COMPOSITION D'ANALYSE

Sujet (durée : 6 heures)

Préambule

On tient à préciser qu'aucune démonstration faisant intervenir une convergence, une continuité, une dérivabilité sous le signe $\int$, $\left(\text{Resp. } \iint\right)$ ne sera prise en considération si les théorèmes invoqués ne sont pas énoncés avec précision au moins une fois dans la copie.

Notations

● On désigne respectivement par $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{C}$ le corps des réels, la droite réelle achevée, le corps des complexes. On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ de sorte que si (x, y) est élément de $\mathbb{R}^2$ on pose :

$$z = x + iy = (x, y)$$

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

● Dans tout le problème on considère un entier s $(s \geqslant 1)$; pour tout élément z de $\mathbb{C}$ et tout élément $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ de $\mathbb{C}^s$ on pose :

$$P_s(z, \lambda) = z^s + \lambda_1 z^{s-1} + \ldots + \lambda_s .$$

et $$P'_s(z, \lambda) = s\, z^{s-1} + \lambda_1 (s-1)\, z^{s-2} + \ldots + \lambda_{s-1} .$$

Pour λ dans $\mathbb{C}^s$, on note $(r_1, \ldots, r_s)$ *la suite des racines du polynôme en* z, de sorte que :

$$P_s(z, \lambda) = \prod_{j=1}^{j=s} (z - r_j) ;$$

on note $Z = \{ z_1, \ldots, z_k \}$ *l'ensemble de ses racines distinctes*, de sorte que :

$$P_s(z, \lambda) = \prod_{j=1}^{j=k} (z - z_j)^{s_j}$$

où l'entier s_j $(s_j \geqslant 1)$ représente l'ordre de multiplicité de z_j.

● Soient p un entier $(p \geqslant 1)$ et F une application de $\mathbb{C}^p$ dans $\mathbb{C}$, on dit que F est de classe C^r si et seulement si F est r fois continûment différentiable *en tant qu'application de* $\mathbb{R}^{2p}$ *dans* $\mathbb{C}$; on dit que F est de classe C^∞ si et seulement si elle est de classe C^r pour tout r.

● Les opérateurs différentiels $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ et $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ sont notés respectivement $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar z}$.

Pour p et q entiers naturels on pose :

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial \bar z^q} = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^p \circ \left(\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)^q .$$

Définitions

Soit F une application de $\mathbb{C}^p$ dans $\mathbb{C}$ supposée de classe C^∞; soit a un point de $\mathbb{C}^p$, soit r un entier $(r \geqslant 0)$; on dit que F est r-plate au point a si et seulement si F s'annule en a ainsi que toutes ses différentielles jusqu'à l'ordre r inclus. On dit que F est plate en a si et seulement si, pour tout entier r, F est r-plate en a.

Soit X une partie de $\mathbb{C}^p$, on dit que F est r-plate (Resp. plate) sur X si et seulement si F est r-plate (Resp. plate) en chaque point de X.

Dans tout le problème f est une application de classe C^∞ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et g une application de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

L'objet du problème est d'établir une identité de division de f, (Resp. g) par le polynôme $P_s(z, \lambda)$, (Resp. $P_s(x, \lambda)$) et d'étudier comment le quotient et le reste définis à cette occasion dépendent de λ.

Les deux premières parties du problème sont indépendantes.

Première partie

On définit deux applications :

$$\delta : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \to \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \to \overline{\mathbb{R}}$$

par :

$$\forall \eta \in \mathbb{R} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^s \quad \begin{cases} \delta(\eta,\lambda) = \underset{1 \leqslant j \leqslant s}{\mathrm{Min}} \left| \eta - \mathrm{Im}\, r_j \right| \\ \sigma(\eta,\lambda) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \dfrac{\mathrm{P}'_s(x+\eta i,\lambda)}{\mathrm{P}_s(x+\eta i,\lambda)} \right|^2 dx \end{cases}$$

et l'on considère l'ensemble :

$$\Omega = \{ (\eta, \lambda) \mid (\eta, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \quad \text{et} \quad \delta(\eta, \lambda) \neq 0 \}$$

Pour tout λ dans $\mathbb{C}^s$ on pourra poser

$$\| \lambda \| = \underset{1 \leqslant j \leqslant s}{\mathrm{Max}} \left| \lambda_j \right| .$$

1° Vérifier que les assertions suivantes sont équivalentes :

*a*1. $\delta(\eta, \lambda) = 0$

*a*2. $\sigma(\eta, \lambda) = +\infty$

*a*3. $\exists\, x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{P}_s(x + \eta i, \lambda) = 0$

*a*4. $(\exists\, j) \quad (1 \leqslant j \leqslant s) \quad \text{et} \quad (\eta = \mathrm{Im}\, r_j)$

2° On se propose de démontrer que δ est continue.

a. Soit K un compact non vide de $\mathbb{C}$; on considère l'ensemble :

$$\Lambda_{\mathrm{K}} = \{ \lambda \mid (\lambda \in \mathbb{C}^s) \quad \text{et} \quad (\forall\, z \in \mathrm{K} \quad \mathrm{P}_s(z, \lambda) \neq 0) \}$$

Démontrer que Λ_{K} est un ouvert de $\mathbb{C}^s$.

b. Soient ω un point de $\mathbb{C}$ et R un réel (R > 0), soit $\Gamma = \{ z \mid (z \in \mathbb{C}) \quad \text{et} \quad (|z - \omega| = \mathrm{R}) \}$; démontrer que l'application $\Phi : \Lambda_\Gamma \to \mathbb{C}$ définie par

$$(\forall \lambda \in \Lambda_\Gamma) \quad \Phi(\lambda) = \frac{\mathrm{R}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{P}'_s(\omega + \mathrm{R}e^{i\theta},\lambda)}{\mathrm{P}_s(\omega + \mathrm{R}e^{i\theta},\lambda)}\, e^{i\theta} d\theta$$

est continue.

c. Prouver que l'application $\lambda \longmapsto \delta(0, \lambda)$ est continue sur $\mathbb{C}^s$, puis prouver la continuité de δ.

3° Démontrer que σ est continue en chaque point de l'ouvert Ω.

4° On se propose d'expliciter $\sigma(\eta, \lambda)$ en fonction de $(r_1, r_2, \ldots, r_s)$; pour cela :

a. Soient a et b deux nombres complexes distincts et non réels; calculer l'intégrale :

$$\mathrm{I}(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-a)(x-b)} .$$

b. On considère l'ensemble :

$$\Omega_1 = \{ (\eta, \lambda) \mid (\eta, \lambda) \in \Omega \quad \text{et} \quad \forall j\ \forall k,\ r_j - \eta i \neq \bar{r}_k + \eta i \}$$

Soit (η, λ) dans Ω_1, prouver l'existence d'entiers $\beta_{j,k}$ vérifiant :

$$\sigma(\eta,\lambda) = \left| \sum_{j,k} \beta_{j,k} \left| \mathrm{Im} \left(\frac{1}{\bar{r}_k - r_j + 2\eta i} \right) \right| \right| ;$$

les $\beta_{j,k}$ seront explicités en fonction des positions relatives de r_j et r_k par rapport à une droite.

En déduire l'encadrement :

$$\forall (\eta,\lambda) \in \Omega_1 \qquad \frac{1}{2\delta(\eta,\lambda)} \leqslant \sigma(\eta,\lambda) \leqslant \frac{s^2}{2\delta(\eta,\lambda)} .$$

c. Démontrer que cet encadrement reste vérifié pour tout couple (η, λ) de Ω.

En déduire que σ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s$.

5° Soient α et β deux éléments de $\mathbb{N}^s$; soit γ un entier naturel, on pose :

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s), \qquad \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$$

$$\text{et :} \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_s, \qquad |\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_s,$$

$$p = |\alpha| + |\beta| + \gamma + 1 .$$

On note Δ l'opérateur différentiel $\dfrac{\partial^{p-1}}{\partial\lambda^{\alpha}\partial\bar{\lambda}^{\beta}\partial\eta^{\gamma}}$

où $\partial\lambda^{\alpha}$ (Resp : $\partial\bar{\lambda}^{\beta}$) est mis pour

$$\partial\lambda_1^{\alpha_1} \ldots \partial\lambda_s^{\alpha_s} \qquad \left(\text{Resp : } \partial\bar{\lambda}_1^{\beta_1} \ldots \partial\bar{\lambda}_s^{\beta_s}\right)$$

En posant $Q(x, \eta, \lambda) = \left|\dfrac{P'_s(x+\eta i, \lambda)}{P_s(x+\eta i, \lambda)}\right|^2$

démontrer que :

a. On a : pour tout (η, λ) dans Ω et tout x réel :

$$\Delta Q(x, \eta, \lambda) = \frac{A(x, \eta, \lambda)}{|P_s(x+\eta i, \lambda)|^{2p}}$$

où A est un polynôme en x, η, $\lambda_1, \ldots, \lambda_s, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_s$ dont le degré en x est au plus $2ps - 2$.

b. L'application σ est de classe C^∞ sur Ω.

c. Pour tout compact K de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s$ et tout triplet (α, β, γ), il existe un réel C_K tel que :

$$\forall (\eta, \lambda) \in \Omega \cap K \qquad |\Delta\sigma(\eta, \lambda)| \leqslant C_K \left(1 + \frac{1}{\delta(\eta, \lambda)^{2ps}}\right)$$

DEUXIÈME PARTIE

Sauf au 4°, on a fixé λ dans $\mathbb{C}^s$ et on écrit $P(z)$ au lieu de $P_s(z, \lambda)$.

1° *a.* Soit s_0 un entier ($s_0 \geqslant 1$); en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, démontrer qu'il existe une unique application de classe C^∞, notée Q_0, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, et un unique polynôme R_0 de degré au plus $s_0 - 1$, tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad g(t) = R_0(t) + t^{s_0} Q_0(t)$$

b. Démontrer qu'il existe une application de classe C^∞ notée Q, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, et un polynôme R de degré au plus $s - 1$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad g(t) = P(t)\,Q(t) + R(t)$$

Démontrer que le couple (Q, R) est unique si et seulement si P a toutes ses racines réelles.

2° Soient m et n deux entiers ($m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$), démontrer que l'application $w : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \qquad w(z) = \frac{\bar{z}^{n+m}}{z^n}$$

se prolonge de manière unique en une application $w_0 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de classe C^{m-1}.

3° *a.* En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral pour une fonction d'une variable réelle, démontrer l'égalité :

$\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall h \in \mathbb{C}$

$$f(z+h) = f(z) + \sum_{1 \leqslant p+q \leqslant r} \frac{h^p \bar{h}^q}{p!\,q!} \frac{\partial^{p+q} f}{\partial z^p \partial \bar{z}^q}(z) + (r+1) \sum_{p+q=r+1} \frac{h^p \bar{h}^q}{p!\,q!} E_{p,q}(z, h)$$

où $$E_{p,q}(z, h) = \int_0^1 (1-t)^r \frac{\partial^{r+1} f}{\partial z^p \partial \bar{z}^q}(z + th)\,dt$$

b. On suppose l'application $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ plate sur l'ensemble Z des zéros de P.

Démontrer qu'il existe une unique application de classe C^∞, notée Q, de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, et un unique polynôme R de degré au plus $s - 1$ tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad f(z) = P(z)\,Q(z) + R(z)$$

c. Démontrer que si f est holomorphe, Q l'est aussi.

d. Démontrer que le résultat de *b.* subsiste si l'on suppose seulement que $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ est, pour tout j $(1 \leqslant j \leqslant k)$ $(s_j - 1)$ - plate au point z_j.

4° Soit F une application de classe C^∞, de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s$ dans $\mathbb{C}$; on suppose F plate sur l'ensemble X des couples (z, λ) vérifiant $P_s(z, \lambda) = 0$.

Démontrer que pour tout entier naturel r $(r \geqslant 1)$ l'application :

$$(z,\lambda) \longmapsto \frac{F(z,\lambda)}{(P_s(z,\lambda))^r}$$

de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s \setminus X$ dans $\mathbb{C}$ se prolonge de façon unique en une application de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s$ dans $\mathbb{C}$, de classe C^∞.

Indication : on commencera par démontrer que l'application :

$$\Phi : (z, \lambda_1, \ldots, \lambda_s) \longmapsto (z, \lambda_1, \ldots, \lambda_{s-1}, P_s(z, \lambda))$$

de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s$ dans lui-même est un changement de variable C^∞, c'est-à-dire une application bijective de classe C^∞ ainsi que sa réciproque.

Troisième partie

Pour tout réel ξ on note : $I(\xi) = \left[\frac{1}{2}\frac{1}{1+|\xi|}, \frac{1}{1+|\xi|}\right]$

et A la partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$ formée par les triplets (ξ, λ, y) tels que y appartienne à $I(\xi)$.

On note ρ_0 une application de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $[0, 1]$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, paire, et vérifiant :

$$\forall t \in [8s^3, +\infty] \qquad \rho_0(t) = 0$$

$$\forall t \in [0, 4s^3] \qquad \rho_0(t) = 1$$

L'existence de ρ_0 est admise.

1° *a.* Démontrer que l'application :

$$(\xi,\lambda,\eta) \longmapsto \rho_0\left(\frac{\sigma(\eta,\lambda)}{1+|\xi|}\right)$$

de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ est de classe C^∞ en (λ, η) et que ses différentielles sont continues à tout ordre en (ξ, λ, η).

b. Soit Ψ l'application de A dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall (\xi,\lambda,y) \in A \quad \Psi(\xi,\lambda,y) = 4(1+|\xi|)\int_y^{\frac{1}{1+|\xi|}} \rho_0\left(\frac{\sigma(\eta,\lambda)}{1+|\xi|}\right) d\eta.$$

Démontrer que pour tout λ dans $\mathbb{C}^s$ et tout réel ξ on a :

$$\Psi\left(\xi,\lambda,\frac{1}{2(1+|\xi|)}\right) \geqslant 1.$$

Prouver que Ψ est continue, qu'elle est de classe C^∞ sur $\mathring{A}$ en (λ, y), et que ses différentielles sont continues à tout ordre en (ξ, λ, y) sur $\mathring{A}$.

2° Soit α un réel, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$; soit ρ_1 une application de $\mathbb{R}^+$ dans $[0, 1]$ de classe C^∞, vérifiant :

$$\forall t \in [0, \alpha] \qquad \rho_1(t) = 0$$

$$\forall t \in [1-\alpha, +\infty[\qquad \rho_1(t) = 1$$

L'existence de ρ_1 est admise.

On note ρ l'application de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ définie par :

$(\xi, \lambda, y) \longmapsto \rho(\xi, \lambda, y)$ avec :

i. ρ est paire en y

ii. si $0 \leqslant y < \frac{1}{2(1+|\xi|)}$ $\qquad \rho(\xi, \lambda, y) = 1$

iii. si $y \in I(\xi)$ $\qquad \rho(\xi, \lambda, y) = \rho_1(\Psi(\xi, \lambda, y))$

iv. si $y > \frac{1}{1+|\xi|}$ $\qquad \rho(\xi, \lambda, y) = 0$

a. Prouver que ρ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$, de classe C^∞ par rapport à (λ, y), chacune de ses différentielles étant continue par rapport à (ξ, λ, y) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$.

b. **Prouver l'existence d'un ouvert contenant $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \times \{ 0 \}$ sur lequel ρ est constante égale à 1.**

Prouver que $\rho(\xi, \lambda, y)$ est nul dès que $| y \xi | \geqslant 1$.

c. **Démontrer l'existence d'un ouvert contenant l'ensemble :**

$$\{ (\xi, \lambda, y) \mid \xi \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}^s, y \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (y, \lambda) \notin \Omega \}$$

sur lequel $\dfrac{\partial \rho}{\partial y}$ est nulle.

d. **Démontrer que pour tout compact K de $\mathbb{C}^s \times \mathbb{R}$ et tout triplet (α, β, γ) de $\mathbb{N}^s \times \mathbb{N}^s \times \mathbb{N}$, il existe un réel D_K et un entier naturel q tels que :**

$$\forall (\xi, \lambda, y) \in \mathbb{R} \times K \qquad \left| \frac{\partial^{|\alpha| + |\beta| + \gamma} \rho}{\partial \lambda^\alpha \partial \bar{\lambda}^\beta \partial y^\gamma} (\xi, \lambda, y) \right| \leqslant D_K (1 + |\xi|^q)$$

QUATRIÈME PARTIE

On suppose dans cette partie que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est de classe C^∞ et est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On admet l'existence d'une fonction $\hat{g}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x \longmapsto | x^n \hat{g}(x) | \quad \text{est bornée sur } \mathbb{R}$$

$$\text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \hat{g}(\xi) \, d\xi.$$

On définit alors F de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$\forall (z, \lambda) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^s \qquad F(z, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\xi, \lambda, y) \, e^{iz\xi} \hat{g}(\xi) \, d\xi$$

où l'on a posé $z = x + iy$; et où ρ est l'application définie à III, 2°.

1° Démontrer que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^s$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^s \qquad g(x) = F(x, \lambda).$$

2° Démontrer que $\dfrac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ est plate en tout point (z, λ) tel que $z \in \mathbb{R}$ ou $P_s(z, \lambda) = 0$.

3° Soit D le disque fermé dans $\mathbb{C}$ de centre ω et de rayon R (R > 0); démontrer que :

$\forall t \in \mathbb{R} \cap \mathring{D}, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}^s$

$$F(t, \lambda) = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(\omega + Re^{i\theta}, \lambda)}{\omega + Re^{i\theta} - t} e^{i\theta} \, d\theta - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} (z, \lambda) \frac{dx\,dy}{z - t}$$

4° Prouver l'existence de polynômes $R_j(u, \lambda)$ tels que l'on ait l'identité de fractions rationnelles :

$$\frac{1}{u - z} = \frac{P_s(z, \lambda)}{P_s(u, \lambda)} \frac{1}{u - z} + \sum_{j=1}^{j=s} \frac{R_{j-1}(u, \lambda)}{P_s(u, \lambda)} z^{s-j}$$

et démontrer l'existence d'une fonction $Q : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^s \to \mathbb{C}$ de classe C^∞, et d'un polynôme en t

$$R(t, \lambda) = a_1(\lambda) t^{s-1} + \ldots + a_s(\lambda)$$

de classe C^∞ en (t, λ) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^s$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^s \qquad g(t) = P_s(t, \lambda) \, Q(t, \lambda) + R(t, \lambda).$$

RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE

1. Thème du sujet

- Ce problème proposait une démonstration, par des procédés longs mais très élémentaires, du théorème de préparation de MALGRANGE. Il fournissait l'occasion de vérifier l'aptitude des candidats aux techniques usuelles du calcul différentiel.
- Voici tout d'abord quelques indications sur la résolution des questions les plus délicates (bien qu'en réalité aucune ne soit vraiment difficile).

Première partie

1° a_1, a_3 et a_4 sont trivialement équivalentes.

L'équivalence de a_2 avec les trois autres résulte :

– D'une part de l'existence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ lorsque $f = \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue et lorsque $f(t) \sim k/t^2$ au voisinage de plus l'infini ou de moins l'infini (non $a_3 \Rightarrow$ non a_2).

– D'autre part du fait que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = +\infty$ lorsque $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est positive, continue sauf en un nombre fini de points et présente en l'un de ces points (et il y en a !) un pôle d'ordre 1 ($a_3 \Rightarrow a_2$).

2° a) Il suffisait, par exemple, d'écrire :

$|\mathrm{P}_s(z, \lambda) - \mathrm{P}_s(z, \lambda')| \leqslant \| \lambda - \lambda' \| (1 + \mu + \dots + \mu^{s-1})$ où μ désigne la borne supérieure de $|z|$ lorsque z décrit K et d'utiliser le fait que, si $\lambda \in \Lambda_k$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout z de K, $|\mathrm{P}_s(z, \lambda)| \geqslant \alpha$.

b) Sans aucune difficulté, le théorème de LEBESGUE est même inutile puisqu'il s'agit de la continuité de $\int_a^b f(t, x)\, dt$ où $f: [a, b] \times \mathrm{E} \to \mathbf{C}$ est continue.

c) Cette question a été mal comprise par de nombreux candidats qui se sont contentés de faire appel à un pseudo-théorème de continuité des racines d'un polynôme qui, bien sûr, n'a jamais été explicité. En réalité, cette deuxième question consistait justement en une démonstration de cette propriété. Il suffisait de remarquer, d'une part que Φ représente le «nombre de racines» (comptées avec leurs ordres de multiplicité) de P_s contenues dans le disque de centre ω et de rayon R, d'autre part que Φ qui est donc à valeurs entières, et continue en tout point de l'ouvert Λ_Γ, est localement constante. Il était alors facile de montrer la continuité de $\lambda \mapsto \delta(0, \lambda)$. Celle que δ s'en déduisait immédiatement.

3° Il fallait ici citer et appliquer le théorème de LEBESGUE.
On fixait un point (η_0, λ_0) de Ω et on prenait un voisinage compact de (η_0, λ_0) contenu dans l'ouvert Ω ce qui permettait de minorer δ sur ce voisinage, mais ceci était insuffisant car il fallait aussi disposer d'une majoration uniforme au voisinage de plus l'infini ou de moins l'infini (les racines de P_s dépendent de (η, λ)).
Cette majoration s'obtenait en remarquant que, si « λ est voisin de λ_0 », alors les racines de P_s sont uniformément bornées.

4° a) et b) Ces questions, purement techniques, ont donné lieu à des réponses surprenantes. Au lieu d'appliquer une banale méthode de résidu, beaucoup de candidats se perdent dans des logarithmes complexes, après avoir séparé I (a, b) en deux intégrales divergentes !

c) On peut soit faire appel à une densité, soit, tout simplement, montrer que b) reste valable en tout point de Ω, certains β_{jk} devenant alors nuls.

5° Il fallait effectuer un raisonnement par récurrence. Rappelons qu'un tel raisonnement nécessite la formulation explicite d'une hypothèse de récurrence, ce que semblent ignorer beaucoup de candidats.
La démonstration de b) utilise des techniques analogues au 3°.

Deuxième partie

1° a) Question sans difficulté si l'on sait écrire la formule de TAYLOR avec reste intégral,puis sous la forme :

$$\frac{(b-a)^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(a+t(a-b))dt.$$

Le jury a découvert ici des formules de TAYLOR inédites avec reste constant, indépendant de l'ordre de la formule...

b) Consiste à appliquer a) successivement à chaque racine. Dans le cas où P n'a pas toutes ses racines réelles, il fallait montrer l'existence d'au moins deux décompositions, et non se contenter d'un contre exemple sur un cas particulier.

2° Il avait été précisé en préliminaire le sens attribué au mot de classe C^{m-1}. Il fallait donc revenir scrupuleusement à ce sens, et non se contenter d'une vague vérification formelle de dérivation par rapport à z et $\bar{z}$. Les remarques faites en I, 5° sur le raisonnement par récurrence sont valables aussi pour cette question.

3° a) De nouveau TAYLOR-intégral. De plus, dans cette formule, qui est utilisée pour des variables réelles et pour des dérivations par rapport à x et y, il fallait, par un calcul par récurrence (à nouveau !) montrer que l'on obtenait bien l'expression donnée par le texte.

b) L'unicité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R}$ est évidente ; tout revient à montrer que $\mathbb{Q}$, dont l'existence sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ est immédiate, se prolonge en une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de classe C^∞. En réalité, on montre que $\mathbb{Q}$ se prolonge en une application de classe C^n, ceci pour tout n et pour cela, n étant alors fixé, il suffit d'appliquer a) à un ordre suffisamment élevé.

c) Immédiat.

d) Un lapsus dans la formulation de cette question n'a gêné aucun candidat. En réalité on se demandait quel résultat de b) subsiste avec des hypothèses plus faibles. Il est évident que la factorisation subsiste avec : $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ continue ; $\mathbb{Q}$ peut d'ailleurs être dérivable si $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ est mieux que (s_j-1) plate en tout point z_j.

4° L'indication donnée par le texte conduisait directement à la solution, l'unique vérification, fastidieuse d'ailleurs, consistant en le transfert de la platitude dans la composition.

Troisième partie

Très technique, cette partie avait pour but de construire la fonction ρ qui intervient dans la quatrième partie. Il est difficile de donner des indications de solution car chaque question était une succession de petites vérifications faciles, mais l'ensemble était très long. Le point le plus délicat était 1° b) : il fallait penser à examiner l'ensemble des η tels que : $\rho_0\left(\dfrac{\sigma(\eta,\lambda)}{1+|\xi|}\right) \geqslant \dfrac{1}{4(1+|\xi|)}$

Dans cette partie, où de nombreuses questions demandaient de démontrer que des fonctions étaient C^∞, il fallait fréquemment raisonner par récurrence en formulant avec beaucoup de soins les hypothèses correspondantes.

Quatrième partie

1° Récurrence et LEBESGUE, enprenant le sup de deux fonctions, puisqu'il fallait distinguer le cas z réel du cas z complexe non réel.

2° Immédiat.

3° Il s'agissait d'appliquer la formule de GREEN-RIEMANN, en excluant un petit disque centré en t et en effectuant alors, avec soin, un passage à la limite.

4° C'est ici qu'intervenait tout ce qui précède,en particulier II 4° qui permettait de montrer que $\mathbb{Q}$ était C^∞.

2. Observations des correcteurs

A l'évidence le problème était long. Dans leur grande majorité, les candidats n'ont travaillé que sur les deux premières parties, ce qui suffisait d'ailleurs pour obtenir une bonne note.

Rappelons que l'épreuve d'analyse du concours a pour objectif :

– D'une part de tester les connaissances des candidats sur les parties fondamentales du programme (niveau propédeutique et début de maîtrise) ;

– D'autre part de juger de leur aptitude à utiliser ces résultats dans des situations simples.

Il est lassant de répéter qu'appliquer signifie non pas citer un nom de mathématicien, mais énoncer un théorème précis (avec hypothèses et conclusions) et vérifier que les dites hypothèses sont satisfaites.

Le jury attend du candidat un travail solide, sans bluff, pouvant ne porter que sur une partie limitée du sujet.

3. Les notes (sur 60)

Nombre de copies corrigées : 2 089

Répartition des notes :

0 :	7,92 %
1 à 4 :	50,45 %
5 à 8 :	13,74 %
9 à 12 :	7,21 %
13 à 16 :	4,75 %
17 à 20 :	4,88 %
21 à 24 :	4,28 %
25 à 28 :	1,84 %
29 à 32 :	1,93 %
33 à 36 :	1,07 %
37 à 40 :	0,54 %
41 à 48 :	0,58 %
49 à 60 :	0,76 %

ANALYSE NUMÉRIQUE

Sujet (durée : 6 heures)

AVERTISSEMENT

Les candidats sont priés de respecter les notations et la numérotation de l'énoncé. Les notations ou abréviations abusives risquent de ne pas être comprises.

Les démonstrations et présentations concises, claires et soignées seront particulièrement bien appréciées.

Le problème est consacré à l'approximation des solutions d'un problème de Cauchy $\mathcal{R}$ pour une équation aux dérivées partielles de la forme $\frac{\partial u}{\partial t} = f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ où $u : (x, t) \longmapsto u(x, t)$ est l'inconnue.

Dans la partie 1 de caractère technique on établit des résultats utiles pour la suite. Dans la partie 2 on définit le problème approché $\mathcal{R}_h$ et on fait étudier quelques propriétés qui conduisent à un théorème d'existence et d'unicité de sa solution $\vec{\mathrm{U}}^h$, le point essentiel étant la question ***Q. 8.*** L'approximation de u, solution de $\mathcal{R}$, par $\vec{\mathrm{U}}^h$ résulte alors d'estimations à priori convenables (partie 3).

0. NOTATIONS ET HYPOTHÈSES

$\mathbb{R}$ est le corps des réels, T un réel positif; on définit I et Ω (resp I_0 et Ω_0) par $\mathrm{I} = [0, \mathrm{T}]$, $\Omega = \mathbb{R} \times \mathrm{I}$ (resp $\mathrm{I}_0 =]0, \mathrm{T}]$, $\Omega_0 = \mathbb{R} \times \mathrm{I}_0$). $\mathbb{Z}$ est