le second groupe ne contenant pas les réactions supplémentaires. C'est d'ailleurs là l'un des avantages des équations d'Euler-Lagrange : on obtient les équations du mouvement directement, sans passer par l'élimination de réactions ou de multiplicateurs.

4° Les notes (sur 40)

Un barème excessivement bienveillant a permis à un tout petit nombre de candidats d'obtenir une note voisine de la moyenne :

0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 19	20 à 24	25 à 40
32	117	44	16	4	6	0

Nombre de copies corrigées : 219

Moyenne : 4,73 (en excluant les copies nulles : 5,55).

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Sujet (durée : 6 heures)

N. B. — *La troisième partie est indépendante des deuxième et quatrième parties.*

DÉFINITIONS, NOTATIONS ET RAPPELS

1° Dans tout le problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ compactifié par deux éléments à l'infini (notés ∞ et $-\infty$); $\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs, et $\overline{\mathbb{R}^+}$ l'ensemble précédent compactifié par un élément à l'infini noté « ∞ ». $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ désigne la tribu des boréliens de $\overline{\mathbb{R}}$ et, plus généralement, $\mathcal{B}(\mathrm{U})$ désigne la tribu des boréliens de U, où U est un sous-ensemble de $\overline{\mathbb{R}}$.

Toute application de $\overline{\mathbb{R}}$, ou d'un sous-ensemble de $\overline{\mathbb{R}}$, mesurable relativement aux tribus boréliennes correspondantes, sera dite borélienne.

2° Désignant par $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, on appelle variable aléatoire réelle (en abrégé v.a.r.) définie sur cet espace, une application de Ω dans $\overline{\mathbb{R}}$, mesurable relativement aux tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, et on dira qu'une v.a.r. est positive, si elle est à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}^+}$.

Étant donnée une v.a.r. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on note $\sigma(X)$ la tribu engendrée par X et on rappelle que, si Y est une v.a.r. $\sigma(X)$ - mesurable, il existe une application borélienne f, telle que $Y = f(X)$.

Désignant par A la fonction de répartition de X, c'est-à-dire l'application de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $[0, 1]$ définie par

$$A(u) = P(X \leqslant u) ,$$

on notera dA la mesure-image de P par X (appelée aussi loi de X) et on utilisera couramment des expressions du type :

« L'application φ borélienne est dA - intégrable », « telle propriété est vraie dA p.s. ». On notera $\int \varphi \, dA$ l'intégrale de φ relativement à la mesure dA.

Ainsi, on peut écrire :

$$\forall\, B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}), \qquad P(X \in B) = \int \mathbf{1}_B \, dA$$

où $\mathbf{1}_B$ désigne la fonction indicatrice de B.

3° Étant donnée une famille de tribus $\mathcal{C}_i$ $(i \in I)$ d'un même espace Ω, on sait que leur intersection est une tribu que l'on notera $\bigwedge_{i \in I} \mathcal{C}_i$; on notera, de même, $\bigvee_{i \in I} \mathcal{C}_i$ la plus petite tribu contenant toutes les tribus $\mathcal{C}_i$, laquelle est, en général, différente de leur union.

Si les X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont n v.a.r. définies sur le même espace probabilisé, on désigne par $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ la tribu $\bigvee_{1 \leqslant i \leqslant n} \sigma(X_i)$, laquelle n'est autre que la tribu engendrée par le vecteur aléatoire $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Enfin, si $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(\Omega', \mathcal{A}')$ sont deux espaces mesurables, on désigne par $(\Omega \times \Omega', \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}')$ l'espace mesurable produit associé.

On rappelle que la tribu produit $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$, est la tribu engendrée par les pavés, c'est-à-dire par tous les ensembles de la forme $E \times E'$, où E est un élément de $\mathcal{A}$, et E' un élément de $\mathcal{A}'$. La tribu $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ est aussi notée $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^2})$.

4° Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère une v.a.r. X, $\mathcal{A}$ - mesurable, positive ou intégrable. Si $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$, le symbole $E(X \mid \mathcal{B})$ désigne l'espérance conditionnelle de la v.a.r. X par rapport à la tribu $\mathcal{B}$.

Si Y est une v.a.r., $\mathcal{B}$ - mesurable, dont la classe d'équivalence pour la relation d'égalité P - presque sûre (en abrégé, P p.s.) est $E(X \mid \mathcal{B})$, nous dirons que Y est un représentant de $E(X \mid \mathcal{B})$.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé sur lequel est définie une v.a.r. strictement positive S, dont on désigne par A la fonction de répartition. Pour tout $u \in \overline{\mathbb{R}}$, différent de $-\infty$, on désigne par $A(u^-)$ la limite de $A(v)$ lorsque v tend vers u par valeurs inférieures.

1° *a.* Quelles sont les valeurs de $A(0)$ et de $A(\infty)$?

Étant donné un élément u de $\overline{\mathbb{R}^+}$, que représente la quantité

$$A(u) - A(u^-)?$$

Peut-on avoir $A(\infty^-) < 1$?

b. On pose $c = \inf \{ u \mid u \in \overline{\mathbb{R}^+}, A(u) = 1 \}$.

Montrer que c appartient à $\overline{\mathbb{R}^+}$, que $A(c) = 1$, et que si $t < c$, $A(t) < 1$.

c. Montrer que : $S \leqslant c$ P p.s.,
et que, si $A(c^-) = 1$, $S < c$ P p.s.

2° Étant donné t, élément de $\overline{\mathbb{R}^+}$, on désigne par $S \wedge t$, l'application de Ω dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, définie par :

$$\forall\, \omega \in \Omega, \qquad (S \wedge t)(\omega) = \inf(S(\omega), t) .$$

a. Montrer que $S \wedge t$ est une v.a.r. positive et déterminer sa fonction de répartition.

Expliciter $P(S \wedge t \in B)$, où $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^+})$.

b. On désigne par $\mathcal{G}_t$ la tribu engendrée par $S \wedge t$.

Montrer que l'ensemble $\{ S \geqslant t \}$ appartient à $\mathcal{G}_t$, et que toute v.a.r. $\mathcal{G}_t$-mesurable est constante sur cet ensemble.

3° Soit f une application borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, supposée dA - intégrable.

a. Montrer que $f(S)$ est P - intégrable, et trouver un représentant de l'espérance conditionnelle de $f(S)$ par rapport à la tribu $\mathcal{G}_t$, lorsque t est supérieur ou égal à c.

b. Si t est strictement plus petit que c, montrer qu'un représentant de l'espérance conditionnelle de $f(S)$ par rapport à la tribu $\mathcal{G}_t$ est donné par la v.a.r.

$$n^f(t, \ S \wedge t),$$

où n^f est une application de $[0, c[\times [0, c[$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, définie par

$$n^f(t, u) = f(u) \qquad \text{si} \quad u < t,$$

$$n^f(t, u) = \frac{1}{1 - A(t^-)} \int_{[t, \infty]} f dA \qquad \text{si} \quad u \geqslant t.$$

En déduire la fonction de répartition de la loi conditionnelle de S par rapport à $S \wedge t$.

Montrer que n^f est $\mathcal{B}([0, c[) \otimes \mathcal{B}([0, c[)$ - mesurable.

c. Expliciter le calcul précédent lorsque S suit la loi exponentielle de paramètre $\mu (\mu > 0)$, c'est-à-dire la loi dont la densité de probabilité est définie par :

$$u \longmapsto \mu e^{-\mu u} \ \text{ si } \ u > 0 ; \qquad u \longmapsto 0 \ \text{ si } \ u \leqslant 0.$$

On mettra en évidence une fonction n^f_μ de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ - mesurable, telle que $n^f_\mu(t, S \wedge t)$ soit un représentant de $E[f(S) \mid \mathcal{G}_t]$.

4° On considère une suite $(T_n ; n \in \mathbb{N}^*)$ de v.a.r. indépendantes qui suivent toutes une loi exponentielle; on désigne par $\lambda_n (\lambda_n > 0)$ le paramètre de la loi de T_n.

On pourra poser

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i .$$

On note T^*_n la v.a.r. définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad T^*_n(\omega) = \inf_{1 \leqslant i \leqslant n} (T_i(\omega)).$$

a. Quelle est la loi de T^*_n?

b. Montrer que, si la série de terme général λ_n diverge, T^*_n converge dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et P p.s. vers zéro.

c. Montrer que les v.a.r. T^*_{n-1} et T_n $(n > 1)$ sont indépendantes.

Montrer que, pour tout u appartenant à $\overline{\mathbb{R}}$, les ensembles

$\{ T^*_n \leqslant u \}$ et $\{ T_n \leqslant T^*_{n-1} \}$ sont indépendants.

En déduire l'indépendance des v.a.r. $\mathbf{1}_{\{ T_n \leqslant T^*_{n-1} \}}$ et T^*_n.

d. Soit f une application borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, telle que :

$$E[\, | f(T_n) | \,] < + \infty.$$

Montrer que les v.a.r. $f(T_n)$ et $n^f_{\lambda_n}(T^*_{n-1}, T^*_n)$ ont même espérance conditionnelle par rapport à T^*_n. (La fonction $n^f_{\lambda_n}$ a été définie à la question 3°.)

En déduire $E[f(T_n) \mid T^*_n]$, et déterminer par sa fonction de répartition la loi conditionnelle de T_n par rapport à T^*_n.

DEUXIÈME PARTIE

Les notations sont les mêmes que celles de la première partie.

1° *a.* Montrer que, si s et t sont deux éléments de $\overline{\mathbb{R}^+}$ tels que

$$s < t, \quad \text{on a} : \ \mathcal{G}_s \subset \mathcal{G}_t .$$

Montrer que $S \wedge t$ est mesurable par rapport à $\bigvee_{s < t} \mathcal{G}_s$.

En déduire que $\mathcal{G}_t = \bigvee_{s < t} \mathcal{G}_s$.

b. On pose : $\mathcal{F}_t = \bigwedge_{s > t} \mathcal{G}_s$ si $t \in \mathbb{R}^+$,

et $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{G}_\infty$.

Montrer que les v.a.r. $\mathcal{F}_t$ - mesurables sont constantes sur l'ensemble $\{ S > t \}$, et expliciter toutes les v.a.r. $\mathcal{F}_t$ - mesurables.

c. Montrer que :
$$\mathcal{F}_t = \bigwedge_{s > t} \mathcal{F}_s \qquad (t \in \mathbb{R}^+)$$
$$\mathcal{G}_t = \bigvee_{s < t} \mathcal{F}_s \qquad (t \in \mathbb{R}^+)$$
$$\mathcal{G}_\infty = \mathcal{F}_\infty = \bigvee_{s \in \mathbb{R}^+} \mathcal{F}_s$$

et que $\mathcal{F}_\infty$ est identique à la tribu engendrée par S.

2° On considère l'espace produit $\Omega \times \overline{\mathbb{R}^+}$, muni de la tribu produit $\mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^+})$.

Soit f une application borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, dA - intégrable.

a. Montrer qu'il existe une application, N^f, de $\Omega \times \overline{\mathbb{R}^+}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^+})$ - mesurable, telle que :

i. pour tout t de $\overline{\mathbb{R}^+}$, $N^f(\bullet, t)$ est un représentant de $E[f(S) \mid \mathcal{G}_t]$;

ii. pour tout t de $\overline{\mathbb{R}^+}$, $N^f(\bullet, t)$ est P - intégrable, et, pour tout $s < t$, $(s \in \mathbb{R}^+)$, $N^f(\bullet, s)$ est un représentant de $E[N^f(\bullet, t) \mid \mathcal{G}_s]$;

iii. il existe un élément C de $\mathcal{F}_\infty$, P - négligeable, que l'on déterminera, tel que si $\omega \notin C$, l'application

$t \longmapsto N^f(\omega, t)$ est continue à gauche sur $\overline{\mathbb{R}^+}$.

b. Montrer, de même, qu'il existe une application, M^f, de $\Omega \times \overline{\mathbb{R}^+}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^+})$ - mesurable, telle que :

i. pour tout t de $\overline{\mathbb{R}^+}$, $M^f(\bullet, t)$ est un représentant de $E[f(S) \mid \mathcal{F}_t]$;

ii. pour tout t de $\overline{\mathbb{R}^+}$, $M^f(\bullet, t)$ est P - intégrable et, pour tout $s < t$ $(s \in \mathbb{R}^+)$, $M^f(\bullet, s)$ est un représentant de $E[M^f(\bullet, t) \mid \mathcal{F}_s]$;

iii. si $\omega \notin C$, l'application $t \longmapsto M^f(\omega, t)$ est continue à droite sur $\mathbb{R}^+$, et, pour tout t de $\overline{\mathbb{R}^+}$, $M^f(\omega, t^-) = N^f(\omega, t)$.

c. Montrer que $M^f(\bullet, t)$ converge p.s. et dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vers $f(S)$, si t tend vers c par valeurs inférieures.

3° On pose $\displaystyle m_f(t) = \frac{1}{1 - A(t)} \int_{]t, \infty]} f dA \quad$ si $\quad 0 \leqslant t < c$.

Si $r \in \mathbb{R}^+$, on définit le nombre t_r par :
$$t_r = \inf \{ t \mid 0 \leqslant t < c, \ \ |m_f(t)| > r \},$$
si cet ensemble n'est pas vide; sinon, on pose $t_r = c$.

Par ailleurs, on suppose, dans cette question, que :
$$\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) \leqslant c.$$

On désigne par M_f^* l'application de Ω dans $\overline{\mathbb{R}}$ définie par :
$$\forall \omega \in \Omega, \quad M_f^*(\omega) = \sup_{t \in \overline{\mathbb{R}^+}} |M^f(\omega, t)|$$

a. Montrer que l'ensemble $\{ M_f^* > r \}$ est la réunion des deux ensembles :
$$\{ S > t_r \} \quad \text{et} \quad \{ S \leqslant t_r \} \cap \{ |f(S)| > r \}.$$

En déduire que M_f^* est une v.a.r. $\mathcal{F}_\infty$ - mesurable.

b. Montrer que si t_r est strictement inférieur à c,
$$P(S > t_r) \leqslant \frac{1}{r} E[\mathbf{1}_{\{ S > t_r \}} |f(S)|].$$

Établir ensuite que
$$P(M_f^* > r) \leqslant \frac{1}{r} E[|f(S)|].$$

c. Soit $(f_n ; n \in \mathbb{N}^*)$, une suite d'applications boréliennes de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, dA-intégrables, qui convergent vers f dans $L^1(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}), dA)$.

Montrer qu'on peut extraire de la suite $(f_n ; n \in \mathbb{N}^*)$ une sous-suite $(f_{k_n} ; n \in \mathbb{N}^*)$, telle que la suite $M^*_{f_{k_n}}$ converge P p.s. vers M_f^*, si n tend vers $+ \infty$.

On note

$$I = \{ \omega \mid \lim_{n \to +\infty} M^*_{f_{k_n}}(\omega) \neq M^*_f(\omega) \}.$$

Montrer que pour tout $\omega \notin I \cup C$, et pour tout $t \in \overline{\mathbb{R}^+}$:

$$\lim_{n \to \infty} M^{f_{k_n}}(\omega, t) = M^f(\omega, t) \quad \text{et}$$

$$\lim_{n \to \infty} N^{f_{k_n}}(\omega, t) = N^f(\omega, t).$$

TROISIÈME PARTIE

On rappelle que cette partie est indépendante des deuxième et quatrième parties.

On considère une suite $(T_n\ ;\ n \in \mathbb{N}^*)$ de v.a.r. définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et de loi commune la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un nombre strictement positif donné. (La définition de la loi exponentielle a été rappelée à la question 3° *c.* de la première partie.)

On construit alors la suite $(S_n\ ;\ n \in \mathbb{N})$ de v.a.r., de la façon suivante :

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Et, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, on pose :

$$N(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{1}_{\{S_n \leqslant t\}}$$

On désigne par $\mathcal{C}_0$ la tribu $\sigma(S_0)$, par $\mathcal{C}_n$ la tribu $\sigma(S_0, S_1, \ldots, S_n)$, par $\mathcal{C}_\infty$ la tribu $\sigma(S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots)$, et enfin par $\mathcal{F}_t (t \in \mathbb{R}^+)$ l'ensemble des éléments D de $\mathcal{A}$, tels que :

pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe $B_n \in \mathcal{C}_n$, vérifiant :

$$D \cap \{ N(t) = n \} = B_n \cap \{ N(t) = n \}.$$

On admettra que $\mathcal{F}_t$ est une sous-tribu de $\mathcal{C}_\infty$.

1° *a.* Calculer la densité de probabilité du vecteur aléatoire

$$(S_1, S_2, \ldots, S_n).$$

b. Montrer que $N(t)$ est une v.a.r. $\widehat{\mathcal{F}}_t$ - mesurable qui suit la loi de Poisson de paramètre λt.

c. Dans cette question, k désigne un élément de $\mathbb{N}^*$.

Montrer que $\dfrac{N(k)}{k}$ converge en loi, en probabilité et dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vers λ, lorsque k devient infini.

Montrer que, dans les mêmes conditions, $\dfrac{N(k) - \lambda k}{\sqrt{k}}$ converge en loi vers une loi limite que l'on précisera.

Peut-on obtenir ce dernier résultat en appliquant le théorème central limite (dit aussi théorème de convergence vers la loi de Gauss, ou encore de Moivre-Laplace)?

2° *a.* Montrer que, pour tout B_n de la tribu $\mathcal{C}_n$, pour tout t et pour tout u de $\mathbb{R}^+$:

$$P(B_n \cap \{ N(t) = n \} \cap \{ N(t+u) - N(t) \geqslant 1 \})$$
$$= (1 - e^{-\lambda u})\, E[\mathbf{1}_{B_n} \mathbf{1}_{\{S_n \leqslant t\}}\, e^{-\lambda(t - S_n)}]$$

En déduire que les événements $B_n \cap \{ N(t) = n \}$ et $\{ N(t+u) - N(t) \geqslant 1 \}$ sont indépendants.

b. On pose $R(t) = S_{N(t)+1} - t$.

Déduire de *a.* que $R(t)$ est une v.a.r. $\mathcal{C}_\infty$ - mesurable, indépendante de $\widehat{\mathcal{F}}_t$, qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

c. Montrer que, plus généralement, les v.a.r.

$$R(t), \quad T_{N(t)+2}, \ \ldots, \ T_{N(t)+k}, \ \ldots$$

constituent une suite de v.a.r. indépendante de $\widehat{\mathcal{F}}_t$.

Montrer que c'est une suite de v.a.r. indépendantes, de même loi, ayant pour loi commune la loi exponentielle de paramètre λ.

d. On pose :

$$\overline{\mathrm{N}}_t(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{1}_{\{ \mathrm{S}_{\mathrm{N}(t)+n} - t \leqslant u \}} \qquad \text{pour tout} \quad u \in \mathbb{R}^+.$$

Montrer que $\overline{\mathrm{N}_t(u)}$ est, pour tout u de $\mathbb{R}^+$, une v.a.r. indépendante de $\widehat{\mathcal{F}}_t$, de même loi que $\mathrm{N}(u)$, égale à $\mathrm{N}(t+u) - \mathrm{N}(t)$.

En déduire que si $u_1, u_2, \ldots, u_k$ sont des éléments de $\mathbb{R}^+$, les v.a.r. $\mathrm{N}(u_1)$, $\mathrm{N}(u_1 + u_2) - \mathrm{N}(u_1)$, $\ldots$, $\mathrm{N}(u_1 + u_2 + \ldots, u_k) - \mathrm{N}(u_1 + u_2 + \ldots, u_{k-1})$ sont indépendantes.

3° On pose $\mathrm{L}(t) = t - \mathrm{S}_{\mathrm{N}(t)}$.

a. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}^+$ tel que $0 < x \leqslant t$,

$$\mathrm{P}(t - \mathrm{S}_{\mathrm{N}(t)} \geqslant x) = \mathrm{P}(\mathrm{R}(t-x) > x).$$

En déduire que la loi de $\mathrm{L}(t)$ est la même que celle de $\mathrm{T}_1 \wedge t$.

b. Plus généralement, on pose, pour tout k de $\mathbb{N}^*$:

$\mathrm{L}_k(t) = \inf \{ s \mid 0 \leqslant s \leqslant t ;\ \mathrm{N}(t) - \mathrm{N}(t-s) = k \}$ si $\mathrm{N}(t) \geqslant k$,

$\mathrm{L}_k(t) = t$ si $\mathrm{N}(t) < k$.

Montrer que :

$\mathrm{L}_k(t) = \inf \{ s \mid 0 \leqslant s \leqslant t,\ \mathrm{N}(t-s) = \sup(\mathrm{N}(t) - k, 0) \}$

et que : $\mathrm{L}_k(t) = \sup(t - \mathrm{S}_{\mathrm{N}(t)+1-k}, 0)$.

En déduire que la loi de $\mathrm{L}_k(t)$ est la même que celle de $\mathrm{S}_k \wedge t$.

QUATRIÈME PARTIE

(Cette partie est indépendante de la troisième partie, mais utilise les notations et résultats des deux premières parties.)

On rappelle que S est une v.a.r. strictement positive, de fonction de répartition A. Dans toute cette partie, nous supposerons que

$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathrm{S}(\omega) < c.$$

On note B la fonction définie sur $\overline{\mathbb{R}^+}$, croissante et continue à gauche, définie par $\mathrm{B}(u) = \mathrm{A}(u^-)$.

1° On définit une nouvelle application borélienne de $\overline{\mathbb{R}^+}$ dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ par :

$$\alpha(t) = \int_{]0,t]} \frac{d\mathrm{A}}{1 - \mathrm{B}}$$

a. Montrer que α est une fonction croissante, continue à droite, et que $\alpha(t)$ est fini si $t < c$.

En déduire que α est la fonction de répartition d'une mesure positive σ - finie sur $[0, c[$.

b. Montrer que, si h est une fonction borélienne de $\overline{\mathbb{R}^+}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, positive ou $d\mathrm{A}$ - intégrable,

$$\mathrm{E}[h(\mathrm{S})] = \mathrm{E}\left[\int_{]0,\mathrm{S}]} h\,d\alpha \right]$$

Calculer $\mathrm{E}[\alpha(\mathrm{S})]$.

c. Considérons deux fonctions boréliennes de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, positives ou telles que $\int f^2\,d\mathrm{A}$ et $\int h^2\,d\mathrm{A}$ soient finis.

Montrer que

$$\mathrm{E}[\mathrm{N}^f(\bullet, \mathrm{S})\ h(\mathrm{S})] = \mathrm{E}[f(\mathrm{S}) \int_{]0,\mathrm{S}]} h\,d\alpha]$$

où $\mathrm{N}^f(\bullet, \bullet)$ est l'application $\mathcal{F}_\infty \otimes \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^+})$ - mesurable introduite dans la deuxième question de la deuxième partie.

2° Pour tout $u < c$, pour tout $t \in \overline{\mathbb{R}^+}$, on pose :

$$q_u(t) = \mathbf{1}_{\{ u \leqslant t \}} - \alpha(t \wedge u).$$

$q_u(t)$ est la différence de deux fonctions de répartition continues à droite et croissantes, finies car $u < c$.

On désigne par $Q(\bullet, t)$ la v.a.r. définie par :

$$Q(\omega, t) = \mathbf{1}_{\{S(\omega) \leq t\}} - \alpha[t \wedge S(\omega)] \quad \text{pour tout } t \in \overline{\mathbb{R}^+},$$

et on note $\int_{]0, t]} f dQ(\omega, \bullet)$ la v.a.r. définie par :

$$f(S(\omega))\, \mathbf{1}_{\{S(\omega) \leq t\}} - \int_{]0, t \wedge S(\omega)]} f d\alpha$$

lorsque f est une fonction borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}$, positive ou dA-intégrable.

a. Montrer que $\sup_t E\,|\,Q(\bullet, t)\,| \leq 2$, et que $Q(\bullet, t)$ est une v.a.r. $\mathcal{F}_t$-mesurable, d'espérance nulle.

b. Montrer que, pour tout u de $\mathbb{R}^+$:

$$P(S > u) = E[\alpha(S) - \alpha(S \wedge u)]$$

En déduire que pour tout u de $\mathbb{R}^+$, la v.a.r. $Q(\bullet, \infty) - Q(\bullet, u)$ a une espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_u$, qui est nulle.

Montrer ensuite que $Q(\bullet, u)$ est un représentant de $E[Q(\bullet, \infty) \mid \mathcal{F}_u]$ et mettre en évidence une fonction g, de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, borélienne, telle que :

$$\forall\, u \in \mathbb{R}^+, \quad Q(\bullet, u) = M^g(\bullet, u).$$

c. Plus généralement, si f est une application borélienne de $\overline{\mathbb{R}^+}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, dA-intégrable, montrer que l'application $\bar{f}$ de $\overline{\mathbb{R}^+}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ définie par :

$$\bar{f}(x) = f(x) - \int_{]0, x]} f d\alpha \qquad \text{si} \quad 0 < x < c$$

$$\bar{f}(x) = 0 \qquad \text{si} \quad x \leq 0 \quad \text{ou} \quad x \geq c$$

est une fonction borélienne dA-intégrable et que

$$E[f(S)\, \mathbf{1}_{\{S > u\}}] = E\left[\int_{]u \wedge S, S]} f d\alpha\right].$$

En déduire que $\int_{]0, t]} f dQ(\bullet, \bullet)$ est un représentant de l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_t$ de la v.a.r.

$$f(S) - \int_{]0, S]} f d\alpha = \bar{f}(S)$$

puis, que, si $t < c$:

$$\frac{1}{1 - A(t)} \int_{]t, c[} \bar{f} dA = \int_{]0, t]} f d\alpha.$$

3° On demande d'admettre que, pour tout t de $\overline{\mathbb{R}^+}$, $t < c$, la relation suivante est vérifiée :

$$\frac{1}{1 - A(t)} = 1 + \int_{]0, t]} \frac{dA}{(1 - A)(1 - B)}.$$

a. Soit f une application de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, dA-intégrable et satisfaisant à $\int f dA = 0$.

Utiliser le théorème de Fubini pour établir que : pour tout t de $\mathbb{R}^+$ strictement plus petit que c, $m_f(t) = \int_{]0, t]} [m_f(\bullet) - f] d\alpha$ (où m_f est la fonction introduite dans la deuxième partie, 3° *a.*).

En déduire que $M^f(\omega, t) = \int_{]0, t]} (f - m_f)\, dQ(\omega, \bullet)$.

b. Soit h une application de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, dA-intégrable.

Montrer que si, pour tout t de $\overline{\mathbb{R}^+}$,

$$\int_{]0, t]} h dQ(\bullet, \bullet) = 0 \quad \text{p.s.},$$

h est nulle dA p.s.

En déduire que si f satisfait aux hypothèses de la question *a.*, il existe une fonction g de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, dA-intégrable, unique au sens de l'égalité dA p.s., telle que : il existe un ensemble négligeable I, tel que pour tout $\omega \notin$ I et tout t de $\overline{\mathbb{R}^+}$,

$$M^f(\omega, t) = \int_{]0, t]} g dQ(\omega, \bullet)$$

c. Soit h une application borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, dA - intégrable. Pour tout $\omega \in \Omega$, calculer la discontinuité au point $S(\omega)$ de l'application qui, à tout élément t de $[0, c[$, associe

$$\int_{]0, t]} h dQ(\omega, \bullet)$$

Montrer ensuite que, si f est une application borélienne dA - intégrable satisfaisant à $M^f(\bullet, S) = N^f(\bullet, S)$, f est nulle dA p.s.

RAPPORT SUR L'EPREUVE DE PROBABILITES ET STATISTIQUES

1. Thème du sujet

L'objet du problème est d'établir que toutes les martingales par rapport à la famille de tribus engendrées par un processus ponctuel à un seul saut, s'expriment comme des intégrales par rapport à une martingale fondamentale, qui est, pour chaque un processus à variation finie.

Ce texte a été construit à partir de l'article de MM. CHOU et MEYER : «Sur la présentation des martingales comme intégrales stochastiques dans les processus ponctuels». Séminaire de Probabilités IX. Lect. Notes in Math. Springer Verlag n°465.

La troisième partie, pratiquement indépendante du reste, a été jointe par souci de ne pas défavoriser les candidats moins familiarisés avec le maniement des tribus.

2. Résumé de la solution

(Il ne s'agit que d'indications relatives à certaines questions).

PARTIE I

3° (les questions précédentes sont évidentes)

a) Si $t \geqslant c$, $S = S \wedge t$ $P.p.s$, et $f(S \wedge t)$ convient comme représentant.

b) Si $t < c$, $P(S \geqslant t) > 0$. La v.a.r $f(S)\, 1_{\{S < t\}}$ est $\mathcal{G}_t$ mesurable.

Sur $\{S \geqslant t\}$, un représentant sera constant et égal à $\dfrac{E(f(S)\, 1_{\{S \geqslant t\}})}{P(S \geqslant t)}$

• Par définition, la fonction de répartition de la loi conditionnelle est égale à : $n^{[\cdot, x]}_{t, S\wedge t}$,

• $n^f(t, c)$ est continue à gauche sur $[0, c[$ donc $\mathcal{B}([0, c[) \otimes \mathcal{B}([0, c[)$ mesurable tout comme $1_{\{u<t\}}, f(t), f(u)$.

4° a) Très classique : exponentielle de paramètre μ_n

b) La convergence u^1 est évidente, et entraîne ici la cv. p.s car la suite est décroissante.

c) Un calcul simple à partir des lois des v.a.r. indépendantes T^*_{n-1}, T_n montre:

$$P(T^*_n \leqslant u, T_n \leqslant T^*_{n-1}) = \frac{\lambda_n}{\mu_n}(1 - \exp - \mu_n u) = P(T_n \leqslant T^*_{n-1}) P(T^*_n \leqslant u)$$

(faire $u = +\infty$) , et cette relation est vraie pour tout intervalle.

La classe des intervalles étant stable par intersection (fondamental) et engendrant la tribu borélienne, le théorème d'unicité entraîne l'indépendance cherchée.

d) Les v.a. $f(T_n)$ et $n^f_{\lambda_n}(T^*_{n-1}, T^*_n)$ ne diffèrent que sur $\{T^*_n \geqslant T^*_{n-1}\}$

Si g est borélienne bornée, $E(g(T^*_n) f(T_n) 1_{\{T^*_{n-1} \leqslant T^*_n\}})$ s'écrit :

$$E(g(T^*_{n-1}) \int_{[T^*_{n-1}, +\infty[} f(y) e^{-\lambda_n y} dy)$$

$$= E(g(T^*_{n-1}) 1_{\{T^*_{n-1} \leqslant T_n\}} e^{\lambda_n T^*_{n-1}} \int_{[T^*_{n-1}, +\infty[} f(y) e^{-\lambda_n y} dy)$$

(indépendance de T^*_{n-1}, T_n)

$$= E(g(T^*_n) 1_{\{T^*_{n-1} \leqslant T^*_n\}} n^f_{\lambda_n}(T^*_{n-1}, T^*_n))$$

On en déduit aisément d'après 4° c) que :

$$E(f(T_n)/T^*_n) = f(T^*_n)\frac{\lambda_n}{\mu_n} + \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n}\int f(T^*_n + u) e^{-\lambda_n u} du \quad \text{P. p.s.}$$

PARTIE II

1° a) Il suffit de noter que : $S \wedge s = (S \wedge t) \wedge s$ et •

si t_n croit vers t, $S \wedge t = \lim_n (S \wedge t_n)$

b) Par l'absurde : Si y, $\mathcal{F}_t$ - mesurable n'est pas constante sur $\{S > t\}$.

Il existe w et w' tels que : $y(w) \neq y(w')$ et $S(w) > t$, $S(w') > t$

Soit $s = \inf(S(w), S(w'))$. y est constante sur $\{S \geqslant s\}$ d'où la contradiction.

$1_{\{S>t\}}$, et $h(s)\, 1_{\{S \leqslant t\}}$ sont manifestement $\mathcal{F}_t$ - mesurables.

Toute v.a. $\mathcal{F}_t$ - mesurable est donc de la forme $h(S)\, 1_{\{S \leqslant t\}} + \lambda 1_{\{S>t\}}$

c) $\mathcal{F}_u \leqslant \mathcal{G}_t \leqslant \mathcal{F}_t \leqslant \mathcal{G}_s \leqslant \mathcal{F}_s$ si $u < t < s$.

Les égalités cherchées en résultent immédiatement.

2° a) D'après I, 3° il est naturel de poser $N^f(\cdot\, t) = n^f(t, S \wedge t)$ si $t < c$
$= f(t \wedge S)$ si $t \geqslant c$.

La seule difficulté est la continuité à gauche en c,

Si $A(c-) < 1$, $n^f(t, u)$ se prolonge par continuité à gauche en c en $f(c)$.

$N^f(\cdot, t)$ est alors continue à gauche sauf sur $\{S > c\}$

Si $A(c-) = 1$, sauf sur $\{S \geqslant c\}$ $N^f(w, t)$ est constante au voisinage de c.

b) L'énoncé suggère de définir M^f comme le processus des limites à droite de N^f

$$M^f(\cdot, t) = f(S)\, 1_{\{S \leqslant t\}} + 1_{\{S>t\}} \frac{1}{(1 - A(t))}\int_{]t, +\infty]} f\, dA \quad \text{si } t < c$$

$$= f(S)\, 1_{\{S \leqslant t\}} \qquad \text{si } t \geqslant c.$$

Un calcul analogue à I 3 b) montre que $M^f(\cdot\, t)$ est un représentant de $E(f(S)/\mathcal{F}_t)$. On vérifie comme en II 2° a) que la limite à gauche de M^f en c est $N^f(\cdot, c)$ sauf sur C.

c) La convergence p.s vient d'être établie.

Pour établir la convergence L^1, on remarque que :

Si $A(c-) = 1$, $E(|f(S) - M^f_t|) \leqslant 2\, E(|f(S)|\, 1_{\{c>S>t\}})$ qui tend vers zéro lorsque t tend vers c par valeurs inférieures

Si $A(c-) < 1$, $E(|f(S) - M_t^f|) \leqslant P(S=c)\left|f(c) - \dfrac{E(f(S)\mathbf{1}_{\{S>t\}})}{P(S>t)}\right|$

$$+ E\left|f(S)\,\mathbf{1}_{\{c>S>t\}}\right| + P|t<S<c)\ \frac{E(|f(S)|\mathbf{1}_{\{S>t\}})}{P(S>t)}$$

3° a) Si $t_r < S$, $t_r < c$, et il existe $t < S$ t.q $|m_f(t)| > r$, donc $M_f^* > r$.
Si $t_r \geqslant S$, pour tout $t < S$, $|m_f(t) \leqslant r$ et $\{M_f^* > z\} = \{|f(S)| > r\}$

d'où le résultat est la mesurabilité.

b) Si $t_r < c$, $|m_f(t_r)| \geqslant r$ par continuité à droite. Il suffit alors d'exprimer $m_f(t_r)$.

c) <u>Pour que l'énoncé soit tout à fait correct, il faut supposer</u> $f \equiv 0$.
La majoration précédente montre que $M^*_{f_n}$ converge dans L^1 vers zéro.
On peut donc extraire une sous-suite qui converge p.s vers zéro, c'est-à-dire qu'en dehors de l'ensemble I, la suite $M_{f_{k_n}}(\cdot, w)$ converge uniformément vers zéro.
Il en est donc de même de $N_{f_{k_n}}$.

PARTIE III

1° Très classique. Dans tous les cours sur le processus de Poisson.

2° a) $P(B_n \cap \{N(t) = n\} \cap \{N(t+u) - N(t) \geqslant 1\})$
$= P(B_n \cap \{S_n \leqslant t\} \cap \{t - S_n < T_{n+1} \leqslant t + u - S_n\})$
$= E(\mathbf{1}_{B_n \cap \{S_n \leqslant t\}}\,(e^{-\lambda(t-S_n)} - e^{-\lambda(t+u-S_n)})$
$(T_{n+1}$ indépendante de $\mathscr{C}_n)$

b) Il suffit de remarquer que $\{R(t) \leqslant u\} = \{N(t+u) - N(t) \geqslant 1\}$.

c) et d) se déduisent alors facilement.

3° a) $\{R(t-x) > x\} = \{N(t) - N(t-x)\} = \{t - S_{N(t)} \geqslant x\}$ si $t > x$.

b) <u>Les relations à établir ne sont vraies que sur</u> $\{N(t) \geqslant k\}$. Elles sont alors évidentes.

$\{L_k(t) \geqslant x\} = \{N(t) < k\} \cup \{N(t) \geqslant k,\ N(t) - N(t-x) < k\}$
$= \{N(t) - N(t-x) < k\} \quad = \{\bar{N}_{t-x}(x) < k\} \qquad$ si $t > x$.

D'après III d) la probabilité de ce dernier événement est égale à celle de $\{S_k \leqslant x\}$.
Comme $P(L_k(t) > t) = 0$, on vérifie que $L_k(t)$ suit la même loi que $S_k \wedge t$.

PARTIE IV

1° a) Comme $B(t) < 1$, si $t < c$, $\alpha(t)$ est croissante, continue à droite et finie sur $[0, c[$.

b) Si h est positive, le théorème s'établit aisément par Fubini.
On en déduit alors que si h est dA-intégrale, $h\mathbf{1}_{]0,\cdot]}$ est $dA \times d\alpha$ intégrable et le calcul précédent reste valable.
D'où $E(\alpha(S)) = E(1) = 1$.

c) Même calcul à l'aide de Fubini.
Si f et h sont dans L^2, il suffit de vérifier que $N^{|f|}(S)$ est dans L^2.
Remarquons que : $N^{|f|}(S) \leqslant M^*_{|f|}$ d'après II 3° et que

$$E(M^{*2}_{|f|}) \leqslant 2\int_0^\infty r P(M^*_{|f|} > r)\,dr$$
$$\leqslant 2\int_0^\infty r P(|f(S)| > r)\,dr + 2\int_0^\infty E(\mathbf{1}_{\{S>t_r\}}|f(S)|)\,dr$$
$$\leqslant 2\ E(|f(S)|^2 + 2\ E(|f(S)|M^*_{|f|}) \leqslant 3\ E(|f(S)|M^*_{|f|})$$

car $|f(S) \leqslant M^*_f$.

Supposons f bornée, d'après l'inégalité de Schwarz $E(M^{*2}_{|f|}) \leqslant KE(|f(S)|^2)$
Par suite, pour tout r, $E(N^{|f|\wedge r}(S)^2 \leqslant E((|f| \wedge r)(S)^2)$
Lorsque r tend vers $+\infty$ $N^{|f|\wedge r}(S)$ croit vers $N^{|f|}(S)$ et l'inégalité ci-dessus montrer que : $E(N^{|f|}(S)^2) \leqslant E(f^2(S))$

2° a) $\sup_t \mathrm{E}\,|Q(t)| \leqslant 1 + \sup_t \mathrm{E}(\alpha(t \wedge S) \leqslant 1 + \mathrm{E}(\alpha(S)) = 2$

et d'après IV 1° b) $P(S \leqslant t) = \mathrm{E}(\alpha(S \wedge t))$.

b) La première formule est immédiate.

$Q(\infty) - Q(u) = 1_{\{S > u\}} - [\alpha(S) - \alpha(S \wedge u)]$ est nulle si $S \leqslant u$, et d'espérance nulle. D'après II 2° b) son espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{G}_u$ est nulle.

Il suffit de prendre $g = 1 - \alpha$.

c) Tout à fait analogue à la question précédente.

3° a) Puisque $\int f\, dA = 0$, d'après Fubini,

$$- m_t^f = \int_{]0,t]} f dA + \int_{]0,t]} f dA \times \int_{]0,t]} \frac{dA}{(1-A)(1-B)}$$
$$= \int f\, dA + \int_{]0,t]} f(y)\, dA(y) \left(\frac{1}{1-B(y)} - 1 \right)$$
$$+ \int_{]0,t]} \frac{dA(x)}{1-B(x)} \frac{1}{1-A(x)} \int_{]0,x]} f dA$$
$$= \int (f - m_f)\, d\alpha$$

et $$M_t^f = m_t^f\, 1_{\{t < S\}} + f(S)\, 1_{\{t \geqslant S\}}$$
$$= \int_{]0, t \wedge S]} (m_f - f)\, d\alpha\, 1_{\{t < S\}} + [f(S) - m^f(S)]\; 1_{\{t \geqslant S\}}$$
$$+ 1_{\{t \geqslant S\}} \int_{]0, t \wedge S]} (m_f - f)\, d\alpha$$

b) Si $\int_{]0,t]} h\, dQ = 0$ p.s., d'après la continuité à droite l'ensemble négligeable peut être choisi indépendant de t.

$$\int_{]0,t]} h\, d\alpha = 0 \quad \text{et} \quad h(s) - \int_{]0,S]} h\, d\alpha = 0 \ \text{p.s.}$$

soit encore $\int_{]0,S[} h\, d\alpha = 0$ et donc $h(S) - \dfrac{h(S)}{1 - B(S)}\,(A(S) - B(S)) = 0$

c'est-à-dire :

$$h(S) = 0 \quad \text{car} \quad A(S) < 1.$$

c) Le saut vaut $h(S)\, \dfrac{1 - A(S)}{1 - B(S)}$

Nous allons établir que f est dA p.s. <u>constante</u>

Posons $\hat{f} = f - \int f\, dA$.

Si $M^f = N^f$, $\quad M^{\hat f} = N^{\hat f}$. Or $M^{\hat f} = \int h\, dQ$ avec $h = m_{\hat f} - \hat f$

Or $h \equiv 0 \quad dA$.p.s $\qquad$ donc $\qquad M_t^{\hat f} = 0 \quad$ P. p.s

mais puisque $m^{\hat f} = \hat f \quad dA$p.s. $\quad M_t^{\hat f} = \hat f\,(S \wedge t)$ P. p.s

et donc $\hat f\,(S) = 0 \quad$ P. p.s. $\qquad$ et $\qquad f$ est constante $\quad dA$p.s

3. Observations générales

Les correcteurs ont constaté une amélioration des notes par rapport à celles de l'année précédente. C'est ainsi que, sur 814 candidats qui ont composé (836 en 1976), il y en a :

– 23 qui ont remis une copie blanche (108 en 1976 !) ;
– 8 qui ont mérité la note 0 (84 en 1976) ;
– 78 qui ont mérité la note 1 (162 en 1976).

La moyenne (copies blanches exclues) est de deux points supérieure à celle de 1976 (8,61 sur 40 contre 6,67 en 1976).

Il ne faudrait toutefois pas en déduire trop hâtivement que le niveau des candidats s'est fortement relevé. L'amélioration que nous constatons tient principalement au fait que les premières questions du problème étaient assez faciles et ont pu ainsi être abordées, avec plus ou moins de bonheur, dans un grand nombre de copies.

Toutefois, beaucoup de candidats ont été déroutés par la définition que l'on donnait de la fonction de répartition qui se trouvait ainsi continue à droite et non plus à gauche comme ils en avaient l'habitude. On doit pourtant pouvoir passer aisément d'une définition à l'autre.

De même, trop de candidats ne font pas la différence entre des variables aléatoires à valeurs dans R et dans $\overline{\mathrm{R}}$ et n'imaginent pas qu'il puisse y avoir une «masse de probabilités» à l'infini.

Enfin, un grand nombre de candidats «déclarent forfait» dès qu'il est question d'espérance conditionnelle et continuent le problème en grapillant de ci de là quelques questions...

4. Observations détaillées

Signalons les principales erreurs commises lors de la résolution des différentes questions.

PARTIE I

Malgré sa facilité, la question 1 a rarement été entièrement bien traitée. C'est ainsi que fort peu de candidats ont pensé à montrer que c est strictement positif (se trompant, pour la plupart, sur la définition de $\mathbb{R}^+$).

A la seconde question, beaucoup de difficultés pour montrer que $S \Lambda t$ est une variable aléatoire : ignorance des théorèmes fondamentaux. Peu de valeurs exactes de $P(S \Lambda t \in B)$, sans parler des candidats pour lesquels un borélien peut toujours «se ramener» à être un intervalle.

Les difficultés sérieuses commençaient à la troisième question. Tout d'abord, la définition de l'intégrabilité est à revoir... Ensuite, on peut raisonnablement se demander combien il y aurait eu de réponses exactes à la question b) si le résultat n'avait pas été donné dans l'énoncé, la plupart des candidats se contentant (en oubliant fréquemment la G_t –mesurabilité) d'effectuer une vérification souvent peu convaincante. La notion de fonction de répartition d'une loi conditionnelle est rarement connue.

La question 4, en son début du moins, revenait à des choses plus classiques ; pourtant, beaucoup trop de candidats éprouvent des difficultés pour trouver la loi de T^*_n et n'arrivent pas à résoudre les problèmes de convergence. Peu d'entre eux ont vu que l'indépendance des ensembles demandée en c nécessitait un calcul et la plupart n'arrivent pas à en déduire correctement l'indépendance des v.a.r. qui suit. Ensuite, la question d n'a été proprement résolue dans aucune copie.

PARTIE II

Malgré l'indépendance des parties II et III, beaucoup de candidats ont tenu à traiter cette deuxième partie qui était assez délicate et, surtout, qui nécessitait une bonne maîtrise de la notion de tribu. Que de pages touffues pour écrire, souvent à l'envers, des inclusions de tribus et pour arriver, enfin, au résultat que l'énoncé avait le bon goût de formuler !

C'est dire que les correcteurs ont attribué à la première question bien peu de points comparativement au volume qu'elle occupait dans les copies !

A la deuxième question, beaucoup de candidats ont justement vu le lien entre les applications N^f et n^f. La continuité, demandée en iii, était plus délicate et aucune copie ne l'a traitée entièrement.

Pour trouver l'application M^f, il fallait pratiquement refaire le calcul de la question 3.b de la première partie et les quelques candidats qui ont traité cette question ont plus fait appel à leur intuition qu'à un raisonnement logique ; les bonnes idées ont été récompensées.

Enfin, les questions 3.a et 3.b ont été traitées correctement dans quelques copies, la question 3.c n'étant qu'abordée.

PARTIE III

Cette troisième partie, assez classique, aurait dû attirer plus de candidats qui auraient ainsi évité de perdre leur temps dans le maniement défectueux des tribus de la seconde partie.

Si l'on excepte de lourdes bévues (les S_n sont indépendantes, par exemple) probablement dues à une rédaction hâtive en fin d'épreuve, la question 1. a a été souvent bien traitée, avec toutefois une tendance fâcheuse à oublier de préciser le domaine de $\mathbb{R}^n$ sur lequel la densité n'est pas nulle. Quelques candidats ont su utiliser la densité obtenue pour trouver la loi de $N(t)$ mais beaucoup ont préféré admettre le résultat, là encore heureusement fourni par l'énoncé, pour traiter, fort mal en général, les problèmes pourtant classiques de convergence et étaler leur ignorance des propriétés élémentaires de la loi de Poisson.

A part le début de la seconde question, la suite de cette troisième partie n'a été traitée dans aucune copie.

PARTIE IV

Sauf dans quelques très rares copies, seule la question 1.a a été abordée et, malgré sa facilité, en général assez mal traitée. Là encore, il s'agit vraisemblablement d'un griffonnage hâtif de dernière minute...

5. Les notes (sur 40)

Nombre de copies corrigées : 814. Copies blanches : 23
Moyenne : 8,61 (copies blanches exclues)

Trois copies ont mérité la note 40, les quatre suivantes obtenant les notes 37, 36, 35 et 34.

429 notes $\geqslant 7$; 263 notes $\geqslant 10$; 199 notes $\geqslant 12$.

Répartition des notes (copies blanches exclues) par classes d'amplitude 5 :

0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40
8	311	247	104	62	33	15	6	5