COMPOSITION D'ANALYSE

Sujet (durée : 6 heures)

Les résultats utilisés devront être énoncés avec précision. La rigueur des démonstrations et le soin apporté à leur rédaction seront des éléments importants d'appréciation.

Les définitions et les notations introduites dans la partie I servent tout au long du problème.

Les parties II et III sont indépendantes.

On note $\mathbb{R}$ (Resp. $\mathbb{C}$) le corps des réels (Resp. Complexes). Il est supposé muni de la distance associée à la valeur absolue (Resp. le module).

Pour tout nombre complexe z, on note respectivement $\operatorname{Re} z$ et $\operatorname{Im} z$ ses parties réelle et imaginaire, et $\bar{z}$ son conjugué.

On note :

$\mathbb{R}^+$ l'ensemble $\{ x \mid (x \in \mathbb{R}) \text{ et } (x \geqslant 0) \}$
$\mathbb{R}^-$ l'ensemble $\{ x \mid (x \in \mathbb{R}) \text{ et } (x \leqslant 0) \}$
$\mathbb{R}^*$ l'ensemble $\{ x \mid (x \in \mathbb{R}) \text{ et } (x \neq 0) \}$
$\mathbb{R}^{+*}$ l'ensemble $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^*$
$\mathbb{R}^{-*}$ l'ensemble $\mathbb{R}^- \cap \mathbb{R}^*$

Tout espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ est désigné par la même lettre que l'ensemble de ses éléments.

On note :

E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

E_0 le sous-espace de E formé par les applications constantes.

E_1 le sous-espace de E formé par les applications nulles en chaque point de $\mathbb{R}^-$.

E_2 le sous-espace de E formé par les applications nulles en chaque point de $\mathbb{R}^+$.

Pour tout espace vectoriel V, 1_V désigne l'application identique de V.

Partie I

1° Démontrer que E est somme directe de E_0, E_1, E_2.

Pour α, β, γ, deux à deux distincts, éléments de $\{0, 1, 2\}$, on note $p_\alpha : E \to E$ l'endomorphisme de projection sur E_α parallèlement à $E_\beta \oplus E_\gamma$.

2° A tout élément f de E, on associe l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$

$$g(0) = f(0)$$

Démontrer que g appartient à E.

3° On note Φ le $\mathbb{C}$-endomorphisme de E, qui à f associe g.

Φ est-il injectif?

Φ est-il surjectif?

Un sous-espace F de E est dit stable par Φ si et seulement si $\Phi(F) \subset F$; dans ce cas, l'application de F dans F, induite par Φ, est un endomorphisme de F.

4° Démontrer que, pour tout élément α de $\{0, 1, 2\}$, E_α est stable par Φ et que $p_\alpha \circ \Phi = \Phi \circ p_\alpha$; on note alors Φ_α l'endomorphisme de E_α induit par Φ.

Partie II

1° Soit λ un nombre complexe non nul.

Déterminer toutes les applications dérivables f de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad \lambda x f'(x) + (\lambda - 1) f(x) = 0$$

2° Déterminer avec soin l'ensemble S des valeurs propres de Φ_1 (cf. I, 4°), puis l'ensemble T des valeurs propres de Φ. Représenter graphiquement, dans le plan complexe, les ensembles S et T; on en précisera les points non intérieurs.

3° Pour tout λ dans S (Resp. T), on note E_1^λ (Resp. E^λ) le sous-espace propre de Φ_1 (Resp. Φ) associé à la valeur propre λ.

Pour tout λ dans S déterminer une base de E_1^λ.
Pour tout λ dans T déterminer une base de E^λ.

4° Pour tout λ dans S (Resp. T), pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $F_1^\lambda(n)$ (Resp. $F^\lambda(n)$) le sous-espace de E_1 (Resp. E) défini par :

$$F_1^\lambda(n) = \operatorname{Ker}(\Phi_1 - \lambda 1_{E_1})^n$$
$$(\text{Resp. } F^\lambda(n) = \operatorname{Ker}(\Phi - \lambda 1_E)^n)$$

On pose $F_1^\lambda = \bigcup_{n \geqslant 1} F_1^\lambda(n)$

et $F^\lambda = \bigcup_{n \geqslant 1} F^\lambda(n)$

Pour tout λ dans S, déterminer une base de F_1^λ.
Pour tout λ dans T, déterminer une base de F^λ.

5° *a*. Soit λ un élément de S ; déterminer tous les sous-espaces de F_1^λ stables par Φ_1.

En déduire une caractérisation de tous les sous-espaces de E_1 de dimension finie, stables par Φ_1.

b. Tout sous-espace H de E, de dimension finie, stable par Φ, est-il somme directe d'un sous-espace H_1 de E_1 et d'un sous-espace H_2 de E_2 stables par Φ ?

Partie III

On note A, B, C les sous-espaces vectoriels de E suivants :

$$A = \{ f \mid (f \in E) \quad \text{et} \quad (\lim_{x \to +\infty} f = 0) \quad \text{et} \quad (\lim_{x \to -\infty} f = 0) \}$$

$$B = \{ f \mid (f \in E) \quad \text{et} \quad (f \text{ est uniformément continue sur } \mathbb{R}) \}$$

$$C = \left\{ f \mid (f \in E) \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx < +\infty) \right\}$$

1° Déterminer toutes les inclusions concernant les ensembles A, B, C. (On demande donc six démonstrations; chaque inclusion ou non-inclusion devant être justifiée).

2° Comparer, toujours du point de vue de l'inclusion, A à $B \cap C$.

3° Démontrer que, pour tout élément f de B, il existe un couple (a, b) de réels tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |f(x)| \leqslant a|x| + b$$

4° Les ensembles A, B, C, $A \cap C$ sont-ils stables par Φ ? Justifier chaque réponse par une démonstration.

PARTIE IV

On note D l'ensemble $\left\{ f \mid (f \in \mathrm{E}) \text{ et } \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx < +\infty \right) \right\}$

1° *a*. Prouver que D est un sous-espace vectoriel de E.

b. Comparer, du point de vue de l'inclusion, D à chacun des ensembles A, B, C (justifier chacune des six réponses.)

2° Pour tout couple (f, g) d'éléments de D, on pose

$$< f \mid g > = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, \overline{g(x)} \, dx$$

Vérifier que la forme hermitienne $(f, g) \longmapsto < f \mid g >$ est définie positive.

Pour tout élément f de D, on pose :

$$\|f\| = < f \mid f >^{\frac{1}{2}}$$

3° Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Soit f un élément de D, on pose $g = \Phi(f)$. Démontrer que :

$$\int_a^b |g(x)|^2 dx \leqslant a|g(a)|^2 + 2\left[\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx \, . \int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

4° Démontrer que D est stable par Φ.

5° Démontrer que : $\forall f \in \mathrm{D} \quad \| \Phi(f) \|^2 = 2 \operatorname{Re} < \Phi(f) \mid f >$

6° On munit D de la norme $\| \ \|$. On note Φ_{D} l'endomorphisme de D induit par Φ.

a. Prouver que Φ_{D} est continu et que, pour tout f dans D, on a :

$$\| \Phi_{\mathrm{D}}(f) \| \leqslant 2 \|f\|$$

b. Démontrer que

$$\operatorname{Sup} \{ \| \Phi_{\mathrm{D}}(f) \| \mid (f \in \mathrm{D}) \text{ et } (\|f\| = 1) \} = 2$$

7° Démontrer le résultat plus précis suivant :

$$(\forall f \in \mathrm{D}) \quad (f \neq 0 \Rightarrow \| \Phi_{\mathrm{D}}(f) \| < 2 \|f\|)$$

RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE

1. Remarques générales

Le problème a pour thème l'étude de l'endomorphisme de l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, défini par $\Phi : f \mapsto g$ avec $g(0) = f(0)$ et pour $x \neq 0$

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt$$

Les deux premières parties portent sur l'étude algébrique de l'endomorphisme : détermination des éléments propres et de certains sous-espaces stables de dimension finie.

La troisième partie, composée essentiellement de question de cours (niveau DEUG) et le début de la quatrième partie, portent sur la comparaison (au sens de l'inclusion) de quelques sous-espaces et l'étude de leur stabilité par Φ.

La fin de la quatrième partie conduit à la formule de Hardy-Littlewood et à la détermination de la norme de Φ_D (Restriction de Φ à l'espace des fonctions continues de carré sommable).

2. Remarques sur la résolution et la correction

Les fonctions étaient prises à valeurs dans $\mathbb{C}$, ce qui excluait bien sûr l'emploi de la formule de la moyenne ou des accroissements finis sous leur forme réelle, erreur souvent commise.

Première partie

Même dans ces questions d'une extrême simplicité les candidats ont, pour la plupart, commis des erreurs inadmissibles de la part de titulaires de la maîtrise, voire du C.A.P.E.S. : pour démontrer qu'une somme de trois sous-espaces est directe, un candidat sur deux se contente de vérifier que les intersections deux à deux sont réduites à $\{0\}$; d'autres prétendent que :

$f \mapsto \int_a^b f(x)\, dx$ est injective...

Deuxième partie

Les deux dernières questions n'ont été abordées que dans les meilleures copies ; dans beaucoup de cas cette partie n'a pas été traitée.

On aurait aimé voir résolue proprement l'équation différentielle ; on pouvait :

- soit remarquer que si f est solution, l'application $x \mapsto x^{\frac{\lambda - 1}{\lambda}} f(x)$ est à dérivée nulle sur $]0, +\infty[$
- soit, après avoir constaté que l'équation est linéaire du premier degré, sans singularités sur $]0, +\infty[$, remarquez que $x \mapsto x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ est solution.

Bien peu signalent que 0 n'est pas valeur propre puisque Φ_1 est injective.

La condition $\mathrm{R}e\,(\frac{1-\lambda}{\lambda}) > 0$ est en général obtenue par ceux qui abordent la recherche des valeurs propres de Φ_1, mais la réciproque est rarement étudiée.

La représentation graphique de S (disque ouvert de centre 1/2 et de rayon 1/2) est souvent surprenante : on rencontre des ellipses, des carrés, des hyperboles construites souvent point par point.

Les questions (4) et (5), une fois utilisée la méthode de variation de la constante, étaient purement algébriques, la seule difficulté se situant au niveau de la mise en forme des récurrences.

Troisième partie

Les inclusions (ou non inclusions) relevaient du cours du DEUG ; seule $A \subset B$ était vraie.

Les contre-exemples usuels semblent mal connus ; il est tout de même surprenant que des agrégatifs puissent ignorer l'existence de fonctions continues, sommables n'ayant pas pour limite 0 à l'infini.

Pour prouver que $B \cap C$ est strictement inclus dans A il suffisait, en supposant que f n'a pas pour limite 0 à l'infini, de nier le critère de Cauchy relatif à la convergence de

$\int_0^x |f(t)|\,dt$ en utilisant l'uniforme continuité de f.

La majoration $|f(x)| \leqslant a\,|x| + b$ (pour f uniformément continue) devrait être connue des candidats ; certains prétendent que toute application uniformément continue est lipschitzienne.

La stabilité de B par Φ pouvait s'obtenir en isolant l'origine dans $[-2, 2]$ par exemple, et en utilisant la majoration (3) dans $]-\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$; certains ont remarqué que

$\Phi(f)(x) = \int_0^1 f(tx)\,dt$ ce qui conduisait à une autre solution.

Le choix de $x \to \dfrac{1}{1+x^2}$ prouvait que ni A ni $A \cap C$ n'étaient stables par Φ.

Quatrième partie

Très peu de candidats ont dépassé la seconde question. Dans de nombreuses copies on trouve l'étrange majoration $(a+b)^2 \leqslant a^2 + b^2$ utilisée pour prouver que D est un espace vectoriel.

Il n'existe aucune relation d'inclusion entre D et A, B, C ; là encore les contre-exemples usuels ont fait défaut.

La majoration de la troisième question était peut-être plus délicate, elle s'obtenait à l'aide d'une intégration par parties suivie de l'utilisation de la relation de Schwarz.

L'égalité du (5) reposait sur le lemme suivant : si f est de carré sommable

$x \to \dfrac{1}{\sqrt{x}} \displaystyle\int_0^x |f(t)|\,dt$ a pour limite 0 quand x tend vers l'infini ; ceci a été perçu par les meilleurs candidats.

Pour calculer la norme de Φ_D ((6) b)) on pouvait envisager l'étude de la famille de fonctions $(f_\alpha)_{1/2 < \alpha < 1}$ définie par :

Pour $|x| \leqslant 1$ $\quad f_\alpha(x) = 1$

$|x| > 1$ $\quad f_\alpha(x) = \dfrac{1}{|x|^\alpha}$

On calculait $\dfrac{\|\Phi(f_\alpha)\|}{\|f_\alpha\|}$ et l'on faisait tendre α vers 1/2.

Dans (7), on prouvait que $\|\Phi_D\|$ ne pouvait être atteinte que dans une direction propre, auquel cas 2 était valeur propre contrairement au résultat de la seconde partie.

3. Conclusion

Ce problème d'analyse était particulièrement court et simple. Les correcteurs ont constaté que les questions les plus élémentaires ont suffi pour départager les candidats ; beaucoup d'entre eux, à l'issue de la maîtrise, semblent ne plus avoir grand souvenir des faits élémentaires, fondamentaux qu'ils se préparent pourtant à enseigner. Il faut une fois de plus regretter que leur préparation ne commence pas par la révision des points essentiels du programme, et qu'elle reste trop souvent axée sur l'acquisition d'une érudition superflue.

4. Répartition des notes

Notes	Nombre de candidats
0	57
1 – 4	307
5 – 8	380
9 – 12	321
13 – 16	251
17 – 20	195
21 – 24	172
25 – 28	99
29 – 32	74
33 – 36	40
37 – 40	31
41 – 48	26
49 – 60	12
Total	1 965