(\hat{x}) = \frac{l(a_4)}{l(x)}
$$

et que l'image par $\mathrm{F_K}$ d'une droite (privée éventuellement d'un point) distincte de la droite S est une droite (privée éventuellement d'un point).

b. Montrer que $\mathrm{F_K}(\hat{a}_1) = a_1$, $\mathrm{F_K}(\hat{a}_2) = a_2$, $\mathrm{F_K}(\hat{a}_3) = a_3$ et que $\mathrm{F_K}(\hat{\mathrm{K}}) = \mathrm{K}$.

c. Vérifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\text{(II.7)}\quad \begin{aligned}&\left\{ \hat{v} : \hat{K} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; \exists\, v \in P_k(K),\; \forall\, \hat{x} \in \hat{K},\; \hat{v}(\hat{x}) = (v \circ F_K)(\hat{x}) \right\}\\ &= \left\{ \hat{v} \; ; \; \exists\, \hat{u} \in P_k(\hat{K}),\; \forall\, \hat{x} \in \hat{K},\; \hat{v}(\hat{x}) = \frac{\hat{u}(\hat{x})}{s^k(\hat{x})} \right\},\end{aligned}$$

$$\text{(II.8)}\quad \begin{aligned}&\left\{ v : K \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; \exists\, \hat{v} \in P_k(\hat{K}),\; \forall\, x \in K,\; v(x) = (\hat{v} \circ F_K^{-1})(x) \right\}\\ &= \left\{ v \; ; \; \exists\, u \in P_k(K),\; \forall\, x \in K,\; v(x) = \frac{u(x)}{l^k(x)} \right\}.\end{aligned}$$

Q. 4 Pour tout $i \in I$, on note

$$\hat{a}_{i,\,i,\,i+1} = \frac{2\,\hat{a}_i + \hat{a}_{i+1}}{3}\;, \qquad \hat{a}_{i,\,i+1,\,i+1} = \frac{\hat{a}_i + 2\,\hat{a}_{i+1}}{3}$$

et on désigne par $\hat{l}'_i$ (resp. par $\hat{\gamma}$) un élément de $P_1(\mathbb{R}^2)$ [resp. de $P_2(\mathbb{R}^2)$] tel que $\hat{l}'_i(\hat{x}) = 0$ (resp. $\hat{\gamma}(\hat{x}) = 0$) soit une équation de la droite passant par les points $\hat{a}_{i,\,i,\,i+1}$, et $\hat{a}_{i+2,\,i+3,\,i+3}$ (resp. du cercle passant par les huit points $\hat{a}_{i,\,i,\,i+1}$, $\hat{a}_{i,\,i+1,\,i+1}$, $i \in I$).

Pour tout $i \in I$, soient alors $\hat{w}_i$, $\hat{w}_{i,\,i,\,i+1}$ et $\hat{w}_{i,\,i+1,\,i+1}$ les fonctions de $\hat{K}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\text{(II.9)}\quad \begin{cases} \forall\, \hat{x} \in \hat{K}, & \hat{w}_i(\hat{x}) = \hat{C}_i\, \hat{l}_{i+2}(\hat{x})\, \hat{l}_{i+3}(\hat{x})\, \hat{\gamma}(\hat{x}), \\ \forall\, \hat{x} \in \hat{K}, & \hat{w}_{i,\,i,\,i+1}(\hat{x}) = \hat{C}_{i,\,i,\,i+1}\, \hat{l}_{i+2}(\hat{x})\, \hat{l}_{i+3}(\hat{x})\, \hat{l}_i(\hat{x})\, \hat{l}'_{i+2}(\hat{x}), \\ \forall\, \hat{x} \in \hat{K}, & \hat{w}_{i,\,i+1,\,i+1}(\hat{x}) = \hat{C}_{i,\,i+1,\,i+1}\, \hat{l}_{i+2}(\hat{x})\, \hat{l}_{i+3}(\hat{x})\, \hat{l}_i(\hat{x})\, \hat{l}'_i(\hat{x}), \end{cases}$$

où $\hat{C}_i$, $\hat{C}_{i,\,i,\,i+1}$, $\hat{C}_{i,\,i+1,\,i+1}$ sont des constantes telles que $\hat{w}_i(\hat{a}_i) = 1$, $\hat{w}_{i,\,i,\,i+1}(\hat{a}_{i,\,i,\,i+1}) = 1$, $\hat{w}_{i,\,i+1,\,i+1}(\hat{a}_{i,\,i+1,\,i+1}) = 1$.

On désigne par $V_{\hat{K}}$ l'espace vectoriel engendré par l'ensemble

$$\{ \hat{w}_i,\; i \in I \; ; \; \hat{w}_{i,\,i,\,i+1},\; i \in I \; ; \; \hat{w}_{i,\,i+1,\,i+1},\; i \in I \}$$

et par $\Sigma_{\hat{K}}$ l'ensemble

$$\{ \hat{a}_i,\; i \in I \; ; \; \hat{a}_{i,\,i,\,i+1},\; i \in I \; ; \; \hat{a}_{i,\,i+1,\,i+1},\; i \in I \}.$$

Montrer que $(\hat{K}, V_{\hat{K}}, \Sigma_{\hat{K}})$ est un E.F., qu'il a la propriété $\mathcal{F}_0$, que $V_{\hat{K}} \supset P_3(\hat{K})$ et que $V_{\hat{K}} \not\supset P_4(\hat{K})$.

Q. 5 Pour tout $i \in I$, on pose $a_{i,\,i,\,i+1} = F_K(\hat{a}_{i,\,i,\,i+1})$, $a_{i,\,i+1,\,i+1} = F_K(\hat{a}_{i,\,i+1,\,i+1})$ et on considère les fonctions w_i, $w_{i,\,i,\,i+1}$ et $w_{i,\,i+1,\,i+1}$ de K dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\text{(II.10)}\quad \begin{cases} \forall\, x \in K, & w_i(x) = C_i \left(\left(\dfrac{\hat{w}_i}{s^3} \right) \circ F_K^{-1} \right)(x), \\ \forall\, x \in K, & w_{i,\,i,\,i+1}(x) = C_{i,\,i,\,i+1} \left(\left(\dfrac{\hat{w}_{i,\,i,\,i+1}}{s^3} \right) \circ F_K^{-1} \right)(x), \\ \forall\, x \in K, & w_{i,\,i+1,\,i+1}(x) = C_{i,\,i+1,\,i+1} \left(\left(\dfrac{\hat{w}_{i,\,i+1,\,i+1}}{s^3} \right) \circ F_K^{-1} \right)(x), \end{cases}$$

où C_i, $C_{i,\,i,\,i+1}$, $C_{i,\,i+1,\,i+1}$ sont des constantes telles que $w_i(a_i) = 1$, $w_{i,\,i,\,i+1}(a_{i,\,i,\,i+1}) = 1$, $w_{i,\,i+1,\,i+1}(a_{i,\,i+1,\,i+1}) = 1$.

On désigne maintenant par V_K l'espace vectoriel engendré par l'ensemble

$$\{ w_i , \ i \in I ; \ w_{i,i,i+1} , \ i \in I ; \ w_{i,i+1,i+1} , \ i \in I \}$$

et par Σ_K l'ensemble

$$\{ a_i , \ i \in I ; \ a_{i,i,i+1} , \ i \in I ; \ a_{i,i+1,i+1} , \ i \in I \} .$$

a. Que peut-on dire du triplet (K, V_K, Σ_K) ?

b. Pour tout $i \in I$, exprimer w_i, $w_{i,i,i+1}$ et $w_{i,i+1,i+1}$ en fonction de l, d'éléments (que l'on précisera) de $P_1(\mathbb{R}^2)$ et de $P_2(\mathbb{R}^2)$ et de constantes convenables.

III

Soient $k \in \mathbb{N}$ et (K, V_K, Σ_K) un E.F. dont les nœuds sont notés a_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, les fonctions de base w_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, et l'opérateur d'interpolation Π_K. On suppose que l'E.F. est tel que

(III.1) $$V_K \supset P_k(K) .$$

On note $\overset{\circ}{K}$ l'intérieur de K. Pour tout $v \in C^{k+1}(K)$, pour tout $x \in \overset{\circ}{K}$ et pour tout $y \in \overset{\circ}{K}$, on pose

(III.2) $$R(k, v, x, y) = \frac{1}{k!} \int_0^1 (1 - t)^k D^{k+1} v(x + t(y - x)).(y - x)^{k+1} \, dt,$$

définition qui a un sens puisque K est convexe (pour tout $j \in \mathbb{N}$, $j \leqslant k + 1$, et pour tout $x \in \overset{\circ}{K}$, $D^j v(x)$ désigne la dérivée j-ème de v au point x, forme j-linéaire symétrique continue sur $(\mathbb{R}^2)^j$, et, pour tout $h \in \mathbb{R}^2$, $D^j v(x).(h)^j$ désigne la valeur de $D^j v(x)$ sur le multivecteur $(h, \ldots, h) \in (\mathbb{R}^2)^j$).

On rappelle que

(III.3) $$\forall v \in C^{k+1}(K), \ \forall x \in \overset{\circ}{K}, \ \forall y \in \overset{\circ}{K}, \quad R(k, v, x, y) = v(y) - \sum_{j=0}^{k} \frac{D^j v(x).(y - x)^j}{j!} .$$

Q. 6 Pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$,
on note $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ et $\alpha ! = \alpha_1 ! \, \alpha_2 !$.

a. Partant de la relation

(III.4) $$\forall x \in \overset{\circ}{K}, \ \forall z \in \overset{\circ}{K}, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, \ |\alpha| \leqslant k, \ \sum_{i=1}^{N} (a_i - z)^\alpha \, w_i(x) = (x - z)^\alpha ,$$

montrer que

(III.5) $$\forall x \in \overset{\circ}{K}, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, \ |\alpha| \leqslant k, \ \forall \beta \in \mathbb{N}^2, \ \sum_{i=1}^{N} (a_i - x)^\alpha \, \partial^\beta w_i(x) = \alpha ! \, \delta_{\alpha\beta} ,$$

où, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $\delta_{\alpha\alpha} = 1$ et $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\beta \neq \alpha$.

b. En déduire que, pour tout $v \in C^{k+1}(K)$,

(III.6) $$\forall x \in \overset{\circ}{K}, \ \forall \beta \in \mathbb{N}^2, \ |\beta| \leqslant k, \ \partial^\beta (\Pi_K v - v)(x) = \sum_{i=1}^{N} R(k, v, x, a_i) \, \partial^\beta w_i(x) .$$

c. Montrer alors qu'il existe une constante positive $\mathscr{C}(k)$ telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant k$,

(III.7) $$\forall v \in C^{k+1}(K), \ |v - \Pi_K v|_{m,\infty,K} \leqslant \frac{\mathscr{C}(k)}{(k+1)!} \left(\sum_{i=1}^{N} |w_i|_{m,\infty,K} \right) |v|_{k+1,\infty,K} \, h_K^{k+1} .$$

Q. 7 Établir un résultat analogue à (III.7) pour $m = k + 1$.

IV

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, supposé être l'intérieur d'un polygone fermé, et $\mathcal{H}$ un ensemble de réels strictement positifs. Pour tout $h \in \mathcal{H}$, on se donne une « *triangulation* » $\mathcal{C}_h$ de $\overline{\Omega}$, *i.e.* un ensemble de quadrilatères fermés K (convexes, à côtés deux à deux opposés non parallèles) de diamètres $h_K \leqslant h$, tel que $\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{C}_h} K$ et que l'intersection de deux éléments distincts quelconques K_1 et K_2 de l'ensemble $\mathcal{C}_h$ soit ou bien vide, ou bien réduite à un sommet commun, ou bien réduite à un côté commun.

Pour tout $h \in \mathcal{H}$ et pour tout $K \in \mathcal{C}_h$, on convient d'appeler *E.F. de degré 1* tout E.F. du type défini en **Q. 1**, *E.F. de degré 2* tout E.F. du type introduit en **Q. 2**, avec le choix particulier suivant des points $a_{i-1,\,i}$:

$$\text{(IV.1)} \qquad \forall\, i \in I,\ \hat{a}_{i-1,\,i} = \frac{1}{2}\left(\hat{a}_{i-1} + \hat{a}_i\right),\ a_{i-1,\,i} = F_K\left(\hat{a}_{i-1,\,i}\right),$$

et *E.F. de degré 3* tout E.F. du type défini en **Q. 5**.

On ne perdra pas de vue que, quel que soit l'E.F. (K, V_K, Σ_K) de degré 1, 2 ou 3 considéré, K est un élément quelconque d'un ensemble $\mathcal{C}_h$ qui est lui-même un élément quelconque de la famille $(\mathcal{C}_h)_{h \in \mathcal{H}}$, même si, par souci de simplification, on conserve les notations *locales* précédemment introduites concernant les sommets de K, les droites joignant les sommets de K, etc., ainsi que celles concernant les nœuds et les fonctions de base de l'E.F. (K, V_K, Σ_K). Cependant, pour éviter toute ambiguïté, on notera dorénavant d_K au lieu de d et s_K au lieu de s.

Dans la suite, la même notation C désignera diverses constantes strictement positives, dépendant éventuellement de k (le degré de l'E.F. considéré : $k \in \{1, 2, 3\}$) et de m (l'indice de la semi-norme $|\cdot|_{m,\,\infty,\,K} : m \in \{0, 1, \ldots, k+1\}$) mais *ne dépendant en aucun cas de $h \in \mathcal{H}$ et de $K \in \mathcal{C}_h$*.

On dira que la famille $(\mathcal{C}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ de triangulations de $\overline{\Omega}$ est *régulière* si elle vérifie les deux hypothèses

$$\text{(IV.2)} \qquad \exists\, \sigma > 0,\ \forall h \in \mathcal{H},\ \forall K \in \mathcal{C}_h,\ \frac{h_K}{\rho_K} \leqslant \sigma,$$

$$\text{(IV.3)} \qquad \exists\, \nu > 0,\ \forall h \in \mathcal{H},\ \forall K \in \mathcal{C}_h,\ \delta(K, d_K) \geqslant \nu\, h_K .$$

(Pour tout $A \subset \mathbb{R}^2$, pour tout $B \subset \mathbb{R}^2$ [resp. pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, pour tout $B \subset \mathbb{R}^2$], on désigne par $\delta(A, B)$ [resp. par $\delta(x, B)$] le nombre $\inf\limits_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \delta(x, y)$ [resp. le nombre $\inf\limits_{y \in B} \delta(x, y)$].)

Q. 8 On considère ici un E.F. *de degré 1* (les notations restent celles de **Q. 1**).

a. Vérifier que

$$\text{(IV.4)} \qquad \forall\, i \in I,\ |w_i|_{0,\,\infty,\,K} = 1 .$$

b. Montrer que

$$\text{(IV.5)} \qquad \forall\, i \in I,\ |w_i|_{1,\,\infty,\,K} \leqslant \frac{1}{\delta(a_i, d_{i+2})} + \frac{1}{\delta(a_i, d_{i+3})} + \frac{1}{\delta(a_i, d)}$$

c. En déduire que, si $(\mathcal{C}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ vérifie (IV.3), il existe une constante C telle que

$$\text{(IV.6)} \qquad \forall\, i \in I,\ |w_i|_{1,\,\infty,\,K} \leqslant \frac{C}{\rho_K} .$$

Que devient alors la relation (III.7) dans le cas d'un E.F. de degré 1, lorsque $(\mathcal{C}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ est régulière ?

Q. 9 Dans cette question, on suppose que $\overline{\Omega}$ est un *carré fermé* et que la famille de triangulations $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ est telle que, pour tout $h \in \mathcal{H}$, $\overline{\Omega}$ s'exprime comme réunion de carrés fermés égaux (à un déplacement près) $\mathcal{K}$, chaque $\mathcal{K}$ étant lui-même la réunion de quatre quadrilatères fermés K égaux (à un déplacement près). Donc (cf. fig. 2), pour tout $h \in \mathcal{H}$, $\mathcal{T}_h$ est constitué d'éléments K égaux (à un déplacement, ou au composé d'un déplacement et d'une symétrie, près) et on désigne alors par $\mathcal{T}_h^*$ l'un quelconque des huit sous-ensembles de $\mathcal{T}_h$ formé de ceux des éléments K qui se déduisent les uns des autres par *translation*.

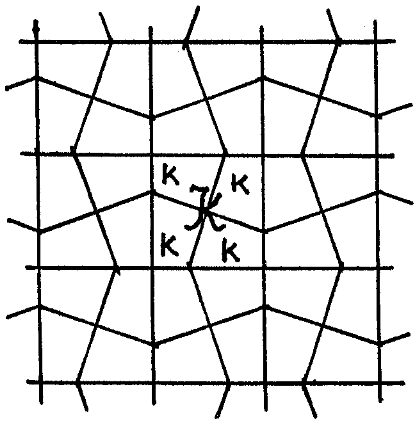

Figure 2

Montrer qu'il existe une fonction $\Psi^* \in P_2(\mathbb{R}^2)$ et une constante $C > 0$ telles que

(IV.7) $$\forall h \in \mathcal{H}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^*, \qquad |\Psi^* - \Pi_K \Psi^*|_{2,\infty,K} \geqslant C,$$

où Ψ^* est mis pour $\Psi^*|_K$ et où Π_K est l'opérateur d'interpolation de l'E.F. *de degré 1* (K, V_K, Σ_K).

Q. 10 On suppose que $\overline{\Omega}$ est un polygone fermé quelconque et que la famille $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ vérifie (IV.2).

Déterminer deux carrés fermés $\hat{K}_1$ et $\hat{K}_2$, avec $\hat{K}_1 \subset \hat{K}_2$, tels que, pour tout $h \in \mathcal{H}$, pour tout $K \in \mathcal{T}_h$ et pour tout $r \in \mathbb{N}$,

(IV.8) $$\forall \Psi \in P_r(K), \Psi \neq 0, \exists \hat{\Psi} \in P_r(\hat{K}_2), \ \frac{|\Psi|_{1,\infty,K}}{|\Psi|_{0,\infty,K}} \leqslant \frac{1}{\rho_K} \frac{|\hat{\Psi}|_{1,\infty,\hat{K}_2}}{|\hat{\Psi}|_{0,\infty,\hat{K}_1}}.$$

En déduire que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, il existe une constante $M(r, \sigma) > 0$, où σ est la constante introduite en (IV.2), telle que :

(IV.9) $$\forall h \in \mathcal{H}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \Psi \in P_r(K), \ |\Psi|_{1,\infty,K} \leqslant \frac{M(r,\sigma)}{\rho_K} |\Psi|_{0,\infty,K}.$$

Q. 11 On suppose que $\overline{\Omega}$ est un polygone fermé quelconque et que la famille $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ est régulière.

Soit (K, V_K, Σ_K) un E.F. *de degré k*, $k \in \{1, 2, 3\}$, quelconque. On continue de noter w_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, ses fonctions de base et Π_K sont opérateur d'interpolation.

a. ~~Vérifier~~ que

(IV.10) $$\forall h \in \mathcal{H}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \hat{x} \in \hat{K}, \qquad s_K(\hat{x}) \leqslant 1 + \frac{1}{\nu},$$

où ν est la constante introduite en (IV.3).

b. Montrer que, pour tout $k = 1, 2, 3$, il existe une constante C telle que

(IV.11) $$\forall i = 1, \ldots, N, \qquad |w_i|_{0,\infty,K} \leqslant C.$$

c. Montrer que, pour tout $k = 1, 2, 3$ et pour tout $m = 0, 1, \ldots, k+1$, il existe une constante C telle que

(IV.12) $$\forall i = 1, \ldots, N, \qquad |w_i|_{m,\infty,K} \leqslant \frac{C}{\rho_K^m}.$$

En déduire, pour un E.F. de degré k, $k \in \{1, 2, 3\}$, et lorsque $(\mathcal{T}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ est régulière, des majorations des quantités $|v - \Pi_K v|_{m,\infty,K}$ (où $0 \leqslant m \leqslant k+1$ et $v \in C^{k+1}(K)$) ne dépendant que de v, de h_K, de k et de m.

RECTIFICATIF

A LIRE AUX CANDIDATS DES LA DISTRIBUTION DES SUJETS

1 - Page 2 à la fin de l'alinéa commençant par "on appellera élément fini"

au lieu de :

$$w_i(a_j) = \delta_{ij},$$

où $\delta_{i,j} = 0$, si $j \neq i$, et $\delta_{i,i} = 0$ pour tout i ($1 \leqslant i \leqslant N$).

il convient de lire :

$$w_i(a_j) = \delta_{ij},$$

où $\delta_{i,j} = 0$, si $j \neq i$, et $\delta_{i,i} = 1$ pour tout i ($1 \leqslant i \leqslant N$).

2 - Page 8 à la 3e ligne de Q.11, lire :

..."ses fonctions de base et Π_K <u>son</u> opérateur d'interpolation.

(<u>son</u>, et non sont)

RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE NUMERIQUE

1. Thème du sujet

Le sujet proposé cette année portait sur certains aspects de la méthode des éléments finis, théorie qui s'est beaucoup développée depuis une dizaine d'années et occupe actuellement une place importante en analyse numérique. Plus précisément, il s'agissait d'étudier la construction et les propriétés d'éléments finis de type rationnel (et non de type polynomial, comme le sont les éléments finis usuels) récemment introduits par E.L. Wachspress.

Bien entendu, aucune connaissance préalable sur la méthode des éléments finis n'était requise (l'option analyse numérique ne possède d'ailleurs pas de programme spécifique !).

2. Observations générales

Les résultats obtenus par les candidats apparaîssent cette année moins décevants que lors des années précédentes. Mais il serait peut-être illusoire de voir là l'indication d'un renouveau d'intérêt pour l'analyse numérique, la vérité étant sans doute que les candidats ont su, avec plus ou moins de bonheur, tirer parti du caractère relativement technique des six premières questions. D'ailleurs les questions suivantes, plus difficiles et nécessitant de l'imagination, n'ont jamais été traitées correctement, en particulier les questions **Q.7** et **Q.8** pourtant abordées dans un nombre non négligeable de copies. Les questions **Q.9, Q.10** et **Q.11** n'ont pas été étudiées, peut-être par manque de temps, et ont été mises hors barême.

Les correcteurs ont souvent relevé, au I, l'utilisation erronée du principe du prolongement analytique : un trop grand nombre de candidats affirme (s'agit-il là d'une confusion avec le cas des fonctions analytiques d'une variable réelle ou complexe ?) «qu'une fonction polynôme p de deux variables réelles nulle sur la frontière du quadrilatère K est partout nulle» ; d'autres candidats invoquent un pseudo-théorème du maximum, la même erreur se retrouvant également en **Q.8.** Il était pourtant simple de constater qu'alors $p = \mathrm{C}\, l_1\, l_2\, l_3\, l_4$ avec C = fonction polynôme, et de raisonner sur les degrés.

La question **Q.6** et, lorsqu'elles ont été abordées, les questions **Q.7** et **Q.8** font apparaître une méconnaissance inquiétante des notions fondamentales du calcul différentiel. Un exemple suffit à illustrer la situation rencontrée dans beaucoup de copies : à de rares exceptions près, les candidats qui ont essayé d'établir la relation (III-6) se sont livrés à toutes sortes de manipulations douteuses pour obtenir le résultat, certains même n'hésitant pas à traiter les formes j– linéaires $\mathrm{D}^j\, v\,(x)$ et les j - vecteurs $(h)^j$ comme des scalaires !

3. Observations détaillées sur les questions traitées par les candidats

Q.1 - a : dans la plupart des copies on admet implicitement que les fonctions w_i appartiennent à $\mathrm{C}^{\infty}(\mathrm{K})$ au sens de la définition de l'énoncé, mais quelques candidats soigneux invoquent justement le théorème d'Urysohn.

Q.1 - b : pour vérifier que $\psi - \Pi_{\mathrm{K}}\,\psi$ s'annule sur la frontière de K, certains candidats ont voulu utiliser la propriété $\mathcal{F}_0$ qui nécessite malheureusement la condition $\mathrm{V}_{\mathrm{K}} \supset \mathrm{P}_1\,(\mathrm{K})$ que l'on demande précisément de démontrer aussitôt après. Pour montrer que $\psi - \Pi_{\mathrm{K}}\,\psi$ s'annule sur K tout entier, on note que $\psi - \Pi_{\mathrm{K}}\,\psi$ est de la forme $\dfrac{p}{l}$, avec $p \in \mathrm{P}_2\,(\mathrm{K})$ et on en déduit que $p = 0$ en suivant le raisonnement indiqué au paragraphe 2. Peu de candidats (et cette remarque vaut également pour les questions **Q.2, Q.4** et **Q.5**) ont vu que, pour vérifier que $\mathrm{V}_{\mathrm{K}} \not\supset \mathrm{P}_2\,(\mathrm{K})$, il suffit de raisonner sur les dimensions : ici $\dim \mathrm{V}_{\mathrm{K}} = 4$, $\dim \mathrm{P}_2\,(\mathrm{K}) = 6$.

Q.2 : de très rares candidats remarquent opportunément que, pour que (K, V_K, Σ_K) soit un élément fini, il faut par définition que les points $a_{i-1,i}$ appartiennent à K et, par conséquent, soient situés entre a_{i-1} et a_i.

On montre alors, comme en **Q.1**, que (K, V_K, Σ_K) à la propriété $\mathcal{F}_0$, que $V_K \supset P_2(K)$ et que $V_K \not\supset P_3(K)$.

Q.3 : cette question, de nature plus géométrique que numérique, mais dont les résultats sont indispensables pour la suite du problème, a été traitée, avec des fortunes diverses, par la quasi-totalité des candidats. Quelques-uns prennent le temps de vérifier les inégalités $\xi_1 < 0$, $\xi_2 < 0$, $\xi_3 > 1$, $s(\hat{x}) \geqslant 1$, indiquées dans l'énoncé. L'injectivité de F_K et la relation (II-6) n'ont généralement pas gêné les candidats. En revanche les relations demandées au b) n'ont été établies correctement que dans un nombre réduit de copies. De même, les égalités ensemblistes du c) ont donné lieu à beaucoup de verbiage et, le plus souvent, on a seulement montré une inclusion.

Q.4 : la seule difficulté de la question était de vérifier que $V_{\hat{K}} \supset P_3(\hat{K})$: elle n'a été résolue que par un tout petit nombre de candidats. Pour montrer le résultat, on peut noter que, si $\hat{\psi} \in P_3(\hat{K})$, alors $\hat{\phi} = \hat{\psi} - \Pi_{\hat{K}}\hat{\psi}$ est nulle sur la frontière de $\hat{K}$, puisque polynomiale du 3e degré sur chaque côté de $\hat{K}$. On en déduit alors que $\hat{\phi} = \hat{C}\,\hat{l}_1\,\hat{l}_2\,\hat{l}_3\,\hat{l}_4$, avec nécessairement $\hat{C}$ = constante car $\hat{\phi} \in P_4(\hat{K})$. Il suffit alors de considérer les monômes en $\hat{x}_1^2\ \hat{x}_2^2$ dans la relation précédente pour obtenir $\hat{C} = 0$.

Q.5 - a : on ne peut se contenter de dire, comme certains candidats, que le résultat est évident vu que l'application F_K établit «un isomorphisme entre les triplets $(\hat{K}, V_{\hat{K}}, \Sigma_{\hat{K}})$ et (K, V_K, Σ_K)»! Si l'on effectue les vérifications nécessaires, en utilisant évidemment les résultats de **Q.4**, on montre que (K, V_K, Σ_K) est un élément fini, qu'il a la propriété $\mathcal{F}_0$, que $V_K \supset P_3(K)$ et que $V_K \not\supset P_4(K)$.

Q.5 - b : il s'agissait en fait d'obtenir une représentation locale (i. e. ne dépendant que de K et de Σ_K) des fonctions de base. Soit l'_i [resp. γ] un élément de $P_1(\mathbf{R}^2)$ [resp. de $P_2(\mathbf{R}^2)$] tel que $l'_i(x) = 0$ soit une équation de la droite passant par les points $a_{i,i,i+1}$ et $a_{i+2,i+3,i+3}$ [resp. tel que : $\forall x \in K,\ \gamma(x) = l^2(x)\,(\hat{\gamma}_0\, F_K^{-1})(x)$]. On vérifie d'ailleurs que $\gamma(x) = 0$ est une équation de la conique passant par les huit points $a_{i,i,i+1}$ et $a_{i,i+1,i+1}$. Procédant comme au a), on obtient les expressions

$$\forall x \in K,\ \omega_i(x) = C'_i\ \frac{l_{i+2}(x)\, l_{i+3}(x)\, \gamma(x)}{l(x)},$$

$$\forall x \in K,\ \omega_{i,i,i+1}(x) = C'_{i,i,i+1}\ \frac{l_{i+2}(x)\, l_{i+3}(x)\, l_i(x)\, l'_{i+2}(x)}{l(x)}$$

$$\forall x \in K,\ \omega_{i,i+1,i+1} = C'_{i,i+1,i+1}\ \frac{l_{i+2}(x)\, l_{i+3}(x)\, l_i(x)\, l'_i(x)}{l(x)},$$

où C'_i, $C'_{i,i,i+1}$, $C'_{i,i+1,i+1}$ sont telles que $\omega_i(a_i) = 1$, $\omega_{i,i,i+1}(a_{i,i,i+1}) = 1$, $\omega_{i,i+1,i+1}(a_{i,i+1,i+1}) = 1$.

Q.6 - a : ainsi que l'ont remarqué plusieurs candidats, la relation (III - 4) donnée dans l'énoncé est conséquence immédiate du fait que la fonction $x \mapsto (x-z)^{\alpha}$ appartient à P_K (K), donc à V_K. La relation (III - 5) a, assez souvent, été établie correctement.

Q.6 - b : les commentaires concernant cette question ont été donnés au paragraphe 2. Pour montrer le résultat, il suffit de noter que :

$$\forall x \in \overset{\circ}{K}, \forall h \in \mathbf{R}^2, \sum_{|\alpha| \leqslant k} \frac{\partial^{\alpha} v(x)}{\alpha !} h^{\alpha} = \sum_{j=0}^{k} \frac{D^j(x) . (h)^j}{j!}$$

Q.6 - c : la relation (III - 7), qui résulte pourtant de majorations standard, n'a le plus souvent été établie qu'au moyen de calculs plus ou moins approximatifs. Beaucoup de candidats obtiennent $\mathscr{C}(k) = 1$, ce qui étonne cependant certains d'entre eux (pour mémoire, indiquons que l'on peut prendre $\mathscr{C}(k) = 2^{\frac{k+1}{2}}$).

Q.7 : la majoration demandée s'écrit

$$|v - \Pi_K v|_{k+1, \infty, K} \leqslant \mathscr{C}(k) \, |v|_{k+1, \infty, K} \left\{ \frac{1}{(k+1)!} \Big(\sum_{i=1}^{N} |\omega_i|_{k+1, \infty, K} \Big) h_K^{k+1} + \frac{1}{k!} \Big(\sum_{i=1}^{N} |\omega_i|_{k, \infty, K} \Big) h_K^{k} \right\}$$

Pour l'obtenir, on dérive (III-6), avec $\beta \in N^2$, $|\beta| = k$, par rapport à x_j, $j = 1,2$, et on tient compte de la relation (déduite de la formule de Taylor) :

$$D\,R(k, v, x, a_i) = - \frac{D^{k+1} v(x) . (a_i - x)^k}{k!}$$

Q.8 - a : cette question a donné lieu à des réponses fantaisistes. En fait il suffisait de remarquer que, puisque la fonction $x \mapsto 1$ appartient à V_K, on a : $\forall x \in K, \sum_{i \in I} \omega_i(x) = 1$. Comme les w_i sont positives et que $w_i(a_i) = 1$, le résultat suit.

Q.8 - b : le calcul est simplifié si l'on considère, ce qui est loisible, que l et l_i, $i \in I$, qui sont *a priori* définis à un facteur arbitraire près, ont en fait été choisis positifs et tels que $\| Dl \| = 1$, $\| Dl_i \| = 1$. Pour montrer (IV-5), on majore alors $\| D\, w_i(x) \|$ en remarquant géométriquement que : $\forall j = i+2, i+3$,

$$\sup_{x \in K} \frac{l_j(x)}{l(x)} = \frac{\delta(a_i, d_j)}{\delta(a_i, d)}$$

Q.8 - c : par des considérations de géométrie élémentaire, on obtient (IV -6) avec $C = \frac{3\gamma}{1+\gamma}$. Quant à la relation (III-7), elle s'écrit ici, pour $m = 0,1$:

$$\forall v \in C^2(K), \; |v - \Pi_K v|_{m, \infty, K} \leqslant 2\sigma \; \mathscr{C}(k) \, |v|_{2, \infty, K} \, h_K^{2-m}$$

4 – Les notes (sur 40)

Nombre de copies corrigées : 816.

140 copies atteignent la moyenne.
48 copies ont obtenu la note 0.

Répartition des notes :

0 à 4	5 à 9	10 à 14	15 à 19	20 à 24	25 à 29	30 à 34	35 à 40
238	149	165	124	74	36	14	16