ou que $V_j(t_0) > V_{j-1}(t_0)$, $V_j(t_0) \geqslant V_{j+1}(t_0)$
sans changer la généralité du problème.
On a : $(u_j - u_j^*)'(t_0) = (V_j' H_j + V_j \tilde{H}_j')(t_0)$

$$\leqslant f_j(t_0, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) - f_j(t_0, u_{j-1}^*, u_j^*, u_{j+1}^*)$$

On décompose alors cette différence en faisant apparaître

$f(x_j, t_0, u_j, \delta u_j, \delta^2 \overset{*}{u_j} + V_j \delta^2 H_j^2)$ et on évalue

$\delta^2 u_j - \delta^2 u_j^* - V_j \delta^2 \tilde{H}_j$ pour pouvoir appliquer (0.3).

On utilise ensuite l'inégalité (1-6) prise au point t_0.

b) On suppose $M_n > 0$ et on utilise a), la condition $\tilde{C} > C$ étant essentielle pour aboutir à une contradiction.

Q. 9 L'unicité résulte de (2-7) appliqué 2 fois.

Q. 10 On encadre U_i^h par $u_i + \sigma = w_i$ et $u_i - \sigma_i = v_i$ en utilisant le résultat de monotonie (2-7), $\vec{\sigma}$ (donc λ) étant choisi pour que (2-5) et (2-6) soient satisfaites.

On trouvera par exemple $\lambda > (\mu_1 + \mu_2) e^M$ où M est le maximum de la fonction $x \longrightarrow \frac{1}{2} P(x) - (C - B) x^2$

(L'indication du texte à la fin de **Q 10** doit évidemment se lire : appliquer **Q 8**).

Q. 11 Il s'agit d'appliquer **Q 10** après avoir vérifié 3-1 et 3-2 ce qui résulte de l'hypothèse faite sur U_{xxx} et la propriété $u \in \mathcal{G}_{B,D}(\Omega)$.

4. Les notes (sur 40)

Nombre de copies corrigées : 903
52 copies atteignent la moyenne
130 copies ont la note 0
46 % des copies ne dépassent pas 4
Moyenne : 6,8
Moyenne (sans tenir compte de la note 0) : 7,9
Répartition des notes :

0 à 4	5 à 9	10 à 14	15 à 19	20 à 24	25 à 29	30 à 34	35 à 40
419	211	151	70	24	14	8	6

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

Sujet (durée : 6 heures)

I

Soit un système matériel (Σ) soumis à des liaisons holonomes, dont la position par rapport à un repère absolu dépend de n paramètres q_1, q_2, ..., q_n, et éventuellement à des liaisons supplémentaires non holonomes. Toutes ces liaisons seront supposées indépendantes du temps.

Quand le système (Σ) est en mouvement par rapport au repère absolu, les q_r sont des fonctions du temps t. Ces fonctions sont supposées deux fois continûment différentiables. On note $\dot{q}_r$ la dérivée première de q_r par rapport à t.

A

On pose :
$$\omega_s = \sum_{i=1}^{n} a_{si} \dot{q}_i \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

où les a_{si} sont des fonctions continûment différentiables de q_1, q_2, ..., q_n.

La matrice des a_{si} est supposée régulière; on peut alors exprimer les $\dot{q}_r$ en fonction des ω_s :
$$\dot{q}_r = \sum_{j=1}^{n} b_{rj} \omega_j \qquad (r = 1, 2, \ldots, n) ;$$

la matrice des b_{rj} est la matrice inverse de la matrice des a_{si}. Les ω_s sont appelées les *pseudo-vitesses.*

On pose également :

$$d\pi_s = \sum_{i=1}^{n} a_{si}\, dq_i \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

Si les formes $d\pi_s$ sont fermées, ces relations définissent n fonctions π_s de $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Si les formes $d\pi_s$ ne sont pas fermées, les π_s n'existent pas en tant que fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_n$, mais on introduit conventionnellement les notations π_s et on donne aux π_s le nom de *pseudo-coordonnées.* Soit Φ une fonction numérique continûment différentiable de $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Montrer que sa différentielle $d\Phi$ peut s'écrire sous la forme :

$$d\Phi = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial \pi_s}\, d\pi_s$$

où on a posé :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \pi_s} = \sum_{r=1}^{n} b_{rs} \frac{\partial \Phi}{\partial q_r}$$

On dit que $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \pi_s}$ *est la dérivée partielle de* Φ *par rapport à la pseudo-coordonnée* π_s.

Cette définition s'étend évidemment aux fonctions vectorielles. Ceci posé, on considère un déplacement virtuel du système matériel (Σ) compatible avec les liaisons holonomes telles qu'elles existent à l'instant t. On note $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ les variations virtuelles des paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Les variations virtuelles des pseudo-coordonnées π_s sont définies par :

$$\delta\pi_s = \sum_{s=1}^{n} a_{si}\, \delta q_i \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

Supposant que les δq_r sont des fonctions continûment différentiables du temps (donc aussi les $\delta\pi_s$) et *admettant* la règle $(\dot{\delta q_r}) = \delta\dot{q}_r$, montrer que l'on a :

$$\left.\begin{aligned} &(\dot{\delta\pi_s}) - \delta\omega_s = \sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \gamma^s_{lm}\, \omega_l\, \delta\pi_m \\ &\text{où l'on a posé :} \\ &\gamma^s_{lm} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial a_{sk}}{\partial q_r} - \frac{\partial a_{sr}}{\partial q_k}\right) b_{rl}\, b_{km} \end{aligned}\right\} \quad (s,\ l,\ m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

Montrer que, pour s fixé, la matrice des γ^s_{lm} est antisymétrique.

s étant fixé, que peut-on dire des γ^s_{lm} quand la forme correspondante $\delta\pi_s$ est fermée ?

B

1° Soit dm un élément de masse du système (Σ), de centre d'inertie M. On désigne par $\vec{V}_M$ le vecteur vitesse de M par rapport au repère absolu, par $T = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Sigma \vec{V}_M^2\, dm$ l'énergie cinétique absolue de (Σ); T peut être considérée comme fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_n,\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.

On note $\delta\vec{M}$ un déplacement virtuel du point M compatible avec les liaisons holonomes telles qu'elles existent à l'instant t. Le travail virtuel des forces appliquées à (Σ) est une combinaison linéaire des δq_r, donc des $\delta\pi_s$; on la note $\displaystyle\sum_{s=1}^{n} P_s\, \delta\pi_s$, les P_s étant des fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Montrer que le principe des travaux virtuels se traduit par :

$$\frac{d}{dt}\int_\Sigma dm\, \vec{V}_M \cdot \delta\vec{M} - \delta T = \sum_{s=1}^{n} P_s\, \delta\pi_s,$$

puis, en explicitant le premier membre de cette équation, par :

$$\sum_{s=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial \pi_s} + \sum_{r=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \gamma^r_{ls} \frac{\partial T}{\partial \omega_r}\, \omega_l - P_s\right] \delta\pi_s = 0.$$

2° On suppose que le système (Σ) n'est soumis qu'à des liaisons holonomes, donc que les paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n$ sont indépendants.

Écrire les équations qui, jointes aux relations définissant les ω_s, permettent de déterminer les q_r et les ω_s en fonction du temps.

Que deviennent ces équations quand on prend :

$$\omega_s = \dot{q}_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)\,?$$

3° On suppose maintenant que le système (Σ) est soumis à des liaisons supplémentaires non holonomes définies par :

$$\omega_s = \sum_{i=1}^{n} a_{si}\,\dot{q}_i = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, \mathrm{N};\quad \mathrm{N} < n)$$

et que dans un déplacement virtuel compatible aussi avec ces liaisons supplémentaires, les forces imposant ces liaisons ne travaillent pas.

Écrire les $2n - \mathrm{N}$ équations permettant de déterminer $q_1, q_2, \ldots, q_n, \omega_{\mathrm{N}+1}, \omega_{\mathrm{N}+2}, \ldots, \omega_n$ en fonction du temps indépendamment de ces dernières forces.

Les diverses applications des résultats obtenus dans I *qui vont suivre sont indépendantes. Dans chacune d'elles, pour calculer, pour chaque valeur de* s, *les coefficients* γ^s_{lm}, *il est conseillé d'évaluer directement la différence* $(\delta\dot{\pi}_s) - \delta\omega_s$ *et de considérer que* γ^s_{lm} *est le coefficient de* $\omega_l\,\delta\pi_m$ *dans cette différence.*

II

Dans cette partie, (Σ) est une barre rectiligne infiniment mince AB qui glisse sans frottement sur un plan rapporté à deux axes orthonormés absolus Ox, Oy.

La position de la barre est repérée par les coordonnées x, y de l'un de ses points C et par l'angle $Ox, \overrightarrow{AB} = \theta$. On appelle m la masse de la barre, G son centre d'inertie. On désigne par d la mesure algébrique constante du vecteur $\overrightarrow{CG}$ comptée sur l'axe orienté par le vecteur $\overrightarrow{AB}$, par I le moment d'inertie de la barre AB par rapport au point C.

On pose :

$$q_1 = x \;;\quad q_2 = y \;;\quad q_3 = \theta$$

$$\omega_1 = -\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta \;;\quad \omega_2 = \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta \;;\quad \omega_3 = \dot{\theta}$$

1° Calculer les γ^s_{lm} $(s, l, m = 1, 2, 3)$.

2° On suppose qu'une liaison impose au vecteur vitesse du point C d'avoir constamment la direction de la barre AB (c'est, par exemple, le cas d'une lame de couteau qui est guidée sur un plan sans qu'elle puisse râcler ce dernier) et que les forces imposant cette liaison ne travaillent pas dans un déplacement virtuel compatible avec elle.

On suppose en outre, que la barre AB n'est soumise à aucune autre force.

En utilisant les résultats du I, écrire le système différentiel qui permet de déterminer ω_2 et ω_3 en fonction du temps.

3° Intégrer ce système. Calculer également θ en fonction du temps.

Déterminer l'équation intrinsèque de la trajectoire du point C (c'est-à-dire la relation qui lie son arc et son rayon de courbure).

III

Dans cette partie, (Σ) est un cerceau (circonférence matérielle) homogène, de centre G, de rayon a, de masse m.

Soient Ox, Oy, Oz des axes orthonormés absolus. Le cerceau est assujetti à rester en contact bilatéral avec le plan xOy supposé matérialisé.

On désigne par x et y respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point G. On appelle Gu, Gv, $G\zeta$ les axes orthonormés ainsi définis : Gu est parallèle à la tangente au cerceau en son point de contact avec le plan xOy, $G\zeta$ est perpendiculaire au plan du cerceau. On note ψ l'angle Ox, Gu compté positivement autour de Oz et θ l'angle Oz, $G\zeta$ compté positivement autour de Gu; θ est supposé dans la suite différent de 0 ct de π. On désigne par φ la rotation propre du cerceau.

On pose :

$$q_1 = x \;;\quad q_2 = y \;;\quad q_3 = \theta \;;\quad q_4 = \psi \;;\quad q_5 = \varphi\,.$$

On appelle ω_1 et ω_2 les composantes de la vitesse de glissement du cerceau respectivement sur Gu et sur un axe parallèle au plan xOy et perpendiculaire à Gu et ω_3, ω_4, ω_5 les composantes du vecteur rotation instantanée du cerceau sur les axes Gu, Gv, $G\zeta$ respectivement.

1° Calculer les γ^s_{lm} $(s, l, m = 1, 2, 3, 4, 5)$.

Dans ce qui suit, le cerceau est assujetti à *rouler sans glisser* sur le plan xOy supposé horizontal. L'axe Oz est vertical ascendant. La pesanteur, d'intensité constante g, est prise en considération.

2° En utilisant les résultats du I, écrire les équations différentielles permettant de calculer ω_3, ω_4, ω_5 en fonction du temps.

3° Former l'équation différentielle du second ordre qui fournit ω_5 en fonction de θ, puis celle qui donne ω_5 en fonction de la variable ξ définie par

$$\cos\theta = \varepsilon(1 - 2\xi) \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

Montrer que cette dernière équation a une solution particulière — qui sera notée $\mathcal{F}(\xi)$ — holomorphe à l'origine et y prenant la valeur 1; calculer les coefficients de la série entière représentant $\mathcal{F}(\xi)$ et déterminer le rayon de convergence de cette série.

Exprimer à l'aide de $\mathcal{F}$ la solution générale de l'équation différentielle donnant ω_5 en fonction de θ.

Indiquer comment on peut ensuite achever la résolution du problème.

IV

Dans cette partie, (Σ) est un chariot à deux essieux constitué par :

a. Un pont schématisé par une tige rectiligne infiniment mince AB de longueur Δ.

b. L'essieu arrière composé d'une tige rectiligne O_1O_2 infiniment mince, de longueur $2c$, de milieu A, rigidement liée au pont et perpendiculaire à AB et de deux roues schématisées par deux disques homogènes identiques, de même masse m, de même rayon r, de centres O_1 et O_2, dont les plans sont perpendiculaires à O_1O_2 et qui peuvent tourner sans frottement autour de O_1O_2.

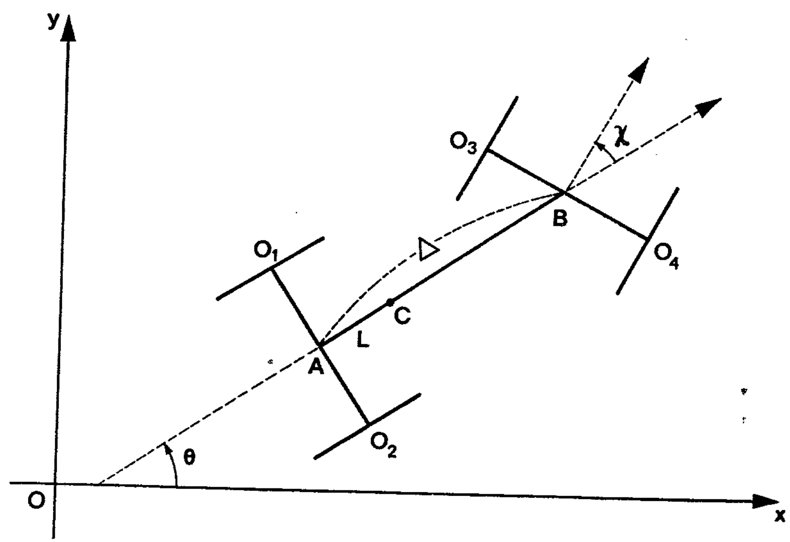
M_1, C, Θ_1 désignent respectivement la masse, le centre d'inertie et le moment d'inertie en A du solide constitué par les tiges AB et O_1O_2; le point C est sur AB à la distance L du point A.

c. L'essieu avant composé d'une tige rectiligne O_3O_4, de même longueur $2c$ que O_1O_2, assujettie par des liaisons sans frottement à tourner autour de son milieu B, supposé confondu avec son centre d'inertie, et à rester constamment dans le plan défini par AB et O_1O_2 et de deux roues identiques à celles de l'essieu arrière, de centres O_3 et O_4, dont les plans sont perpendiculaires à O_3O_4 et qui peuvent tourner sans frottement autour de O_3O_4.

M_2 et Θ_2 désignent respectivement la masse et le moment d'inertie en B de la tige O_3O_4.

Soient Ox, Oy, Oz des axes orthonormés absolus. Les quatre roues du chariot sont assujetties à rester en contact bilatéral avec le plan xOy supposé matérialisé.

(La figure donne une vue en plan du chariot.)



On prend pour paramètres l'abscisse x et l'ordonnée y du point B, l'angle $\theta = \widehat{Ox, \overrightarrow{AB}}$, l'angle χ que fait avec le vecteur $\overrightarrow{AB}$ l'axe parallèle au plan xOy et directement perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{O_3O_4}$ et les angles de rotation $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ des roues de centres respectifs O_1, O_2, O_3, O_4, φ_1, φ_2 (resp. φ_3, φ_4) étant comptés positivement autour d'un axe de même direction et de même sens que le vecteur $\overrightarrow{O_2O_1}$ (resp. $\overrightarrow{O_4O_3}$).

On pose :

$$q_1 = x \,;\; q_2 = y \,;\; q_3 = \theta \,;\; q_4 = \chi \,;\; q_{4+i} = \varphi_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

On pose également :

$$\omega_1 = -\dot{x}\sin(\theta + \chi) + \dot{y}\cos(\theta + \chi) \;;$$

$$\omega_2 = -\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta - \Delta\dot{\theta}$$

ω_3 (resp. ω_4) est la composante sur un axe parallèle au plan xOy et faisant l'angle θ avec Ox de la vitesse de glissement de la roue de centre O_1 (resp. O_2) tandis que ω_5 (resp. ω_6) est la composante sur un axe parallèle au plan xOy et faisant l'angle $\theta + \chi$ avec Ox de la vitesse de glissement de la roue de centre O_3 (resp. O_4).

On introduit enfin :

$$\omega_7 = \dot{x} \cos (\theta + \chi) + \dot{y} \sin (\theta + \chi) \quad ; \quad \omega_8 = \dot{\chi} .$$

1° Montrer que la force vive du chariot peut se mettre sous la forme :

$$2\,T = (M_1 + 2\,m)\,[(-\,\omega_1 \sin\chi + \omega_7 \cos\chi)^2 + \omega_2^2] + 2\,M_1 L\,\omega_2\dot{\theta}$$
$$+ \left(\Theta_1 + 2\,mc^2 + \frac{mr^2}{2}\right)\dot{\theta}^2 + (M_2 + 2\,m)\,(\omega_1^2 + \omega_7^2)$$
$$+ \left(\Theta_2 + 2\,mc^2 + \frac{mr^2}{2}\right)(\dot{\theta} + \omega_8)^2 + \frac{mr^2}{2}\,(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2 + \dot{\varphi}_4^2)$$

où $\dot{\theta}$ et les $\dot{\varphi}_i$ sont supposés exprimés en fonction de χ et des ω_s par des formules que l'on explicitera.

2° On suppose dans la suite que, d'une part, les quatre roues sont assujetties à rouler sans glisser sur le plan xOy, d'autre part que des liaisons imposent aux vecteurs vitesse des points A et B de rester constamment perpendiculaires aux tiges O_1O_2 et O_3O_4 respectivement.

On suppose également que les forces imposant ces dernières liaisons ainsi que les forces données qui peuvent éventuellement s'exercer sur le chariot ne travaillent pas dans un déplacement virtuel compatible avec toutes les liaisons envisagées.

En utilisant les résultats du I, écrire les équations du mouvement du chariot (on commencera par calculer les coefficients γ_{lm}^{s} nécessaires pour former ces équations et ceux-là seulement).

Montrer que ces équations admettent deux intégrales premières dont on donnera la signification mécanique et que la résolution du problème peut être ramenée aux quadratures.

RAPPORT SUR L'EPREUVE DE MECANIQUE GENERALE

1. Thème du sujet

On proposait aux candidats d'établir les équations dites «d'EULER-LAGRANGE» obtenues indépendamment par POINCARE, HAMEL et BOLTZMANN et de les appliquer à quelques problèmes. Bien que ces équations aient une forme plus compliquée que les équations de LAGRANGE habituelles, elles peuvent être commodes quand il est indiqué d'utiliser des paramètres de vitesse et quand le système est soumis à des liaisons non holonomes. On pourra consulter à leur sujet les ouvrages suivants : A.I. LOURIE : *Mécanique Analytique ;* G. HAMEL : *Théoretische Mechanik.*

La première partie était consacrée à l'établissement de ces équations dans le cas de liaisons indépendantes du temps. Elle était abordable par un candidat ayant compris comment on formait les équations de LAGRANGE ordinaires.

Dans II était considéré le problème simple de la «lame de couteau», dans III, le problème un peu plus compliqué du cerceau pesant roulant sans glisser sur un plan horizontal.

La quatrième partie, plus difficile, était consacrée au mouvement du chariot à deux essieux, étudié par STÜCKLER. C'est un bon exemple d'application des équations d'Euler-Lagrange, mais les calculs sont assez compliqués. En outre, une certaine liberté de manœuvre était volontairement laissée aux candidats. Cette partie était donc réservée aux meilleurs d'entre eux.

2. Résumé de la solution

I

(A)

$$d\Phi = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial q_r} dq_r = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial q_r} \left(\sum_{s=1}^{n} b_{rs}\, d\pi_s \right)$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{r=1}^{n} b_{rs} \frac{\partial \Phi}{\partial q_r} \right) d\pi_s$$

— Utilisant la règle $\dot{\left(\delta q_r\right)} = \delta \dot{q}_r$, on trouve :

$$\dot{\left(\delta \pi_s\right)} - \delta \omega_s = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial a_{sk}}{\partial q_r} - \frac{\partial a_{sr}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_r \delta q_k$$

Il suffit de remplacer les $\dot{q}_r$ en fonction des w_l et les δq_k en fonction des $\delta \pi_m$ pour obtenir le résultat demandé.

— L'antisymétrie de la matrice des γ_{lm}^{s} pour s fixé est évidente. Si la forme $\delta \pi_s$ est fermée, les γ_{lm}^{s} sont nuls.

(B)

1° Le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\int_{\Sigma} dm \frac{d\vec{V}_M}{dt} . \delta \vec{M} = \sum_{s=1}^{n} P_s\, \delta \pi_s$$

donc :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} dm\, \vec{V}_M . \delta \vec{M} - \int_{\Sigma} dm\, \vec{V}_M . \frac{d}{dt}\left(\delta \vec{M}\right) = \sum_{s=1}^{n} P_s\, \delta \pi_s$$

Puisque $\frac{d}{dt}\left(\delta \vec{M}\right) = \delta \vec{V}_M$ (calcul classique), la deuxième intégrale est δT, ce qui démontre la première formule.

On a :

$$\delta T = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \omega_s} \delta \omega_s + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \pi_s} \delta \pi_s$$

D'autre part, on peut écrire :

$$\int_{\Sigma} dm\, \vec{V}_M . \delta \vec{M} = \int_{\Sigma} dm\, \vec{V}_M . \left(\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \vec{M}}{\partial \pi_s} \delta \pi_s \right)$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \left[\int_{\Sigma} dm\, \vec{V}_M . \frac{\partial \vec{M}}{\partial \pi_s} \right] \delta \pi_s$$

De $\vec{V}_M = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \vec{M}}{\partial \pi_s} \omega_s$, on tire $\frac{\partial \vec{V}_M}{\partial \omega_s} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \pi_s}$

Et par conséquent :

$$\int_{\Sigma} dm\, \vec{V}_M . \delta \vec{M} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \omega_s} \delta \pi_s$$

Il vient donc :

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \omega_s} \delta \pi_s \right) - \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_s} \delta \omega_s + \frac{\partial T}{\partial \pi_s} \delta \pi_s \right) = \sum_{s=1}^{n} P_s\, \delta \pi_s$$

et ensuite le résultat demandé en remplaçant $(\delta \dot{\pi}_s)$ par sa valeur tirée de la formule du (A)

2° Les $\delta \pi_s$ sont alors indépendants, ce qui donne les équations :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial \pi_s} + \sum_{r=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \gamma_{ls}^{r} \frac{\partial T}{\partial \omega_r} \omega_l - P_s = 0$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n)$$

si $w_s = q_s$, on a $d\pi_s = dq_s$, les γ_{lm}^{s} sont nuls et on retrouve les équations de Lagrange ordinaires.

3° Un déplacement virtuel compatible avec les liaisons supplémentaires est défini par $\delta\pi_1 = \ldots = \delta\pi_N = 0$. La formule finale du 1° donne, compte tenu de $w_1 = \ldots = w_N = 0$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial \pi_s} + \sum_{r=1}^{n} \sum_{l=N+1}^{n} \gamma_{ls}^{r} \frac{\partial T}{\partial \omega_r} \omega_l - P_s = 0$$

$$(s = N+1, \ldots, n)$$

où les $P_{N+1}, \ldots, P_n$ ne contiennent pas les réactions supplémentaires et où on doit remplacer $w_1, \ldots, w_N$ par zéro après la formation des dérivées partielles de T.

A ces équations, on doit ajouter :

$$\dot{q}_r = \sum_{s=N+1}^{n} b_{rs}\, \omega_s \quad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

II

1° On trouve facilement $\quad \gamma_{23}^{1} = -\gamma_{32}^{1} = \gamma_{31}^{2} = -\gamma_{13}^{2} = 1$

les autres $\quad \gamma_{lm}^{s} \quad$ sont nuls.

2° La liaison s'exprime par $w_1 = 0$; w_2 est alors la mesure algébrique de la vitesse de C comptée sur $\overrightarrow{AB}$.

On trouve : $\quad 2T = m\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) + 2md\,\omega_1\omega_3 + I\omega_3^2$

I , B , 3° donne alors :

$$\dot{\omega}_2 = d\,\omega_3^2 \quad ; \quad I\dot{\omega}_3 + md\,\omega_2\omega_3 = 0$$

3° L'élimination de w_3 donne $\quad \ddot{\omega}_2 = -\frac{2md}{I}\omega_2\dot{\omega}_2$

donc : $\quad \dot{\omega}_2 = -\frac{md}{I}\omega_2^2 + Cte$

Comme $\dot{\omega}_2 = d\,\omega_3^2$, la constante est du signe de d ; la posant égale à $\frac{md}{I} w_2^{0\,2}$, on a $\quad \dot{\omega}_2 = \frac{md}{I}\left(\omega_2^{0\,2} - \omega_2^2\right) \quad$ Prenant comme instant $t = 0$ celui où $w_2 = w_2^0$, on trouve :

$$\omega_2 = \omega_2^0 \, \mathrm{th}\, \frac{md\omega_2^0}{I}t \quad \text{puis} \quad \omega_3 = \dot{\theta} = \varepsilon\sqrt{\frac{m}{I}}\,\omega_2^0 \frac{1}{\mathrm{ch}\,\frac{md\omega_2^0}{I}t} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

puis en prenant $\theta = 0$ pour $t = 0$

$$\theta = \varepsilon\sqrt{\frac{I}{md^2}}\ \mathrm{Arc\,tg}\left(\mathrm{sh}\,\frac{md\omega_2^0}{I}t\right)$$

L'arc s de la trajectoire de C est

$$s = \int_0^t \omega_2(u)\,du = \frac{I}{md}\log \mathrm{ch}\,\frac{md\omega_2^0}{I}t$$

Son centre de courbure est le centre instantané de rotation du mouvement de AB sur le plan xOy, de sorte que le rayon de courbure algébrique ρ est

$$\rho = \frac{\omega_2}{\omega_3} = \varepsilon\sqrt{\frac{I}{m}}\ \mathrm{sh}\,\frac{md\omega_2^0}{I}t$$

L'équation intrinsèque est donc :

$$e^{\frac{2md}{I}s} = 1 + \frac{m}{I}\rho^2$$

III

1° On calcule w_1 et w_2 en utilisant les axes orthonormés $Ouwz$ déduits des axes $Oxyz$ par la rotation d'angle ψ autour de Oz ; on obtient :

$$\omega_1 = \dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi + a\omega_5$$

$$\omega_2 = -\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi + a\omega_3\sin\theta$$

avec :

$$\omega_3 = \dot{\theta} \quad , \quad \omega_4 = \dot{\psi}\sin\theta \quad , \quad \omega_5 = \dot{\psi}\cdot\cos\theta + \dot{\varphi}$$

On en déduit :

$$\gamma_{34}^{5} = -\gamma_{43}^{5} = 1 \quad ; \quad \gamma_{34}^{4} = -\gamma_{43}^{4} = \cot\theta$$

$$\gamma_{42}^{1} = -\gamma_{24}^{1} = \gamma_{14}^{2} = -\gamma_{41}^{2} = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\gamma_{45}^{2} = -\gamma_{54}^{2} = \frac{a}{\sin\theta}$$; les autres $\gamma_{\ell m}^{s}$ sont nuls.

2° Les liaisons s'expriment par $w_1 = w_2 = 0$.
La force vive du cerceau s'écrit :

$$2T = m(\omega_1^2+\omega_2^2) + \frac{3ma^2}{2}\omega_3^2 + \frac{ma^2}{2}\omega_4^2 + 2ma^2\omega_5^2$$
$$- 2ma\,\omega_1\omega_5 - 2ma\sin\theta\,\omega_2\omega_3$$

Le travail virtuel du poids est :

$$-mga\cos\theta\ \delta\Pi_3$$

D'après (I), (B), 3°, on obtient :

$$\begin{cases} 3\dot{\omega}_3 - \omega_4^2\cot\theta + 4\omega_4\omega_5 = -\dfrac{2g}{a}\cos\theta \\ \dot{\omega}_4 + \omega_3\omega_4\cot\theta - 2\omega_3\omega_5 = 0 \\ 2\dot{\omega}_5 - \omega_3\omega_4 = 0 \end{cases}$$

3° Comme $\omega_3 = \dot{\theta}$, les deux dernières équations donnent :

$$2\frac{d\omega_5}{d\theta} = \omega_4 \quad , \quad \frac{d\omega_4}{d\theta} + \omega_4\cot\theta - 2\omega_5 = 0$$

Eliminant w_4, on obtient :

$$\frac{d^2\omega_5}{d\theta^2} + \frac{d\omega_5}{d\theta}\cot\theta - \omega_5 = 0$$

que le changement de variable considéré transforme en l'équation hyper-géométrique :

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2\omega_5}{d\xi^2} + (1-2\xi)\frac{d\omega_5}{d\xi} - \omega_5 = 0$$

On en cherche une solution de la forme

$$\mathcal{F}(\xi) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n\xi^n$$

On trouve : $c_1 = 1$, $c_{n+1} = \dfrac{n^2+n+1}{(n+1)^2}c_n$, le rayon de convergence est 1.

Comme $\xi = \dfrac{1\pm\cos\theta}{2}$ on obtient

$$\omega_5(\theta) = \lambda\,\mathcal{F}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right) + \mu\,\mathcal{F}\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \quad (\lambda,\mu\ \text{Ctes})$$

On en déduit $w_4(\theta)$ par simple dérivation. La première équation du 2°, s'écrivant :

$$3\frac{d}{d\theta}(\omega_3^2) = -\frac{4g}{a}\cos\theta + 2\omega_4^2\cot\theta - 8\omega_4\omega_5$$, donne $w_3(\theta)$

par quadrature. On obtient $\theta, \psi, \varphi, x, y$ par de nouvelles quadratures.

(IV)

w_1 (resp. w_2) est la composante de $\vec{V}_B$ (resp. $\vec{V}_A$) sur $\vec{O_4 O_3}$ (resp. $\vec{O_2 O_1}$) ; w_7 est la composante de $\vec{V}_B$ sur la perpendiculaire à $O_4 O_3$.

On trouve :

$$\omega_3 = \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta - c\dot{\theta} - r\dot{\varphi}_1$$

$$\omega_4 = \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta + c\dot{\theta} - r\dot{\varphi}_2$$

$$\omega_5 = \dot{x}\cos(\theta+\chi) + \dot{y}\sin(\theta+\chi) + c(\dot{\theta}+\dot{\chi}) - r\dot{\varphi}_3$$

$$\omega_6 = \dot{x}\cos(\theta+\chi) + \dot{y}\sin(\theta+\chi) + c(\dot{\theta}+\dot{\chi}) - r\dot{\varphi}_4$$

On a aisément les formules inverses, en particulier celles qui sont demandées au 1°:

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\Delta}\left(\cos\chi\,\omega_1 + \sin\chi\,\omega_7 - \omega_2\right)$$

$$\dot{\varphi}_1 = -\frac{1}{r}\left(\sin\chi + \frac{c}{\Delta}\cos\chi\right)\omega_1 + \frac{1}{r}\left(\cos\chi - \frac{c}{\Delta}\sin\chi\right)\omega_7 + \frac{c}{r\Delta}\omega_2 - \frac{1}{r}\omega_3$$

$$\dot{\varphi}_2 = -\frac{1}{r}\left(\sin\chi - \frac{c}{\Delta}\cos\chi\right)\omega_1 + \frac{1}{r}\left(\cos\chi + \frac{c}{\Delta}\sin\chi\right)\omega_7 - \frac{c}{r\Delta}\omega_2 - \frac{1}{r}\omega_4$$

$$\dot{\varphi}_3 = -\frac{c}{r\Delta}\omega_1\cos\chi + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{c}{\Delta}\sin\chi\right)\omega_7 - \frac{1}{r}\omega_5 - \frac{c}{r}\omega_8 + \frac{c}{r\Delta}\omega_2$$

$$\dot{\varphi}_4 = \frac{c}{r\Delta}\omega_1\cos\chi + \frac{1}{r}\left(1 + \frac{c}{\Delta}\sin\chi\right)\omega_7 - \frac{1}{r}\omega_6 + \frac{c}{r}\omega_8 - \frac{c}{r\Delta}\omega_2$$

1° On calcule la force vive de chaque élément du chariot :

solide O_1O_2, AB :

$$M_1(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + (\Theta_1 - M_1\Delta^2)\dot{\theta}^2 - 2M_1(\Delta - L)\omega_2\dot{\theta}$$

barre O_3O_4 :

$$M_2(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \Theta_2(\dot{\theta}+\dot{\chi})^2$$

Roues O_1 et O_2 :

$$2m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + 2m\left(c^2 - \Delta^2 + \frac{r^2}{4}\right)\dot{\theta}^2 - 4m\Delta\omega_2\dot{\theta} + \frac{mr^2}{2}(\dot{\varphi}_1^2+\dot{\varphi}_2^2)$$

Roues O_3 et O_4 :

$$2m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + 2m\left(c^2 + \frac{r^2}{4}\right)(\dot{\theta}+\dot{\chi})^2 + \frac{mr^2}{2}(\dot{\varphi}_3^2+\dot{\varphi}_4^2)$$

On ajoute en <u>groupant les roues et les essieux correspondants</u> ; on remplace $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$, coefficient de $M_2 + 2m$, par $w_1^2 + w_7^2$; le coefficient de $M_1 + 2m$ est $\dot{x}^2+\dot{y}^2 - \Delta^2\dot{\theta}^2 - 2\Delta\omega_2\dot{\theta}$, soit $\vec{V}_A^2$ ou $(-\omega_1\sin\chi + \omega_7\cos\chi)^2 + \omega_2^2$ en décomposant $\vec{V}_A$ suivant $\vec{AB}$ et $\vec{O_2 O_1}$. On a alors la formule de l'énoncé.

2° Les liaisons imposées s'expriment par $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = w_6 = 0$. Utilisant (I), (B), 3°, on écrit les équations correspondant à $s = 7,8$.

Il faut donc calculer les γ^r_{78} ; on en trouve un seul non nul : $\gamma^1_{78} = 1$.

Les équations sont donc :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\omega_7}\right) - \omega_8\frac{\partial T}{\partial\omega_1} - \frac{\partial T}{\partial\Pi_7} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\omega_8}\right) + \omega_7\frac{\partial T}{\partial\omega_1} - \frac{\partial T}{\partial\Pi_8} = 0$$

Le calcul de $\frac{\partial T}{\partial\omega_1}$, $\frac{\partial T}{\partial\omega_7}$, $\frac{\partial T}{\partial\omega_8}$ pour $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = w_6 = 0$

est un peu long, mais des simplifications apparaissent.

D'autre part, on a : $\dfrac{\partial T}{\partial \pi_7} = 0$ et $\dfrac{\partial T}{\partial \pi_8} = \dfrac{\partial T}{\partial \chi}$ qu'on peut calculer en faisant $w_1 = \ldots = w_6 = 0$ dans T avant la dérivation.

On obtient ainsi les équations :

$$\begin{cases} \left(\mu + \mu_2 \sin^2\chi\right)\dot{\omega}_7 + \mu_2 \sin\chi \cos\chi\, \omega_7 \omega_8 + \nu \sin\chi\, \dot{\omega}_8 = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\sin\chi\, \omega_7 + \Delta\, \omega_8\right) = 0 \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} \mu = M_1 + M_2 + 6m \\ \mu_2 = \dfrac{1}{\Delta^2}\left(\Theta_1 + \Theta_2 + 6mc^2 + mr^2\right) - \left(M_1 + 3m\right) \\ \nu = \dfrac{1}{\Delta}\left(\Theta_2 + 3mc^2 + \dfrac{mr^2}{2}\right) \end{cases}$$

$\omega_8 = \dot{\chi}$ et $\dot{\theta} = \dfrac{\sin\chi}{\Delta}\omega_7$ (compte tenu de $w_1 = w_2 = 0$) permettent de remplacer la deuxième équation par $\dot{\theta} + \dot{\chi} = C^{te}$: la vitesse angulaire de l'axe de l'essieu avant reste constante.

D'autre part, l'intégrale de l'énergie cinétique existe : $2\,T$, où on fait $w_1 = \ldots = w_6 = 0$, reste constante. On voit aisément que cette équation se met sous la forme $\dot{\chi}$ = fonction de χ ; on obtient donc $\chi(t)$ par une quadrature. On a ensuite $\theta(t) = -\chi(t) +$ fonction linéaire de t. Enfin, les équations de liaison donnent les dérivées temporelles des autres paramètres en fonction de θ et de χ, donc ces paramètres par des quadratures.

3. Observations des correcteurs

Les résultats de l'épreuve de mécanique générale sont, depuis d'assez nombreuses années, très décevants ; cette année, le record de médiocrité est largement battu.

Beaucoup de candidats connaissent mal ou même ne connaissent pas du tout le principe des travaux virtuels.

Aucun candidat n'a vu que, comme pour les équations de Lagrange ordinaires, on n'avait pas le droit de simplifier la force vive à l'aide des liaisons non holonomes avant de former les équations du mouvement, de sorte qu'aucun candidat n'a obtenu les équations correctes, même dans la deuxième partie pourtant très facile.

Il semble donc utile de donner quelques précisions sur la dernière question de la première partie.

Un déplacement virtuel compatible avec les liaisons supplémentaires non holonomes vérifie $\delta\pi_1 = \ldots = \delta\pi_N = 0$. Par hypothèse, les réactions supplémentaires ne travaillent pas dans un tel déplacement virtuel. Donc, dans un déplacement virtuel respectant seulement les liaisons holonomes, le travail des réactions supplémentaires est de la forme $\lambda_1\,\delta\pi_1 + \ldots + \lambda_N\,\delta\pi_N$. Notant $\sum_{s=1}^{n} P'_s\,\delta\pi_s$ le travail des autres forces dans un tel déplacement, on a :

$$P_1 = P'_1 + \lambda_1 ; \ldots ; P_N = P'_N + \lambda_N ; P_{N+1} = P'_{N+1} ; \ldots ; P_n = P'_n .$$

On peut alors écrire les équations de I, B, 2° où la force vive est calculée sans tenir compte des liaisons non holonomes.

Evidemment, après avoir formé les équations, on y remplace $w_1, \ldots w_N$ par zéro et on obtient ainsi deux groupes d'équations :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \omega_i}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \pi_i} + \displaystyle\sum_{r=1}^{n}\sum_{\ell=N+1}^{n} \gamma_{\ell i}^{r}\, \dfrac{\partial T}{\partial \omega_r}\,\omega_\ell = P'_i + \lambda_i \\ \qquad (i = 1, \ldots, N) \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \omega_s}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \pi_s} + \displaystyle\sum_{r=1}^{n}\sum_{\ell=N+1}^{n} \gamma_{\ell s}^{r}\, \dfrac{\partial T}{\partial \omega_r}\,\omega_\ell = P'_s \\ \qquad (s = N+1, \ldots, n) \end{cases}$$

le second groupe ne contenant pas les réactions supplémentaires. C'est d'ailleurs là l'un des avantages des équations d'Euler-Lagrange : on obtient les équations du mouvement directement, sans passer par l'élimination de réactions ou de multiplicateurs.

4° Les notes (sur 40)

Un barème excessivement bienveillant a permis à un tout petit nombre de candidats d'obtenir une note voisine de la moyenne :

0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 19	20 à 24	25 à 40
32	117	44	16	4	6	0

Nombre de copies corrigées : 219

Moyenne : 4,73 (en excluant les copies nulles : 5,55).

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Sujet (durée : 6 heures)

N. B. — *La troisième partie est indépendante des deuxième et quatrième parties.*

DÉFINITIONS, NOTATIONS ET RAPPELS

1° Dans tout le problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ compactifié par deux éléments à l'infini (notés ∞ et $-\infty$); $\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs, et $\overline{\mathbb{R}^+}$ l'ensemble précédent compactifié par un élément à l'infini noté « ∞ ». $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ désigne la tribu des boréliens de $\overline{\mathbb{R}}$ et, plus généralement, $\mathcal{B}(U)$ désigne la tribu des boréliens de U, où U est un sous-ensemble de $\overline{\mathbb{R}}$.

Toute application de $\overline{\mathbb{R}}$, ou d'un sous-ensemble de $\overline{\mathbb{R}}$, mesurable relativement aux tribus boréliennes correspondantes, sera dite borélienne.

2° Désignant par $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, on appelle variable aléatoire réelle (en abrégé v.a.r.) définie sur cet espace, une application de Ω dans $\overline{\mathbb{R}}$, mesurable relativement aux tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, et on dira qu'une v.a.r. est positive, si elle est à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}^+}$.

Étant donnée une v.a.r. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on note $\sigma(X)$ la tribu engendrée par X et on rappelle que, si Y est une v.a.r. $\sigma(X)$ - mesurable, il existe une application borélienne f, telle que $Y = f(X)$.