3. Les notes (sur 60)

Nombre de copies corrigées : 2 089

Répartition des notes :

0 :	7,92 %
1 à 4 :	50,45 %
5 à 8 :	13,74 %
9 à 12 :	7,21 %
13 à 16 :	4,75 %
17 à 20 :	4,88 %
21 à 24 :	4,28 %
25 à 28 :	1,84 %
29 à 32 :	1,93 %
33 à 36 :	1,07 %
37 à 40 :	0,54 %
41 à 48 :	0,58 %
49 à 60 :	0,76 %

ANALYSE NUMÉRIQUE

Sujet (durée : 6 heures)

AVERTISSEMENT

Les candidats sont priés de respecter les notations et la numérotation de l'énoncé. Les notations ou abréviations abusives risquent de ne pas être comprises.

Les démonstrations et présentations concises, claires et soignées seront particulièrement bien appréciées.

Le problème est consacré à l'approximation des solutions d'un problème de Cauchy $\mathcal{P}$ pour une équation aux dérivées partielles de la forme $\frac{\partial u}{\partial t} = f\left(x\,,\ t\,,\ u\,,\ \frac{\partial u}{\partial x}\,,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ où $u : (x\,,\ t) \longmapsto u(x\,,\ t)$ est l'inconnue.

Dans la partie 1 de caractère technique on établit des résultats utiles pour la suite. Dans la partie 2 on définit le problème approché $\mathcal{P}_h$ et on fait étudier quelques propriétés qui conduisent à un théorème d'existence et d'unicité de sa solution $\vec{\mathrm{U}}^h$, le point essentiel étant la question ***Q. 8.*** L'approximation de u, solution de $\mathcal{P}$, par $\vec{\mathrm{U}}^h$ résulte alors d'estimations à priori convenables (partie 3).

0. NOTATIONS ET HYPOTHÈSES

$\mathbb{R}$ est le corps des réels, T un réel positif; on définit I et Ω (resp I_0 et Ω_0) par $\mathrm{I} = [0\,,\mathrm{T}]$, $\Omega = \mathbb{R} \times \mathrm{I}$ (resp $\mathrm{I}_0 =]0\,,\ \mathrm{T}]$, $\Omega_0 = \mathbb{R} \times \mathrm{I}_0$). $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers algébriques, $\mathbb{N}^*$ celui des entiers strictement positifs et $\mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{0\}$. Les suites indexées par $\mathbb{Z}$ seront notées vectoriellement : $\vec{s} = \{s_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$.

Les notations Φ_t, Φ_x, Φ_{xx}, etc. désignent les dérivées partielles de la fonction $\Phi : (x, t) \longmapsto \Phi(x, t)$ respectivement du 1^er^ ordre en t, du 1^er^ ordre et du 2^d^ ordre en x, etc., quand ces dérivées existent.

On considère le problème de Cauchy non linéaire :

$$\mathcal{P} \begin{cases} u_t = f(x, t, u, u_x, u_{xx}), & (x, t) \in \Omega_0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où $\varphi : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ et $f : \Omega \times \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}$ sont des fonctions données satisfaisant à :

(0.1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\varphi(x)| \leqslant Ae^{Bx^2}$, A et B constantes positives

(0.2) $(x, t, z, p, r) \longmapsto f(x, t, z, p, r)$ est continue dans $\Omega \times \mathbb{R}^3$

(0.3) $\exists \eta$, η constante positive telle que,

$\forall (x, t, z, p) \in \Omega \times \mathbb{R}^2$, $\forall r$ et $r^* \in \mathbb{R}$ avec $r \geqslant r^*$

on ait

$$f(x, t, z, p, r) - f(x, t, z, p, r^*) \geqslant \eta(r - r^*)$$

(0.4) $\exists L$, L constante positive telle que

$\forall (x, t) \in \Omega$, $\forall (z, p, r)$ et $(z^*, p^*, r^*) \in \mathbb{R}^3$

on ait

$$|f(x, t, z, p, r) - f(x, t, z^*, p^*, r^*)| \leqslant L(|z - z^*| + |p - p^*| + |r - r^*|)$$

(0.5) $\forall (x, t) \in \Omega$, $|f(x, t, 0, 0, 0)| \leqslant Ae^{Bx^2}$.

On définit la constante E par $4\,ELT = 1$ et on suppose dans tout ce qui suit que les hypothèses (0.1) à (0.5) ont lieu avec $B < E$.

1. PRÉLIMINAIRES

Q. 1 On considère une suite $\vec{\rho} = \{\rho_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $\rho_i \in \mathbb{R}$ telle que

(1.1) $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\rho_{-i} = -\rho_i$, $\rho_i < \rho_{i+1}$

(1.2) $\lim\limits_{i \to +\infty} \rho_i = +\infty$

(1.3) $\rho_i(\rho_{i+1} - \rho_{i-1}) = O(1)$ pour $i \longrightarrow +\infty$.

a. Donner un exemple de telles suites en considérant des fonctions du type : $x \longmapsto \psi(x) = x^\alpha\,|\operatorname{Log} x|^\beta$ pour $x > 0$ et en posant $\rho_i = \psi(i + 1)$ pour $i > 0$. On déterminera alors α et β pour que (1.1), (1.2) et (1.3) soient satisfaites.

b. Plus généralement, si θ est une fonction de la variable réelle x, impaire, strictement croissante, dérivable telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \theta(x) = +\infty$, montrer que si :

la fonction $x \longmapsto \theta'(x)\ \theta(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$, alors $\rho_i = \theta(i)$ satisfait à (1.1), (1.2) et (1.3).

Q. 2 Soient C et D des constantes telles que $0 < B \leqslant C \leqslant D < E$.

On considère les fonctions G et H définies sur Ω par :

$$(x, t) \longmapsto G(x, t) = (1 - 4\,DLt)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{Cx^2}{1 - 4\,DLt}\right)$$

$$(x, t) \longmapsto H(x, t) = G(x, t) \exp\left(-\frac{1}{2}P(x) + \gamma Lt\right)$$

où $P(x) = \left[\left(\frac{1}{4C}\right)^2 + x^2\right]^{\frac{1}{2}}$ et $\gamma = 1 + \dfrac{E}{4(E - D)}$,

le symbole exp désignant la fonction exponentielle $x \longmapsto e^x$.

En démontrant que, pour $x \geqslant 0$ on a

$$8\left(1 - \frac{dP}{dx}\right)Cx \leqslant 1, \quad \left(1 - \frac{dP}{dx}\right)^2 \leqslant 1 + 2\frac{d^2P}{dx^2}, \quad \frac{d^2P}{dx^2} \leqslant 4\,C$$

établir que, pour tout $(x, t) \in \Omega$:

$$(1.4) \qquad \frac{H_t}{LH} - \frac{H_{xx} + |H_x| + H}{H} \geqslant \frac{G_t}{LG} - \frac{G_{xx}}{G} \geqslant 2(D - C)(1 + 2Cx^2)$$

$$(1.5) \qquad G_{xx} \geqslant 0 , \quad H_{xx} \geqslant 0 .$$

Q. 3 Soit $h > 0$. On pose $x_i = h\rho_i$ où $\{\rho_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ est une suite satisfaisant aux hypothèses énoncées en ***Q. 1.***

Pour toute fonction $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto v(x)$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on pose $v_i = v(x_i)$ et on définit les opérateurs δ et δ^2 différence première et seconde (δ^2 ne signifiant pas ici le carré de δ) :

$$\delta \ : \delta v_i = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

$$\delta^2 : \delta^2 v_i = \alpha_i^+ v_{i+1} - \alpha_i v_i + \alpha_i^- v_{i-1}$$

avec
$$\alpha_i^+ = \frac{2}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})},$$

$$\alpha_i = \frac{2}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)},$$

$$\alpha_i^- = \frac{2}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})}.$$

Une fonction vectorielle $\vec{V}$ de $t \in I$ et de $\vec{v} = \{v_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ définie par ses composantes $V_i(t, \vec{v})$, $i \in \mathbb{Z}$ est dite quasi monotone croissante en $\vec{v}$ pour exprimer que

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \quad \forall t \in I, \quad (\forall j \neq i, v_j^* \leqslant v_j \, ; \, v_i^* = v_i) \Rightarrow V_i(t, \vec{v^*}) \leqslant V_i(t, \vec{v}).$$

Dans tout ce qui suit on considérera la fonction $\vec{F}$:

$$\vec{F}(t, \vec{v}) = \{ F_i(t, \vec{v}) \}_{i \in \mathbb{Z}}$$

définie par

$$F_i(t, \vec{v}) = f_i(t, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) \equiv f(x_i, t, v_i, \delta v_i, \delta^2 v_i)$$

Établir que, dans les hypothèses (0,3) et (0,4) il existe une valeur $h_0 = h_0(\eta, L, \vec{\rho}) > 0$ telle que $\vec{F}$ soit quasi monotone croissante en $\vec{v}$, pour tout $h \in]0, h_0[$.

Q. 4 Démontrer qu'il existe $h_1 = h_1(C, D, E, \vec{\rho})$ tel que l'on ait :

$$\forall t \in I, \quad \forall h \in]0, h_1[\quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

$$(1.6) \qquad H_t(x_i, t) \geqslant L(H_i + |\delta H_i| + \delta^2 H_i)$$

où $H_i = H(x_i, t)$.

On admettra le résultat suivant (dont la démonstration nécessite des calculs assez longs non demandés ici) :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists h_1'(\varepsilon, C, D, E, \vec{\rho}) \quad , \qquad \forall t \in I, \quad \forall h \in]0, h_1'[$$

et $\forall i \in \mathbb{N}^*$:

$$\delta H_i - H_x(x_i, t) \leqslant \varepsilon(1 + x_i)H_i$$
$$\delta^2 H_i - H_{xx}(x_i, t) \leqslant \varepsilon(1 + x_i)^2 H_i .$$

2. PROBLÈME APPROCHÉ

Dans cette partie la notation $'$ désigne la dérivation par rapport à t. Au problème $\mathcal{P}$ considéré on associe le problème approché $\mathcal{P}_h$:

$$\mathcal{P}_h \left\{ \begin{array}{lll} u'(x_i, t) & = f_i(t, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}) & \quad t \in I, \quad i \in \mathbb{Z} \\ u(x_i, 0) & = \varphi_i & \end{array} \right.$$

où $u_i = u(x_i, t)$ et $\varphi_i = \varphi(x_i)$.

On considère les fonctions vectorielles $t \longmapsto \vec{\omega}(t) = \{ \omega_i(t) \}_{i \in \mathbb{Z}}$ telles que

$\mathcal{H}$: pour tout $i \in \mathbb{Z}$, ω_i est continue sur I, différentiable sur I_0.

Une telle fonction est dite une *sur-solution* (resp. *sous-solution*) de $\mathcal{P}_h$ si pour chaque $i \in \mathbb{Z}$ on a :

(2.1) $\omega_i(0) \geqslant \varphi_i, \quad \omega_i'(t) \geqslant f_i(t, \omega_{i-1}, \omega_i, \omega_{i+1})$

(2.2) (resp $\omega_i(0) \leqslant \varphi_i, \quad \omega_i'(t) \leqslant f_i(t, \omega_{i-1}, \omega_i, \omega_{i+1})$.

Par ailleurs on désigne par $\mathcal{G}_h^+(\mathrm{I})$ l'ensemble des fonctions $\vec{\omega}$ vérifiant $\mathcal{H}$ et

(2.3) $$\sup_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ t \in \mathrm{I}}} \frac{\omega_i(t)}{\mathrm{G}_i(t)} < +\infty, \quad \text{où} \quad \mathrm{G}_i(t) = \mathrm{G}(x_i, t)$$

et par $\mathcal{G}_h$ l'ensemble des fonctions $\vec{\omega}$ vérifiant

(2.4) $$\vec{\omega} \in \mathcal{G}_h^+(\mathrm{I}) \quad \text{et} \quad -\vec{\omega} \in \mathcal{G}_h^+(\mathrm{I})$$

Q. 5 Soit $\vec{\mathrm{S}}(t) = \{\mathrm{S}_i(t)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ avec $\mathrm{S}_i(t) = \alpha(1+t)\,\mathrm{H}_i(t)$.

Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\vec{\mathrm{S}}$ soit une sur-solution de $\mathcal{P}_h$ pour h inférieur à une constante positive convenable.

Q. 6 On considère l'application $\mathcal{C}$ qui à toute sur-solution $\vec{w}$ de $\mathcal{P}_h$ (pour h assez petit) telle que $-\mathrm{S}_i \leqslant w_i, \ \forall i \in \mathbb{Z}$ (où $\vec{\mathrm{S}}$ est une sur-solution de $\mathcal{P}_h$ du type étudié en ***Q. 5***) fait correspondre $\vec{y} = \mathcal{C}\vec{w}$, $\vec{y} = \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ étant défini de la manière suivante :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad y_i' = f(x_i, t, y_i, \delta w_i, \alpha_i^+ w_{i+1} - \alpha_i y_i + \alpha_i^- w_{i-1})$$
$$y_i(0) = \varphi(x_i)$$

On notera encore $y_i' = f_i(t, w_{i-1}, y_i, w_{i+1})$ cette notation étant en accord avec la notation déjà introduite puisque pour $y_i = w_i$ on obtient $f_i(t, w_{i-1}, w_i, w_{i+1})$.

Montrer que y_i existe, est unique et vérifie $y_i \leqslant w_i$.

Établir que $-\vec{\mathrm{S}}$ est sous-solution de $\mathcal{P}_h$ et que $-\mathrm{S}_i \leqslant y_i$.

Établir également que $\vec{y}$ est une sur-solution de $\mathcal{P}_h$ appartenant à $\mathcal{G}_h^+(\mathrm{I})$.

Q. 7 $\vec{\mathrm{S}}$ étant toujours la sur-solution utilisée en ***Q. 6*** montrer que la suite des itérés définie par

$$\vec{w}^1 = \mathrm{S}, \quad \vec{w}^n = \mathcal{C}\vec{w}^{n-1}$$

est telle que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, w_i^n converge uniformément sur I vers une fonction U_i^h.

Établir que $\vec{\mathrm{U}}^h = \{\mathrm{U}_i^h\}_{i \in \mathbb{Z}}$ est solution de $\mathcal{P}_h$ pour h assez petit et que $\vec{\mathrm{U}}^h \in \mathcal{G}_h$.

Q. 8 Soit $0 < \mathrm{C} < \mathrm{D} < \mathrm{E}$
et $\vec{u} = \{u_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{G}_h^+(\mathrm{I})$, $\quad -\vec{u}^* = \{-u_i^*\}_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{G}_h^+(\mathrm{I})$

telles que

(2.5) $\forall i \in \mathbb{Z}, \quad u_i(0) \leqslant u_i^*(0)$

(2.6) $\forall i \in \mathbb{Z}, \quad \forall t \in \mathrm{I}_0,$
$$u_i'(t) - f_i(t, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}) \leqslant u_i^{*\prime}(t) - f_i(t, u_{i-1}^*, u_i^*, u_{i+1}^*).$$

On pose : pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{V}_i(t) = \dfrac{u_i(t) - u_i^*(t)}{\tilde{\mathrm{H}}_i(t)}$ où $\tilde{\mathrm{H}}_i(t) = \tilde{\mathrm{H}}(x_i, t)$, $\tilde{\mathrm{H}}$ étant la fonction obtenue lorsque l'on remplace dans la définition de H la constante C par la constante $\tilde{\mathrm{C}} = \dfrac{\mathrm{C}+\mathrm{D}}{2}$

et : $\mathrm{M}_n = \max\{\mathrm{V}_i(t), \ |i| \leqslant n, \ t \in \mathrm{I}\}, \quad n \in \mathbb{N}$.

Soit h_2 tel que $h_2 < h_1(\tilde{\mathrm{C}}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \vec{\rho})$ et tel que pour tout $h \in]0, h_2[$ on ait, $\forall i \in \mathbb{Z}, \quad \forall t \in \mathrm{I}$:

$$\frac{2\eta}{h\mathrm{K}} - \mathrm{L} - 2\mathrm{L}\frac{\tilde{\mathrm{H}}_{i-1}(t)}{\tilde{\mathrm{H}}_{i+1}(t)} > 0 \quad \text{où} \quad \mathrm{K} = \sup_{i \in \mathbb{Z}} |\rho_{i+1} - \rho_i|$$

a. Établir que si $\mathrm{M}_p > 0$ il existe $t_p \in \mathrm{I}_0$ tel que l'on ait soit $\mathrm{M}_p = \mathrm{V}_p(t_p)$ soit $\mathrm{M}_p = \mathrm{V}_{-p}(t_p)$. Pour cela on pourra supposer qu'il existe $t_0 \in \mathrm{I}_0$ et j (avec $|j| < p$) tels que $\mathrm{M}_p = \mathrm{V}_j(t_0) > 0$. En considérant $\mathrm{V}_j'(t_0)$ on montrera que l'on devrait avoir alors simultanément $\mathrm{V}_j'(t_0) \geqslant 0$ et (en utilisant 1.6) $\mathrm{V}_j'(t_0) < 0$.

b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $M_n \leqslant 0$ pour $h \in]0, h_2[$.

c. En déduire que (2.5) et (2.6) entraînent :

$$(2.7) \qquad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad \forall t \in I, \quad u_i(t) \leqslant u_i^*(t)$$

(propriété de monotonie)

Q. 9 Démontrer que $\mathcal{P}_h$ a, dans $\mathcal{G}_h$, une solution unique pour h assez petit.

3. CONVERGENCE

Une fonction $u : (x, t) \longmapsto u(x, t)$ est dite appartenir à $\mathcal{G}_{C,D}(\Omega)$ si elle est définie sur Ω, si elle possède des dérivées u_t, u_x, u_{xx} continues sur Ω_0 et si elle vérifie la condition $\sup_{\Omega} \dfrac{|u(x,t)|}{G(x,t,C,D)} < +\infty$ où $G(x, t, C, D)$ désigne maintenant l'expression $G(x, t)$ introduite en ***Q. 2***.

Q. 10 Sous les hypothèses (0.1) à (0.5) avec $0 < B < C < D < E$ on suppose qu'il existe u solution de $\mathcal{P}$ telle que $u \in \mathcal{G}_{B,D}(\Omega)$ et on considère $\vec{U}^h$ solution de $\mathcal{P}_h$ avec $\vec{U}_h \in \mathcal{G}_h$ pour h satisfaisant aux conditions utilisées dans la partie 2. On suppose que :

$$(3.1) \qquad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad |u_x(x_i, t) - \delta u_i| \leqslant \mu_1(h)\, G(x_i, t, B, D)$$

$$(3.2) \qquad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad |u_{xx}(x_i, t) - \delta^2 u_i| \leqslant \mu_2(h)\, G(x_i, t, B, D)$$

Montrer qu'il existe $\beta > 0$, tel que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, pour tout $t \in I$ on ait

$$(3.3) \qquad |u(x_i, t) - U_i^h(t)| \leqslant \beta(\mu_1(h) + \mu_2(h))\, H(x_i, t, C, D),$$

où $H(x, t, C, D)$ désigne l'expression introduite en ***Q. 2.***

On pourra utiliser la fonction auxiliaire $\vec{\sigma} = \{\sigma_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $\sigma_i = \lambda L(1+t)\, H_i(t)$ en choisissant λ convenable et appliquer ***Q. 6.***

Q. 11 On suppose que u est solution de $\mathcal{P}$ avec u_{xx} continue sur Ω et $u_{xxx} \exp \dfrac{-Bx^2}{1 - 4DLt}$ bornée sur Ω. Montrer qu'il en résulte que $u \in \mathcal{G}_{B,D}(\Omega)$ et établir que l'on a alors

$$|u(x_i, t) - U_i^h(t)| \exp \frac{-Cx_i^2}{1 - 4DLt} \leqslant Mh$$

pour $h \longrightarrow 0$ où M est une constante indépendante de h, i et t.

RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE NUMERIQUE

1. Analyse du sujet

Il s'agit de l'étude de l'approximation des solutions d'un problème de CAUCHY avec condition initiale donnée sur $\mathbb{R}$ pour une équation aux dérivées partielles non linéaire du second ordre de type parabolique. On utilise une méthode de différences à pas variable qui conduit à une famille dénombrable d'équations différentielles constituant le problème discret. Le point essentiel du problème est l'étude de ce problème discret par une méthode utilisant les notions de sur et sous-solution. La considération de sur et sous-solutions pour un problème donné n'est évidemment pas une technique récente.(En 1914-1915 PERRON considérait déjà le problème de l'intégration ramené à $y' = f \quad y(o) = yo$ à partir des fonctions w et v vérifiant $W' \leqslant f,\ v' \geqslant f$) mais elle a repris de l'importance et s'est à nouveau développée depuis quelques années en Analyse Fonctionnelle dans l'étude des équations et inéquations aux dérivées partielles.

2. Observation des correcteurs

La commission qui a étudié le sujet avant de le proposer avait cru bien faire en regroupant dans une 1re partie des questions ne nécessitant que des calculs et connaissances élémentaires, ceci pour aider les candidats avant l'étude un peu spécialisée où les connaissances utilisées se rapportent aux équations différentielles et à l'analyse classique en général. (Vu le barème adopté, un candidat traitant correctement la partie 1 : préliminaires,était déjà très bien placé pour une admissibilité).

Les espoirs des correcteurs ont été déçus très rapidement : trop peu de candidats ont su faire correctement **Q1** et **Q2.** Dans le reste des copies,on a constaté l'incapacité de calculer avec des fonctions simples, de manipuler des inégalités sans difficulté spéciale et d'utiliser rigoureusement la notion d'équivalent.

L'étude de la fonction $x \mapsto x^{\alpha} |\operatorname{Log} x|^{\beta}$ (pour $x > 1$) qui était suggérée a donné lieu à des erreurs et des calculs invraisemblables. On a trouvé presque partout l'application d'un «résultat général» : si $i < \xi_i < i+1$ alors $f(\xi_i)$ est équivalent à $f(i)$ pour $i \to +\infty$ (propriété vraie d'ailleurs pour la fonction θ vu ses propriétés,mais il s'agissait justement de l'établir !)

Signalons cependant une bonne attitude : quelques candidats n'arrivant pas à faire une étude complète, définissent a priori un couple (α, β) ($\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$ ou $\alpha = 0, \beta > 0$) et vérifient bien que le couple convient.

Certaines inégalités en **Q2** demandaient une ligne ou deux de calculs, elles ont donné lieu à des développements compliqués qui n'aboutissent qu'au prix d'affirmations douteuses.

Au début de **Q5** la plupart des candidats affirment directement que :

$e^{Cx^2 - \frac{1}{2} P(x)} \geqslant k e^{Bx^2}$ (k cste) puisque $B \leqslant C$, alors que l'on attend la précision $B < C$ résultant d'un raisonnement très simple qui n'est pas fait (Ce petit test fut significatif !).Cette précision est d'ailleurs fournie dans le texte en **Q 10** pour utiliser les résultats précédents. Même remarque pour **Q 4**, avec $C < D$.

Certes ces observations – qui traduisent une grande faiblesse en Analyse – ont déjà été faites les années précédentes et pour d'autres épreuves que celle d'Analyse Numérique, mais elles semblent d'autant plus consternantes cette année qu'il s'agissait particulièrement d'Analyse élémentaire.

Dans la deuxième partie, abordée sérieusement dans un nombre réduit de copies, on a été surpris de constater que les candidats ne pensaient pas au théorème d'ASCOLI-ARZELA (**Q7**) pour la convergence uniforme et, mis à part quelques bonnes copies, l'argumentation employée a été la suivante : «puisque $\{W_i^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante convergente de fonctions continues, il y a convergence uniforme vers une fonction continue» (résultat attribué sans hésitation à DINI).

Q8 a) était difficile et n'a pas été étudiée,cette question a donc été mise hors barême ainsi que les questions **Q10** et **Q11**.

3. Quelques indications sur la solution

Q.1 Pour vérifier (1.3) on peut écrire :

$\tau_i = \rho_i(\rho_{i+1} - \rho_{i-1}) = \psi(i+1)\,\psi'(\xi_i)$, $i < \xi_i < i+2$ et vérifier que $\psi(i+i) \sim \psi(i)$ pour $i \to +\infty$. Puisque

$\tau_i = \dfrac{\psi(i+1)}{\psi(\xi_i)}\ \psi(\xi_i)\,\psi'(\xi_i)$ on pourra conclure en établissant que

$|\psi\psi'| \leqslant K$. (Ce qui explique la condition indiquée en b).

Les conditions imposées à θ font que $\theta(i+1) \sim \theta(i)$ et on utilise le raisonnement précédent.

Q.2 G et H sont paires en x, donc G_{xx} et H_{xx} sont paires, H_x impaire, avec $H_x \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$; il suffit donc de supposer $x \geqslant 0$ pour établir (1-4) et (1-5).

Il est intéressant d'écrire les dérivées logarithmiques pour obtenir directement les rapports indiqués.

La 1re inégalité dans (1-4) revient à constater que la différence des 2 membres est positive ou nulle ;or cette différence s'écrit :

$$\frac{-2Cx}{1\text{-}4\,DLT} \quad (1-P') + \frac{1}{4}\,[\,2P'' - (1-P')^2\,] + \gamma - \frac{3}{4}$$

et les inégalités vérifiées par P donnent la conclusion.

La 2e inégalité dans (1-4) s'obtient en explicitant $\dfrac{G_t}{LG} - \dfrac{G_{xx}}{G}$

Q.3 On remarque que $v^*_{i-1} \leqslant v_{i-1}$, $v_i^* = v_i$, $v^*_{i+1} \leqslant v_{i+1}$

entraînent $\delta^2 v_i^* \leqslant \delta^2 v_i$. On décompose alors la différence $f_i - f_i^*$ en faisant apparaître

$f(x_i, t, v_i, \delta v_i, \delta^2 v_i) - f(x_i, t, v_i, \delta v_i, \delta^2 v_i^*)$

et $f(x_i, t, v_i, \delta v_i, \delta^2 v_i^*) - f(x_i, t, v_i, \delta v_i^*, \delta^2 v_i^*)$

et on applique respectivement les propriétés (0.3) et (0.4).

Q.4 Il suffit d'établir (1.6) avec $x_i > 0$ (cf **Q2**)
(1.6) est l'analogue discret de :

$$(1.4)' \quad \frac{H_t}{LH} - \frac{H_{xx} + |H_x| + H}{H} \geqslant 0$$

qui se déduit de (1-4)

D'après (1-4) on a :

$$\frac{H_t(x_i, t)}{LH_i} - \frac{H_{xx}(x_i) + H_x(x_i) + H_i}{H_i} \geqslant 2(D-C)(1+2Cx_i^2)$$

On compare alors à (1.6) en utilisant les 2 inégalités du texte puisqu'il apparaît

$$\frac{\delta H_i - H_x(x_i)}{H_i} \quad \text{et} \quad \frac{\delta^2 H_i - H_{xx}(x_i)}{H_i}$$

Q.5 On établit d'abord que $\alpha H(x, 0) \geqslant |\varphi(x)|$

avec $\alpha = \dfrac{1}{m}$, $m = \inf\limits_{R} \left\{ A^{-1} \exp\left[(C-B)x^2 - \dfrac{1}{2}P(x)\right] \right\} > 0$

en imposant $B < C$.

Pour l'inéquation vérifiée par S_i on applique l'inégalité discrète (1-6) et la propriété (0.5)

Q.6 L'existence et l'unicité de y_i résultent d'un théorème classique.
En posant $u_i = w_i - y_i$ on s'assure de :

$u_i(o) \geqslant 0$ et $u'_i(t) \geqslant -(1+\alpha_i)\, L\,|u|$

d'où l'on déduit : $u_i(t) \geqslant 0$.

En posant $-\vec{S} = \vec{\sigma}$ et $v_i = y_i - \sigma_i$ on constate que

$v'_i(t) \geqslant f_i(t, w_{i-1}, y_i, w_{i+1}) - f_i(t, w_{i-1}, \sigma_i, w_{i+1})$

en appliquant la propriété de quasi-monotonie (**Q.3**) et on se ramène au cas précédent.
La quasi-monotonie permet d'établir également que $\vec{y}$ est une sur solution.

Q.7 On peut montrer que $\sup\limits_{t \in I} |(w_i^{\,n})'(t)| \leqslant K_1$

et $\sup\limits_{t \in I} |w_i^{\,n}(t)| \leqslant K_2$ (pour i fixé)

La famille $\{ w_i^n \}$ forme donc un sous-ensemble compact dans $C^\circ(I)$ muni de la topologie de la convergence uniforme ;il existe donc une sous-suite qui converge uniformément sur I vers $V_i^{\,h}$, en fait toute la suite converge vers $V_i^{\,h}$ d'après la monotonie.

Pour montrer que $\vec{U}_h$ est solution de $\mathcal{T}_h$ on peut considérer que w_i^n est défini par :

$$w_i^{\,n} = \varphi(x_i) + \int_0^t f_i(\tau, w_{i-1}^{n-1}, w_i^{\,n}, w_{i+1}^{n-1})\, d\tau$$

et passer à la limite sur n.

Q.8 a) On suppose $|z| \neq p$ et on établit une contradiction.

Il est facile de montrer que $V'_j(t_0) \geqslant 0$ puisque

$V_j(t) \leqslant V_j(t_0)$ pour $t < t_0$.

Pour établir que $V'_j(t_0) < 0$ on peut toujours supposer que

$V_j(t_0) \geqslant V_{j-1}(t_0)$, $V_j(t_0) > V_{j+1}(t_0)$

ou que $V_j(t_0) > V_{j-1}(t_0)$, $V_j(t_0) \geqslant V_{j+1}(t_0)$
sans changer la généralité du problème.
On a : $(u_j - u_j^*)'(t_0) = (V_j' H_j + V_j \tilde{H}_j')(t_0)$

$$\leqslant f_j(t_0, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) - f_j(t_0, u^*_{j-1}, u^*_j, u^*_{j+1})$$

On décompose alors cette différence en faisant apparaître

$f(x_j, t_0, u_j, \delta u_j, \delta^2 \overset{*}{u_j} + V_j \delta^2 H_j^2)$ et on évalue

$\delta^2 u_j - \delta^2 u_j^* - V_j \delta^2 \tilde{H}_j$ pour pouvoir appliquer (0.3).

On utilise ensuite l'inégalité (1-6) prise au point t_0.

b) On suppose $M_n > 0$ et on utilise a), la condition $\tilde{C} > C$ étant essentielle pour aboutir à une contradiction.

Q. 9 L'unicité résulte de (2-7) appliqué 2 fois.

Q. 10 On encadre U_i^h par $u_i + \sigma = w_i$ et $u_i - \sigma_i = v_i$ en utilisant le résultat de monotonie (2-7), $\vec{\sigma}$ (donc λ) étant choisi pour que (2-5) et (2-6) soient satisfaites.

On trouvera par exemple $\lambda > (\mu_1 + \mu_2) e^M$ où M est le maximum de la fonction $x \longrightarrow \frac{1}{2} P(x) - (C - B) x^2$

(L'indication du texte à la fin de **Q 10** doit évidemment se lire : appliquer **Q 8**).

Q. 11 Il s'agit d'appliquer **Q 10** après avoir vérifié 3-1 et 3-2 ce qui résulte de l'hypothèse faite sur U_{xxx} et la propriété $u \in \mathcal{G}_{B,D}(\Omega)$.

4. Les notes (sur 40)

Nombre de copies corrigées : 903
52 copies atteignent la moyenne
130 copies ont la note 0
46 % des copies ne dépassent pas 4
Moyenne : 6,8
Moyenne (sans tenir compte de la note 0) : 7,9
Répartition des notes :

0 à 4	5 à 9	10 à 14	15 à 19	20 à 24	25 à 29	30 à 34	35 à 40
419	211	151	70	24	14	8	6

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

Sujet (durée : 6 heures)

I

Soit un système matériel (Σ) soumis à des liaisons holonomes, dont la position par rapport à un repère absolu dépend de n paramètres q_1, q_2, ..., q_n, et éventuellement à des liaisons supplémentaires non holonomes. Toutes ces liaisons seront supposées indépendantes du temps.

Quand le système (Σ) est en mouvement par rapport au repère absolu, les q_r sont des fonctions du temps t. Ces fonctions sont supposées deux fois continûment différentiables. On note $\dot{q}_r$ la dérivée première de q_r par rapport à t.

A

On pose :
$$\omega_s = \sum_{i=1}^{n} a_{si} \dot{q}_i \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

où les a_{st} sont des fonctions continûment différentiables de q_1, q_2, ..., q_n.

La matrice des a_{st} est supposée régulière; on peut alors exprimer les $\dot{q}_r$ en fonction des ω_s :
$$\dot{q}_r = \sum_{j=1}^{n} b_{rj} \omega_j \qquad (r = 1, 2, \ldots, n) ;$$