ministère de l'éducation

direction des personnels enseignants
de lycées

Agrégation mathématiques

Rapport de Monsieur Edmond RAMIS
Inspecteur général de l'Instruction publique
Président du jury

1976

présentation

1. COMPOSITION DU JURY

M.	RAMIS	*Inspecteur général de l'Instruction publique, président*
M.	RICHE	*Inspecteur général de l'Instruction publique, vice-président,*
M.	ARCANGELI	*Maître de conférences à l'université des Pays de l'Adour*
M.	ARTOLA	*Professeur à l'université de Bordeaux I*
M.	AUQUE	*Maître assistant à l'université de Clermont-Ferrand*
M.	BAILLE	*Maître assistant à l'université de Grenoble I*
M.	BARLET	*Maître assistant à l'université de Paris VII*
M.	BARRA	*Professeur à l'université de Grenoble I*
M.	BLANCHARD	*Professeur au lycée Saint-Louis à Paris*
M.	BLONDEL	*Professeur à l'université de Bordeaux I*
M.	BRODEAU	*Maître de conférences à l'université de Grenoble II*
M.	CAPODANNO	*Professeur à l'université de Besançon*
M.	CARPENTIER	*Professeur au lycée Carnot à Dijon*
M.	CARSIQUE	*Professeur au lycée Saint-Louis à Paris*
M.	CHAMBADAL	*Professeur au lycée Louis-le-Grand à Paris*
M.	CUENAT	*Professeur au lycée Hoche à Versailles*
M.	DELASSUS	*Professeur au lycée Camille Guérin à Poitiers*
Mme	DELEAU	*Professeur au lycée Descartes à Tours*
M.	DENY	*Professeur à l'université de Paris XI*
M.	DESCHAMPS	*Professeur au lycée Louis-le-Grand à Paris*
M.	DESQ	*Professeur à l'université de Toulouse II*
Mme	EL KAROUI	*Maître de conférences à l'université du Mans*
M.	EXBRAYAT	*Maître assistant à l'université de Paris VI*
M.	FOREST	*Professeur au lycée Saint-Louis à Paris*
M.	FRAYSSE	*Professeur au lycée Fermat à Toulouse*
M.	GENET	*Professeur à l'université des Pays de l'Adour*
M.	GIORGIUTTI	*Professeur à l'université de Rennes*
M.	HEE	*Assistant à l'université de Paris XI*

M.	HELLEGOUARCH	*Maître de conférences à l'université de Caen*
M.	HELMER	*Professeur au lycée Clemenceau à Reims*
M.	KAPLAN	*Maître de conférences à l'université de Nancy I*
M.	KAROUBI	*Professeur à l'université de Paris VII*
M.	KERKYACHARIAN	*Maître assistant à l'université de Nancy I*
M.	LEBORGNE	*Professeur à l'université de Nantes*
M.	MAZET	*Maître assistant à l'université de Paris VI*
M.	MONESTIER	*Professeur au lycée Chaptal à Paris*
M.	OVAERT	*Professeur au lycée Thiers à Marseille*
M.	PAINTANDRE	*Professeur au lycée Fermat à Toulouse*
M.	PRADINES	*Maître de conférences à l'université de Toulouse II*
Mme	RAOULT	*Professeur au lycée Condorcet à Paris*
M.	REINHARD	*Maître de conférences à l'Ecole Polytechnique*
M.	RIVET	*Professeur à l'Institut national des sciences appliquées de Rennes*
M.	ROSEAU	*Professeur à l'université de Paris VI*
M.	SCHREIBER	*Maître de conférences à l'université d'Orléans*
M.	SIMON	*Professeur au lycée Jacques Decour à Paris*
M.	SOUBLIN	*Maître de conférences à l'université Marseille-Provence*
M.	WARUSFEL	*Professeur au lycée Louis-le-Grand à Paris*
M.	WIRTH	*Professeur au lycée Saint-Louis à Paris*
M.	ZISMAN	*Professeur à l'université de Paris VII*

176 177
177
353

4+5 15
158

17
25
18

37

2. CALENDRIER DES EPREUVES

2.1. Epreuves préparatoires (écrit)

- Elles ont eu lieu aux dates suivantes :

Mathématiques générales : 8 mai de 8 à 14 heures ;
Analyse : 10 mai de 8 à 14 heures ;
Mathématiques appliquées : 11 mai de 8 à 14 heures.

Conformément au règlement du concours, les candidats avaient dû préciser l'option de leur choix, lors de leur inscription au concours ; cinq candidats se sont vu attribuer la note 0 à la troisième épreuve pour avoir composé dans une option différente de celle qu'ils avaient initialement choisie.

- La liste d'admissibilité a été affichée le 18 juin (au ministère de l'Education et au lycée Montaigne).

2.2. Epreuves définitives (oral)

Elles se sont déroulées au lycée Montaigne, à Paris, du 23 juin au 22 juillet. Les résultats définitifs ont été affichés le 24 juillet.

3. STATISTIQUES DIVERSES

3.1. Résultats généraux

	1976	1975
Postes mis au concours	240	285
Candidats inscrits	2 820	2 902
Candidats présents à la première épreuve	2 382	2 457
Candidats présents à la dernière épreuve	2 130	2 118
Admissibles (l'astérisque correspond aux étrangers)	470 + 5*	486 + 6*
Admis à l'agrégation	217 + 2*	212 + 4*
Equivalences des épreuves pratiques du CAPES	4	8

On remarquera la stabilité du nombre des candidats ayant terminé les épreuves, et on notera que le nombre de ceux qui ont abandonné entre la première et la dernière composition est en diminution : 252 en 1976, contre 339 en 1975 ; il semble que les compositions de mathématiques générales et d'analyse aient été cette année, au moins dans les premières questions, sensiblement plus faciles que l'an dernier.

3.2. Répartition des notes d'écrit

Dans le tableau suivant, N (m) désigne le nombre des candidats ayant obtenu à l'écrit une moyenne, sur 20, au moins égale à m.

m	20	15	12,5	10	7,5	6,25	5,75	5,25	4,75	3,5	2
N(m)	1	15	37	91	214	320	385	475	540	848	1211

On notera la grande disparité des candidats : plus de 900 parmi ceux qui ont terminé l'écrit n'ont pas atteint la moyenne de 2/20, alors que 15 atteignaient ou dépassaient celle de 15/20. Par ailleurs, il aurait suffi de relever d'un point le seuil d'admissibilité, fixé à 5,25/20, pour avoir 155 admissibles de moins.

Ajoutons qu'avec des seuils d'admissibilité aussi bas que ceux de ces dernières années, il se trouve régulièrement des professeurs qui deviennent bi-admissibles sans s'être présentés une fois à l'oral, conscients qu'ils sont de n'avoir aucune chance de succès définitif.

3.3. Répartition entre les options

	Analyse numérique	Mécanique	Probabilités
Ont composé	1 064	230	836
Admissibles	241	49	185
Admis	116	14	89

3.4. Situation universitaire des candidats

Dans le tableau suivant, U, J, C, F, T correspondent aux élèves des E.N.S. : Ulm, Jourdan, Saint-Cloud, Fontenay-aux-Roses et E.N.S.E.T. Les autres abréviations sont les suivantes :

E : Etudiants ;
I.P.E.S. : Elèves des I.P.E.S. ;
C.P.R. : Stagiaires de C.P.R. ;
P.C. : Certifiés ou bi-admissibles ;
A : Assistants ;
C.O. : Coopération ;
S.N. : Professeurs au service militaire, en congé ou en sursis d'intégration ;
M.A. : Maîtres auxiliaires, maîtres d'internat, maîtres d'externat, ...
P. : Enseignement privé
D. : Divers (ingénieurs,...).

Candidats	U	J	C	F	T	E	I.P.E.S.	C.P.R.
Inscrits	37	29	16	33	52	374	264	645
Admissibles	34	25	16	25	42	46	49	81
Admis	30	20	13	14	30	18	16	26

Candidats	P.C.	A	C.O.	S.N.	M.A.	P	D	Total
Inscrits	859	51	65	123	194	65	13	2 820
Admissibles	86	20	11	27	6	4	3	475
Admis	22	9	3	14	3	1	0	219

3.5. Répartition suivant les centres d'écrit

Centres / Candidats	Aix-Marseille	Amiens	Besançon	Bordeaux – Pau	Caen	Clermont	Dijon	Grenoble	Lille	Limoges	Lyon -St Etienne	Montpellier	Nancy – Metz
Inscrits	113	81	40	93	56	20	46	119	224	39	116	87	129
Ayant composé	93	64	29	77	45	20	40	109	189	35	101	73	110
Admissibles	5	10	3	8	9	5	6	13	24	4	12	6	11
Admis	1	2	1	2	4	1	2	4	3	1	2	3	2

Centres / Candidats	Nantes	Nice - Ajaccio	Orléans - Tours	Paris	Poitiers	Reims	Rennes – Brest	Rouen	Strasbourg	Toulouse	Etranger
Inscrits	108	102	57	788	56	38	90	79	70	105	164
Ayant composé	80	90	48	692	44	27	80	62	56	92	126
Admissibles	8	14	10	253	7	5	20	2	6	8	26
Admis	3	5	2	153	4	2	6	2	3	2	9

107

Les candidats mentionnés au centre de Paris sont, en fait, ceux des trois académies de CRETEIL, PARIS, et VERSAILLES. Parmi eux figurent les élèves des écoles normales supérieures (qui ont fourni 167 inscrits, 142 admissibles et 107 reçus).

3.6. Affectation des agrégés 1976

Sur les 217 candidats français admis :

12 ont été maintenus ou détachés dans l'enseignement supérieur ;
12 ont obtenu des chaires de classes préparatoires aux grandes écoles ;
41 ont obtenu des chaires de T.C., T.E. ou T.S. ;
4 ont été nommés dans une école normale d'instituteurs ;
23 ont été maintenus ou nommés sur des chaires ordinaires (lycées ou C.E.S.) ;
17 partiront en coopération ou au service national ;
81 feront une année supplémentaire dans une E.N.S. ;
20 suivront un stage de formation professionnelle ;

4 ont été affectés à des organismes de recherche (C.N.R.S., D.G.R.S.T.) ;
1 sera nommé ingénieur-élève d'une Grande Ecole ;
2 ont été maintenus dans l'enseignement supérieur privé.

3.7. Influence de la mixité du concours

La mixité des concours de recrutement d'enseignants a gagné peu à peu les diverses disciplines : elle est le lot commun depuis cette année. En ce qui concerne l'agrégation de mathématiques, alors qu'il y avait jusqu'ici un concours féminin et un concours masculin (avec jurys séparés, mais mêmes sujets d'épreuves écrites), le concours de 1976 était pour la première fois commun aux candidats des deux sexes.

Le tableau suivant permet de comparer les situations de 1975 et 1976 (F et H se rapportent respectivement aux hommes et aux femmes ; τ désigne $\frac{100\,F}{F+H}$; on a tenu compte des candidats français et étrangers) :

	1976			1975			1973
	F	H	τ	F	H	τ	τ
Inscrits	1 052	1 768	37	1 044	1 858	36	36
Admissibles	116	359	24	176	316	36	33
Admis	60	159	28	87	129	40	36

Si l'on ajoute qu'en 1976 les cinq premières candidates ont obtenu les numéros de classement 6, 19, 24, 35 et 41, il semble que la mixité ait été assez nettement favorable aux candidats hommes,et ceci malgré la persistance d'un meilleur comportement des femmes à l'oral.

Il peut d'ailleurs s'agir là d'un fait accidentel (la comparaison est déjà moins défavorable aux candidates si l'on prend 1973 pour année de référence de l'ancien régime) et une seule expérience ne suffit pas pour porter un jugement définitif. Attendons donc, les résultats de 1977.

écrit

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

Sujet : (durée : 6 heures)

INTRODUCTION

On se fixe pour tout le problème un espace vectoriel euclidien E de dimension finie $\geqslant 4$. Par « *vecteur* » on entend « élément de E ». Si x et y sont deux vecteurs, on note xy leur produit scalaire (qui est un nombre réel). Si x est un vecteur, on note $|x|$ sa *norme* $\sqrt{xx}$. Si x et y sont deux vecteurs non nuls, on note $\widehat{x,y}$ leur *angle*, c'est-à-dire l'unique nombre réel θ tel que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ et que $\cos\theta = \dfrac{xy}{|x|.|y|}$.

On convient d'appeler *réflexion* une symétrie hyperplane orthogonale de E, c'est-à-dire un élément ρ du groupe orthogonal O(E) de E tel que $\rho^2 = 1_E$ et que l'ensemble $\operatorname{Ker}(\rho - 1_E)$ des points fixes de ρ soit un hyperplan de E. Si x est un vecteur non nul, ρ_x désigne l'unique réflexion telle que $\rho_x(x) = -x$. On appelle *similitude* le composé d'une transformation orthogonale (élément de O(E)) et d'une homothétie (centrée en l'origine de E) de rapport $\neq 0$. Deux parties A et B de E sont dites *semblables* s'il existe une similitude σ telle que $\sigma(A) = B$.

Un *cristal* est une partie non-vide X de E telle que pour tout couple (x, y) d'éléments de X (éventuellement égaux), on ait :

$$y \neq 0, \qquad y \neq 2x, \qquad 2\frac{xy}{yy} \in \mathbf{Z} \qquad \text{et} \qquad \rho_y(x) \in X .$$

PREMIÈRE PARTIE

1° Soient x et y deux vecteurs, avec $y \neq 0$. On pose alors :

$$n(x, y) = 2 \frac{xy}{yy}.$$

Démontrer la formule :

$$\rho_y(x) = x - n(x, y)\, y.$$

2° Démontrer que si deux vecteurs x et y appartiennent à un même cristal, on a les inégalités :

$$0 \leqslant n(x, y)\, n(y, x) \leqslant 4 \quad \text{et} \quad -3 \leqslant n(x, y) \leqslant 3.$$

3° Démontrer l'existence d'une partie Ω de $\mathbf{R}^4$, de cardinal 12, telle que si x et y sont deux vecteurs non orthogonaux appartenant à un même cristal, on ait :

$$\left(n(x,y),\ n(y,x),\ \frac{|y|}{|x|},\ \widehat{x,y} \right) \in \Omega.$$

(Par exception, il est nécessaire de traiter complètement cette question, c'est-à-dire de disposer d'un tel ensemble Ω par la liste de ses 12 éléments, pour pouvoir résoudre la suite du problème. En règle générale, il suffit en effet, pour pouvoir répondre à une question, d'admettre les résultats énoncés dans les questions qui la précèdent.)

4° On dit que deux vecteurs non nuls x et y forment un angle *aigu* si $0 < \widehat{x,y} < \frac{\pi}{2}$.

Démontrer que si deux vecteurs x et y appartiennent à un même cristal X et forment un angle aigu, alors leur différence $y-x$ appartient à X.

5° Soient X et Y deux cristaux, F un sous-espace vectoriel de E, λ un nombre réel > 0, S_λ la « sphère » formée des vecteurs de norme λ. Démontrer que $X \cap Y$, $X \cap F$ et $X \cap S_\lambda$ sont, ou bien vides, ou bien des cristaux.

6° Soient $X_1, \ldots, X_p$ $(p \geqslant 2)$ une famille finie de cristaux deux à deux *orthogonaux*, c'est-à-dire tels que tout vecteur de X_i soit orthogonal à tout vecteur de X_j, pour $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant p$, $i \neq j$.

Démontrer que la réunion $X = X_1 \cup \ldots \cup X_p$ est un cristal (on dira que X est la *réunion orthogonale* des cristaux $X_1, \ldots, X_p$).

7° Un cristal Y est dit *indécomposable* s'il n'existe pas de cristaux Y_1 et Y_2 tels que Y soit la réunion orthogonale de Y_1 et de Y_2.

Démontrer que tout cristal non indécomposable X est réunion orthogonale d'une famille finie $X_1, \ldots, X_p$ de cristaux indécomposables, et que ces cristaux $X_1, \ldots, X_p$ sont parfaitement déterminés par X, à l'ordre près.

8° Si P est un ensemble formé de vecteurs non nuls, on note W(P) le sous-groupe du groupe orthogonal O(E) engendré par les réflexions ρ_x, lorsque x décrit P.

Démontrer que si un vecteur x appartient à un cristal indécomposable X, alors, d'une part l'orbite de x sous l'action de W(X) et d'autre part l'ensemble X engendrent le même sous-espace vectoriel de E.

9° Si P est une partie de E, on note $|P|$ l'ensemble des normes $|x|$ lorsque x décrit P.

Démontrer que si X est un cristal indécomposable, l'ensemble $|X|$ possède 1 ou 2 éléments.

10° Soit X un cristal indécomposable, et soit λ le plus petit élément de $|X|$. Démontrer que si x et y sont deux vecteurs distincts de X, on a : $|x-y| \geqslant \lambda$.

11° Démontrer que tout cristal est fini.

12° Démontrer que si X est un cristal, le groupe W(X) est fini.

13° On appelle *rang* d'un cristal X la dimension du sous-espace vectoriel **R**X engendré par X.

Démontrer qu'à similitude près il n'existe qu'un seul cristal de rang 1, noté A_1, et qu'il est indécomposable.

DEUXIÈME PARTIE

Les résultats de cette deuxième partie ne sont pas indispensables par la suite

1° Démontrer qu'à similitude près, il n'existe qu'un seul cristal de rang 2, noté S_2, qui ne soit pas indécomposable et dont tous les vecteurs aient même norme. Dessiner S_2 (dans le plan euclidien $\mathbf{R}S_2$).

2° Démontrer que dans un cristal X indécomposable de rang 2, on peut trouver deux vecteurs x et y formant un angle aigu. Si de plus $|X|$ possède deux éléments, démontrer qu'on peut imposer la condition supplémentaire : $|y| > |x|$.

3° Démontrer qu'à similitude près, il n'existe qu'un seul cristal de rang 2, noté A_2, qui soit indécomposable et dont tous les vecteurs aient même norme. Dessiner A_2 .

4° Démontrer qu'à similitude près, il n'existe, outre le cristal A_2, que deux autres cristaux indécomposables de rang 2, notés B_2 et G_2, de cardinaux respectifs 8 et 12.

Dessiner ces deux cristaux.

TROISIÈME PARTIE

1° Démontrer la non-vacuité de l'ensemble $\mathcal{C}(X)$ des vecteurs t qui ne sont orthogonaux à aucun des vecteurs d'un cristal donné X.

2° Soit X un cristal et $t \in \mathcal{C}(X)$. Notons X_t^+ l'ensemble des vecteurs de X qui forment un angle aigu ou nul avec t. Notons enfin B_t^X l'ensemble des vecteurs de X_t^+ qui ne peuvent pas s'écrire comme somme de deux éléments de X_t^+ . Démontrer que tout élément de X_t^+ est combinaison linéaire d'éléments de B_t^X à coefficients entiers $\geqslant 0$.

3° On dit que deux vecteurs non nuls x et y forment un angle *obtus* si $\frac{\pi}{2} < \widehat{x,y} < \pi$. Soit X un cristal et $t \in \mathcal{C}(X)$; démontrer que les éléments de B_t^X forment entre eux des angles obtus ou droits.

4° On appelle *demi-espace* (sous-entendu : strict) l'image réciproque de l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$ par une forme linéaire non nulle $E \to \mathbf{R}$.

Démontrer que si des vecteurs sont situés dans un même demi-espace et forment entre eux, deux à deux, des angles droits ou obtus, alors ils forment une famille libre.

5° Une partie $B = \{b_1, \ldots, b_r\}$ d'un cristal X est dite une *base cristalline* de X si c'est une famille libre, et si pour tout x dans X, il existe un élément $(\varepsilon, \nu_1, \ldots, \nu_r)$ dans le produit cartésien

$$\{-1, +1\} \times \mathbf{N}^r \text{ tel que } x = \varepsilon(\nu_1 b_1 + \ldots + \nu_r b_r) .$$

Cette définition étant posée, soit X un cristal et $t \in \mathcal{C}(X)$; démontrer que B_t^X est une base cristalline de X.

6° Soit B une base cristalline d'un cristal X.

Démontrer qu'il existe un vecteur $t \in \mathcal{C}(X)$ tel que $tb = 1$ pour tout $b \in B$, et que, pour un tel vecteur t, on a $B = B_t^X$.

7° Soit B une base cristalline d'un cristal X. On note alors $X^+(B)$ l'ensemble des vecteurs *positifs* de X relativement à B, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $x \in X$ qui sont combinaisons linéaires à coefficients $\geqslant 0$ des éléments de B.

Démontrer que si $b \in B$, la réflexion ρ_b laisse globalement invariant l'ensemble $X^+(B)$ privé de b.

8° Soit B une base cristalline d'un cristal X. Notons s_B^X la demi-somme des vecteurs de X qui sont positifs relativement à B.

Démontrer que pour tout b dans B, on a : $\rho_b(s_B^X) = s_B^X - b$.

9° Soit x un vecteur d'un cristal X de rang $\geqslant 2$.

Démontrer qu'il existe un vecteur u orthogonal à x, et donc à $-x$, mais non orthogonal aux autres vecteurs de X.

10° Soient x, X et u comme à la question précédente; et soit v un vecteur tel que $vx > 0$. Posons :

$$\varepsilon = \min_{y \in X,\, y \neq \pm x} |uy| , \qquad M = \max_{y \in X} vy , \qquad t = u + \frac{\varepsilon}{2M} v .$$

Démontrer que $t \in \mathcal{C}(X)$, et que $x \in B_t^X$.

11° Soit B une base cristalline d'un cristal X, et soit $t \in \mathcal{C}(X)$. Soit $\varphi \in W(B)$ tel que le produit scalaire $s_B^X\, \varphi(t)$ soit maximal (lorsque φ décrit le groupe $W(B)$).

Démontrer que $\varphi(t)$ forme un angle aigu ou nul avec tous les vecteurs de B.

12° Soient A et B deux bases cristallines d'un même cristal.

Démontrer qu'il existe φ dans $W(B)$ tel que $\varphi(A) = B$.

13° Soit B une base cristalline d'un cristal X.

Démontrer que $W(B) = W(X)$.

14° Démontrer que si deux cristaux ont une base cristalline en commun, alors ils sont égaux.

15° Démontrer qu'à similitude près, il n'existe qu'un nombre fini de cristaux indécomposables.

QUATRIÈME PARTIE

Dans cette partie on se fixe une base orthonormale $e_1, \dots, e_N$ $(N \geqslant 4)$ de l'espace euclidien E.

1° Soit r un entier tel que $1 \leqslant r \leqslant N-1$, et soit A_r l'ensemble des $r(r+1)$ vecteurs de la forme $e_i - e_j$, avec $i \neq j$, $1 \leqslant i \leqslant r+1$, $1 \leqslant j \leqslant r+1$.

Démontrer que A_r est un cristal.

2° Démontrer que les r vecteurs $e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_r - e_{r+1}$ constituent une base cristalline de A_r.

3° Trouver le nombre d'éléments du groupe $W(A_r)$.

4° Soit r un entier tel que $2 \leqslant r \leqslant N$. On considère d'une part les $2r$ vecteurs $\pm e_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$, et d'autre part les $2r(r-1)$ vecteurs $\pm e_i \pm e_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant r)$, où les signes $\pm$ sont choisis indépendamment. Soit B_r l'ensemble de ces $2r^2$ vecteurs.

Démontrer que B_r est un cristal.

5° Démontrer que les r vecteurs

$$e_1 - e_2,\ e_2 - e_3,\ \dots,\ e_{r-1} - e_r,\ e_r$$

constituent une base cristalline de B_r.

6° Soit $\mathfrak{J}$ l'*inversion* de centre l'origine de E et de puissance 2, c'est-à-dire l'application qui à tout vecteur non nul x associe l'unique vecteur y colinéaire à x tel que $xy = 2$.

Démontrer que si X est un cristal, alors $\mathfrak{J}(X)$ est un cristal.

7° Démontrer que si B est une base cristalline du cristal X, alors $\mathfrak{J}(B)$ est une base cristalline du cristal *inverse* $\mathfrak{J}(X)$.

8° Démontrer que les cristaux A_r, B_r et $C_r = \mathfrak{J}(B_r)$ sont tous indécomposables.

9° Démontrer que, pour $1 \leqslant r \leqslant N-1$, on a l'égalité $\mathfrak{J}(A_r) = A_r$, et que les deux cristaux B_2 et C_2 sont semblables.

10° Démontrer que les cristaux A_r $(1 \leqslant r \leqslant N-1)$, B_r $(2 \leqslant r \leqslant N)$, C_r $(3 \leqslant r \leqslant N)$ sont deux à deux non semblables.

11° Trouver deux cristaux indécomposables non semblables X et Y tels que $W(X) = W(Y)$.

CINQUIÈME PARTIE

Les questions 2°, 3°, 4° et 5° de cette cinquième partie sont indépendantes des deuxième, troisième et quatrième parties

1° Un groupe G est dit *cristallographique* si c'est un sous-groupe fini du groupe orthogonal O(E), s'il n'est pas réduit à son élément neutre, si en outre il est engendré par des réflexions, et si enfin il existe une *base de rationnalité* pour G, c'est-à-dire une base de E (non nécessairement orthogonale) telle que les matrices des éléments de G par rapport à cette base soient toutes à coefficients rationnels.

Démontrer que si X est un cristal, le groupe W(X) est cristallographique.

2° Soit A une base de rationnalité pour un groupe cristallographique G. Soit T le sous-groupe du groupe additif de E engendré par la réunion $D = \bigcup_{\varphi \in G} \varphi(A)$.

Démontrer qu'il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que le seul vecteur de T de norme $< \varepsilon$ soit le vecteur nul. (On conserve ces notations dans les questions 3°, 4° et 5° ci-dessous).

3° Démontrer que si y est un vecteur non nul tel que la réflexion ρ_y appartienne à G, alors le groupe $T \cap \mathbf{R}y$ (formé des vecteurs de T colinéaires à y) est cyclique.

4° Soit X l'ensemble des vecteurs non nuls x tels que $\rho_x \in G$ et que x soit un générateur du groupe cyclique $T \cap \mathbf{R}x$.

Démontrer que X est un cristal.

5° Démontrer que $G = W(X)$.

6° Soient ρ et σ deux réflexions appartenant à un même groupe cristallographique.

Démontrer que $(\rho \circ \sigma)^{12} = 1_E$.

7° Soit φ un élément d'un groupe cristallographique. Considérant φ comme un endomorphisme de l'espace vectoriel E, démontrer que son polynôme caractéristique est à coefficients entiers.

8° Donner un exemple de sous-groupe fini de O(E), non réduit à l'élément neutre, engendré par des réflexions, mais qui ne soit pas cristallographique.

9° Démontrer qu'à isomorphie près, il n'y a qu'un nombre fini de groupes cristallographiques.

SIXIÈME PARTIE

Sauf pour sa dernière question, cette partie est indépendante de la cinquième partie

1° Soit B une base cristalline d'un cristal indécomposable X (les notations des questions 1, 2 et 3 se suivent).

Démontrer que si x et y sont dans B, le nombre $\cos \widehat{x,y}$ ne peut prendre que 4 valeurs.

2° Désormais, X est de rang 3.

Démontrer que $B = \{a, b, c\}$, avec a non orthogonal à b et b non orthogonal à c.

3° Posons $\alpha = \frac{a}{|a|}$, $\beta = \frac{b}{|b|}$, $\gamma = \frac{c}{|c|}$. En exprimant que le carré scalaire de chacun des trois vecteurs $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha + \sqrt{2}\beta + \gamma$ et $\sqrt{3}\alpha + 2\beta + \gamma$ est strictement positif, démontrer que le triplet $(\cos \widehat{\alpha,\beta}, \cos \widehat{\beta,\gamma}, \cos \widehat{\gamma,\alpha})$ ne peut prendre que trois valeurs.

4° Démontrer que les trois cristaux A_3, B_3 et C_3 sont, à similitude près, les seuls cristaux indécomposables de rang 3.

5° Soient ρ, σ et τ trois réflexions appartenant à un même groupe cristallographique.

Démontrer que $(\rho \circ \sigma \circ \tau)^{48} = 1_E$.

RAPPORT SUR L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES GENERALES

1. Thème du sujet

- Ce problème est une introduction à la théorie des systèmes de racines réduits, appelés ici **cristaux**, à leur classification et aux groupes qui leur sont associés. Pour les tenants et aboutissants de ces questions, se reporter à la notice historique des chapitres 4, 5 et 6 de *Groupes et Algèbres de Lie* de Nicolas BOURBAKI (pages 234 à 240).

- Voici quelques indications sur les questions les plus difficiles :

Question I–8 : la méthode la plus naturelle est d'observer que les sous-espaces vectoriels engendrés par les diverses orbites déterminées dans X par l'action de W(X) sont orthogonaux et intersectent donc X en une réunion orthogonale de cristaux.

Question I–9 : étant donnés deux vecteurs x et y de X, on peut, d'après la question précédente, trouver y' dans l'orbite de y tel que x et y' ne soient pas orthogonaux. On n'utilise ensuite que: $|y'|$ égale $|y|$.

Question III–1 : le problème était de montrer que E ne peut être réunion d'un nombre fini d'hyperplans. Cela se voit bien, mais le jury chagrin ne se contenta pas de cette affirmation exacte. On peut invoquer le théorème de Baire : dans un espace métrique complet, toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide. Utilisant le principe des tiroirs on peut prouver que si un espace vectoriel F sur un corps K est réunion d'un nombre fini n de sous-espaces vectoriels stricts, c'est que le corps K est fini, de cardinal $< n$. Enfin on peut appliquer la décomposition des variétés algébriques en sous-variétés irréductibles (l'espace affine est irréductible), ou plus simplement, l'intégrité de l'anneau $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_N]$: un produit de formes linéaires non nulles sur E est non nulle. Ces remarques s'appliquent aussi à la question III–9.

Question III–4 : l'idée «à avoir» est que toute relation de dépendance linéaire peut s'écrire $\sum_i \lambda_i x_i = \sum_j \mu_j y_j$, avec les λ_i et μ_j **positifs.** On dit ensuite que le produit scalaire du membre de gauche et de celui de droite est à la fois positif et négatif.

Question III–6 : cette question n'est facile qu'à la lumière de l'isomorphisme canonique entre un espace vectoriel euclidien et son dual.

Question III–15 : un cristal indécomposable, de base cristalline $\{b_1, \dots b_r\}$ est déterminé, à similitude près, par les nombres $n(b_i, b_j) \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

Question IV–7 : c'est peut-être la question la plus difficile du problème. Le plus élégant est de remarquer que la réunion des demi-droites portées par les éléments de B constitue les points extrémaux du cône convexe engendré par $X^+(B)$, lequel cône est invariant par l'inversion.

Les cinquième et sixième parties, plus faciles que les deux précédentes, n'ont presque pas été traitées.

Pour la dernière question, le candidat idéal aurait prouvé ceci : soit G le groupe engendré par les trois réflexions ρ, σ et τ; soit $\varphi \in G$ et H un sous-groupe de G. Alors on a $\varphi^4 = 1_E$ ou $\varphi^6 = 1_E$, et l'ordre de H divise 48.

2. Observations des correcteurs

- Le texte était long. Mais le candidat qui aurait traité complètement la seule première partie aurait obtenu la note totale de 40 sur 60. Par contre, les six premières questions ne constituaient qu'une simple mise en condition (la première difficulté était de prouver l'unicité dans la septième question). La plupart des candidats n'ont **donc** traité que quelques-unes de ces six premières questions, ainsi que les premières questions de la lointaine quatrième partie.

- Analysons quelques fautes courantes dans ces copies «faibles». Pour montrer, dans la quatrième question, que $y - x$ appartient à X, on se donne un z dans X et on établit plus ou moins que $y - x \neq 2z$, $n(y - x, z) \in \mathbb{Z}$ et $\rho_z(y - x) \in X$. Cela ne prouve rien, l'idée sous-jacente étant probablement de montrer que la réunion $X \cup \{y - x\}$ est un cristal. Ceci ne serait probant que si les cristaux étaient «maximaux» : cette antinomie si déroutante et si répandue pourrait vouloir dire que la structure de **cristal** — si «pleine» à défaut d'être «maximale» — est dans l'inconscient collectif du peuple étudiant !

Voici une autre faute usuelle, qui étonne en notre époque d'ensemblisme scholastique : dans la cinquième question, pour vérifier $y \neq 2x$, pour les éléments x et y d'un certain ensemble ($X \cap Y$ par exemple), on se croit obligé de démontrer au préalable que cet ensemble possède au moins deux éléments.

Dans cette même cinquième question, les candidats ont peiné pour établir que $X \cap S_\lambda$, supposé non vide, est un cristal. Et pourtant, il suffisait de se souvenir de la définition du groupe orthogonal : comme $\rho_y \in O(E)$, on a $|\rho_y(x)| = |x| = \lambda$. Ordinairement, on calcule laborieusement $|\rho_y(x)|$, ou plutôt son carré.

Passons directement à la quatrième partie, comme les candidats «faibles». Cela suppose un flair exercé (ou dévoyé) et beaucoup de temps perdu. Prenons la première question. Pour prouver aisément l'axiome $\rho_y(x) \in A_r$, il suffisait de dire que

$\rho_{e_i - e_j}$ échange e_i et e_j et laisse les autres vecteurs de base invariants. Cette méthode livre d'ailleurs le résultat de la troisième question : le groupe **(de Weyl)** $W(A_r)$ s'identifie au groupe des permutations de $e_1, \dots, e_{r+1}$, et possède donc $(r+1)$! éléments. Au lieu de cela, le candidat maladroit cherche à montrer par un calcul direct que $\rho_{e_i - e_j}(e_k - e_l)$ est de la forme $e_m - e_n$ en distinguant les innombrables cas ($k = i$, etc.), en sorte qu'il en oublie. Cette méthode appliquée à B_r est encore plus désastreuse.

- D'une façon générale, les candidats n'ont pas vu la nature géométrique des transformations et configurations dont il s'agit dans ce problème.

3. Les notes (sur 60)

Nombre de copies corrigées : 2 382

Répartition des notes :

0	3,84 %
1 à 4	35,52 %
5 à 8	23,65 %
9 à 12	11,87 %
13 à 16	8,02 %
17 à 20	5,66 %
21 à 24	4,35 %
25 à 28	2,24 %
29 à 32	1,10 %
33 à 36	0,97 %
37 à 40	0,38 %
41 à 48	1,73 %
48 à 60	0,68 %

COMPOSITION D'ANALYSE

Sujet : (durée : 6 heures)

Préliminaires

1° **K** désigne **R** ou **C**. Si Ω est un ouvert non vide de $\mathbf{R}^2$, et n un entier positif ($n \in \mathbf{N}$), on note $\mathscr{C}^n(\Omega, \mathbf{K})$ l'ensemble des applications de classe C^n (*en tant que fonctions de deux variables réelles*) de Ω dans **K**. En particulier $\mathscr{C}^0(\Omega, \mathbf{K})$ est l'ensemble des applications continues de Ω dans **K**.

On note $\mathscr{C}^\infty(\Omega, \mathbf{K})$ l'ensemble $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \mathscr{C}^n(\Omega, \mathbf{K})$.

Lorsque la première (resp. seconde) variable est notée x (resp. y), $\frac{\partial}{\partial x}\left(\text{resp. } \frac{\partial}{\partial y}\right)$ désigne l'opérateur de dérivation partielle par rapport à la première (resp. seconde) variable, et Δ désigne alors l'opérateur $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Si Ω est un ouvert non vide de $\mathbf{R}^2$, et k un entier positif, on note $\mathscr{H}^k(\Omega, \mathbf{K})$ l'ensemble des éléments f de $\mathscr{C}^\infty(\Omega, \mathbf{K})$ tels que $\Delta^k f = 0$. On a ainsi $\mathscr{H}^0(\Omega, \mathbf{K}) = \{0\}$. Un élément f de $\mathscr{H}^k(\Omega, \mathbf{K})$ (plus spécialement de $\mathscr{H}^1(\Omega, \mathbf{K})$) est dit « polyharmonique » [d'ordre k, de Ω dans **K**] (plus spécialement « harmonique » [de Ω dans **K**]). On admet *sans démonstration* que $\mathscr{H}^1(\Omega, \mathbf{K})$ est fermé dans l'espace $\mathscr{C}^0(\Omega, \mathbf{K})$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Ω.

2° On identifiera parfois $\mathbf{R}^2$ et **C** en utilisant la variable complexe $x + iy$. Si celle-ci est notée z [$x = \operatorname{Re}(z)$; $y = \operatorname{Im}(z)$], on désigne par

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\text{resp. } \frac{\partial}{\partial \bar z}\right)$$

l'opérateur de dérivation $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\text{resp. } \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)$.

On rappelle alors les formules :

$$a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} = c\frac{\partial}{\partial z} + \bar c\frac{\partial}{\partial \bar z} \quad \text{si} \quad c = a + ib\ ;$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \circ \frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{\partial}{\partial \bar z} \circ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{4}\Delta\ ; \quad df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar z}d\bar z,$$ et le résultat suivant :

Si f est une fonction holomorphe d'un ouvert non vide Ω de **C** dans **C**, on a $\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z) = 0$ et $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$ pour tout z dans Ω.

3° Si a est un complexe, ρ un réel strictement positif, $D(a, \rho)$ (resp. $\overline{D}(a, \rho)$) désigne le disque ouvert (resp. fermé) de **C** de centre a, de rayon ρ. Pour Ω *disque* ouvert non vide de **C**, on admet *sans démonstration* que les éléments de $\mathscr{H}^1(\Omega, \mathbf{R})$ (resp. $\mathscr{H}^1(\Omega, \mathbf{C})$) sont exactement les parties réelles des fonctions holomorphes de Ω dans **C** (resp. les fonctions $f + \bar g$, où f, g sont des fonctions holomorphes de Ω dans **C**).

4° On désigne par λ la mesure de Lebesgue de $\mathbf{R}^2$ (ou **C**). Les locutions « λ-intégrable », « λ-mesurable », « λ-presque partout », etc. sont usuelles. On désigne par $\mathscr{L}$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes, définies λ-presque partout dans **C**, et λ-intégrables. Si f appartient à $\mathscr{L}$, son intégrale est notée indifféremment

$$\int f(z)\,d\lambda(z)\ , \qquad \int f(\zeta)\,d\lambda(\zeta)\ , \qquad \iint f(x, y)\,dx\,dy \quad \text{etc.}$$

Si K est un compact de **C**, $\mathscr{L}_K$ désigne l'ensemble des éléments de $\mathscr{L}$ qui sont nuls λ-presque partout dans $\mathbf{C}\setminus K$. On note plus spécialement, R étant un réel strictement positif, $\mathscr{L}_R$ pour $\mathscr{L}_{\overline{D}(0,R)}$. Enfin $\mathscr{L}_C$ désigne $\bigcup_{R>0} \mathscr{L}_R$.

5° Si U est une partie de **C**, si f est une application de U dans **K**, on note $P[f]$ l'application de **C** dans **K** telle que

$(\forall z \in U)\,(P[f](z) = f(z))$ et $(\forall z \in \mathbf{C})\,(z \notin U \Rightarrow P[f](z) = 0)$.

6° Toute définition ou résultat intervenant dans le texte est réputé acquis pour toute la suite. Les parties II et III sont indépendantes de la partie I. On peut aborder la partie III en admettant les résultats sur les fonctions normales de la partie II.

I. *Fonctions polyharmoniques sur un disque ouvert*

Dans cette partie, R désigne un réel strictement positif.

1° Si $a = (a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbf{N}^2}$ est une suite double de complexes, montrer l'équivalence des énoncés :

(*i*) La série double de terme général $a_{m,n} z^m \bar z^n$ converge absolument pour tout z élément de $D(0, R)$.

(*ii*) Pour tout réel ρ élément de l'intervalle $[0, R[$, l'ensemble des complexes $a_{m,n}\rho^{m+n}$ est borné.

Dans la suite, on note $\mathcal{A}_R$ l'ensemble des suites doubles a qui vérifient (*i*) ou (*ii*).

2° Si a appartient à $\mathcal{A}_R$, on note F_a l'application de $D(0, R)$ dans $\mathbf{C}$ définie par $F_a(z) = \sum\sum a_{m,n} z^m \bar{z}^n$. Montrer que F_a appartient à $\mathcal{C}^\infty(D(0, R), \mathbf{C})$ et expliciter $\frac{\partial F_a}{\partial z}$, $\frac{\partial F_a}{\partial \bar{z}}$, ΔF_a.

3° Montrer que l'application $a \longmapsto F_a$ de $\mathcal{A}_R$ dans $\mathcal{C}^\infty(D(0, R), \mathbf{C})$ est injective; on note dans ce qui suit $\mathcal{F}_R$ l'image de cette application.

Montrer : $\mathcal{H}^1(D(0, R), \mathbf{C}) \subset \mathcal{F}_R$.

4° Montrer que Δ induit une application surjective de $\mathcal{F}_R$ dans lui-même.

En déduire que l'on a : $\mathcal{H}^k(D(0, R), \mathbf{C}) \subset \mathcal{F}_R$ pour k entier supérieur à 1.

Caractériser les éléments a de $\mathcal{A}_R$ tels que F_a appartienne à $\mathcal{H}^k(D(0, R), \mathbf{C})$.

5° Soit A un réel. Montrer que les éléments de $\mathcal{H}^k(D(0, R), \mathbf{C})$ sont exactement les sommes $\sum_{j=0}^{k-1} (A^2 - r^2)^j u_j$, où $u_0, \ldots, u_{k-1}$ appartiennent à $\mathcal{H}^1(D(0, R), \mathbf{C})$, et où r désigne l'application $z \longmapsto |z|$. [On pourra faire d'abord $A = 0$].

6° Soient k un entier supérieur à 1 et f_n une suite dans $\mathcal{H}^k(D(0, R,) \mathbf{C})$ qui converge, lorsque n tend vers $+\infty$, uniformément sur tout compact de $D(0, R)$, vers une fonction f.

a. Soit A réel tel que $0 < A < R$. Montrer qu'il existe une suite g_n dans $\mathcal{H}^{k-1}(D(0, R), \mathbf{C})$, une suite h_n dans $\mathcal{H}^1(D(0, R), \mathbf{C})$ telles que $(\forall n \in \mathbf{N})\ (f_n = (A^2 - r^2) g_n + h_n)$.

Montrer que la suite h_n converge, lorsque n tend vers $+\infty$, uniformément sur tout compact de $D(0, A)$, vers une fonction h élément de $\mathcal{H}^1(D(0, A), \mathbf{C})$.

b. Déduire de ce qui précède que f appartient à $\mathcal{H}^k(D(0, R), \mathbf{C})$.

II. *Transformation* $\widehat{\ }$ *et fonctions normales*

Si f est un élément de $\mathcal{L}$, z un complexe, et si la fonction

$$\zeta \longmapsto \operatorname{Log}\left(\frac{1}{|z-\zeta|}\right) f(\zeta)$$

est λ-intégrable, on note $\widehat{f}(z)$ le scalaire

$$\int \operatorname{Log}\left(\frac{1}{|z-\zeta|}\right) f(\zeta)\, d\lambda(\zeta).$$

On dit alors que $\widehat{f}(z)$ « existe » (ou « est défini »). On admettra le résultat suivant :

Si f est de plus de classe C^∞ sur un ouvert ω de $\mathbf{C}$, $\widehat{f}(z)$ existe pour tout z élément de ω, et définit sur ω une fonction de classe C^∞ qui vérifie $\Delta \widehat{f}(z) = -2\pi f(z)$.

1° Soient r un réel strictement positif, z un complexe. Calculer

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Log}\left(\frac{1}{|z - re^{i\theta}|}\right) d\theta \qquad \text{pour} \qquad |z| > r$$

[on pourra utiliser le développement de $\operatorname{Log}(1-u)$ pour $|u| < 1$], puis pour $|z| < r$. Que se passe-t-il pour $|z| = r$?

2° Soient r un réel strictement positif, et χ_r l'application de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{R}$ égale à 1 sur $D(0, R)$, à 0 ailleurs. Ainsi χ_r appartient à $\mathcal{L}$.

Montrer que $\widehat{\chi_r}(z)$ existe pour tout complexe z, et expliciter sa valeur.

3° *a.* Soient R et r des réels strictement positifs, f un élément de $\mathcal{L}_R$.

En remarquant que $(z, \zeta) \longmapsto \operatorname{Log}\left(\frac{1}{|z-\zeta|}\right)$ est minorée sur les compacts de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$, montrer que l'application

$$(z, \zeta) \longmapsto \operatorname{Log}\left(\frac{1}{|z-\zeta|}\right) \chi_r(z) f(\zeta)$$

est intégrable pour la mesure de Lebesgue de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$. En déduire que $\widehat{f}(z)$ est défini pour λ-presque tout z, que $\widehat{f}$ est λ-mesurable, que $\chi_r \cdot \widehat{f}$ appartient à $\mathcal{L}$.

b. Plus généralement, soient f, g des éléments de $\mathcal{L}_C$. On suppose g borné.

Montrer que $\widehat{f}\,.\,g$ et $f\,.\,\widehat{g}$ appartiennent à $\mathcal{L}$ et que

$$\int \widehat{f}(z)\, g(z)\, d\lambda(z) = \int f(z)\, \widehat{g}(z)\, d\lambda(z)\,.$$

4° Soient K un compact de $\mathbf{C}$, Ω un ouvert de $\mathbf{C}$ contenant K, f un élément de $\mathcal{L}_K$, φ une application continue de Ω dans $\mathbf{C}$.

Montrer $P[\varphi].f \in \mathcal{L}$.

On appelle *fonction normale* tout élément f de $\mathcal{L}_{\mathbf{C}}$, *à valeurs réelles*, qui vérifie

$$\int \varphi(z) f(z)\, d\lambda(z) = 0$$

quelle que soit la fonction holomorphe φ de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$.

5° Soient R un réel strictement positif, et f un élément de $\mathcal{L}_R$, à valeurs réelles.

a. Montrer l'équivalence des énoncés :

(*i*) f est normale,

(*ii*) $(\forall n \in \mathbf{N}) \left(\int z^n f(z)\, d\lambda(z) = 0\right)$,

(*iii*) Quels que soient l'ouvert Ω de $\mathbf{C}$ contenant $\overline{D}(0, R)$, et la fonction harmonique φ de Ω dans $\mathbf{C}$, on a

$$\int P[\varphi](z) f(z)\, d\lambda(z) = 0\,.$$

b. Montrer que $\widehat{f}(z)$ existe pour tout complexe z vérifiant $|z| > R$ et que l'application

$$z \longmapsto \widehat{f}(z) + \left(\int f(\zeta)\, d\lambda(\zeta)\right) \operatorname{Log}|z| \quad \text{de} \quad \mathbf{C}\setminus\overline{D}(0, R)$$

dans $\mathbf{R}$ est la partie réelle d'une fonction holomorphe dont on précisera le développement en série de Laurent.

6° Soit f un élément de $\mathcal{L}_{\mathbf{C}}$, à valeurs réelles.

Montrer : f est normale $\Leftrightarrow \widehat{f} \in \mathcal{L}_{\mathbf{C}}$.

7° Soient ρ un réel strictement positif, ω un ouvert de $\mathbf{C}$ contenant $\overline{D}(0, \rho)$, f une fonction normale élément de $\mathcal{L}_\rho$, u un élément de $\mathcal{C}^\infty(\omega, \mathbf{C})$.

Montrer

$$\int P[u](z)\, f(z)\, d\lambda(z) = -\frac{1}{2\pi} \int \widehat{f}(z)\, P[\Delta u](z)\, d\lambda(z)\,.$$

[On pourra utiliser en particulier les questions II. 3° (*b*) et II. 5°.]

III. *Exemples de fonctions normales*

On note B l'ensemble des complexes ζ tels que $0 < \operatorname{Re}(\zeta) < \pi$, et γ l'application $\zeta \longmapsto \cos\zeta$ de B dans $\mathbf{C}$.

1° *a.* Montrer que γ est injective, et déterminer l'image $\Gamma = \gamma(B)$ de B par γ.

b. On note δ l'application de Γ dans $\mathbf{C}$ telle que

$$(\forall \zeta \in B) \qquad (\delta(\gamma(\zeta)) = \zeta)\,.$$

Montrer que δ est holomorphe, et préciser la valeur de $\delta(x)$ si x réel appartient à l'intervalle $]-1, 1[$.

c. Si n appartient à $\mathbf{N}$, montrer que l'application

$$Q_n : z \longmapsto \cos(n\delta(z)) \text{ de } \Gamma \text{ dans } \mathbf{C}$$

est une fonction polynôme de degré n, à coefficients réels, de même parité que n.

Jusqu'à la fin de cette partie, α désigne un réel strictement positif.

2° On note E_α l'ensemble des complexes z tels que

$$\frac{[\operatorname{Re}(z)]^2}{1+\alpha^2} + \frac{[\operatorname{Im}(z)]^2}{\alpha^2} < 1\,,$$

et l'on pose, pour n élément de $\mathbf{N}$, $A(n, \alpha) = \int_{E_\alpha} Q_n(z)\, d\lambda(z)$, où la fonction à intégrer est définie λ-presque partout dans E_α.

Calculer $A(0, \alpha)$ (on a ainsi $A(0, \alpha) > 0$);

— montrer $A(0, \alpha) + 2A(2, \alpha) = 0$;

— montrer $A(n, \alpha) = 0$ pour $n = 1$, ou n entier $\geqslant 3$.

3° On note φ_α l'application de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{R}$ égale à $\dfrac{1}{A(0, \alpha)}$ sur E_α, à 0 ailleurs (on a ainsi $\varphi_\alpha \in \mathcal{L}$). Si β est un réel strictement positif, montrer que $\varphi_\alpha - \varphi_\beta$ est une fonction normale.

4° On note μ_α la mesure de Radon $\varphi_\alpha.\lambda$. Si α_n est une suite de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, montrer que la suite μ_{α_n} converge vaguement, lorsque n tend vers $+\infty$, vers une mesure de Radon μ que l'on déterminera.

IV. *Fonctions associées*

Si f est un élément de $\mathcal{L}_{\mathbf{C}}$, à valeurs réelles, ω un ouvert non vide de $\mathbf{C}$, u un élément de $\mathcal{C}^0(\omega, \mathbf{C})$, on dit que f est *associé* à u s'il existe un disque fermé D de $\mathbf{C}$ tel que

(1) $$f \in \mathcal{L}_D .$$

(2) Pour toute similitude directe (bijective) S vérifiant $S(D) \subset \omega$,

$$\int P[u](S(z)) f(z)\, d\lambda(z) = 0 .$$

1° Soient f une fonction normale, ω un ouvert non vide de $\mathbf{C}$, u un élément de $\mathcal{H}^1(\omega, \mathbf{C})$. Montrer que f est associé à u.

2° On note $\mathfrak{N}_1$ l'ensemble des fonctions normales, et l'on définit par récurrence, pour n entier $\geqslant 2$, $\mathfrak{N}_n$ comme l'ensemble des éléments f de $\mathcal{L}_C$, à valeurs réelles, tels que $\hat{f}$ appartienne à $\mathfrak{N}_{n-1}$.

a. Si f appartient à $\mathfrak{N}_n$, montrer

$$\iint x^p y^q f(x, y)\, dx\, dy = 0$$

pour p, q entiers vérifiant $0 \leqslant p$; $0 \leqslant q$; $p + q \leqslant 2n - 1$.
[On pourra utiliser II. 7°].

b. En déduire que, si f appartient à $\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} \mathfrak{N}_n$, f est λ-négligeable.

3° Soient ω un ouvert non vide de $\mathbf{C}$, u un élément de $\mathcal{C}^\infty(\omega, \mathbf{C})$, f un élément de $\mathcal{L}_C$, à valeurs réelles. On suppose f associé à u.

a. Soit n un entier positif tel que $\int z^n f(z)\, d\lambda(z) \neq 0$.

Montrer $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n u = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^n u = 0$.

[On pourra utiliser un développement de Taylor au voisinage d'un point quelconque de ω].

b. On suppose que f n'est pas λ-négligeable. Montrer que u est polyharmonique dans ω.

4° Soient ω un ouvert non vide de $\mathbf{C}$, u un élément de $\mathcal{C}^0(\omega, \mathbf{R})$, $\mathcal{S}$ l'ensemble des similitudes directes (bijectives) S vérifiant $S(D) \subset \omega$, où D est le disque fermé $\bar{D}(0, 1)$, $\mathcal{E}$ l'ensemble, lorsque S décrit $\mathcal{S}$, des applications $z \longmapsto u(S(z))$ de D dans $\mathbf{R}$. Montrer l'équivalence des énoncés suivants :

(*i*) u est polyharmonique (de ω dans $\mathbf{R}$).

(*ii*) L'espace vectoriel engendré par $\mathcal{E}$ n'est pas dense dans l'espace $\mathcal{C}(D, \mathbf{R})$ des applications continues de D dans $\mathbf{R}$, muni de la topologie de la convergence uniforme.

[On pourra, par des procédés de régularisation, se ramener au cas où u est de classe C^∞, et aussi remplacer des mesures de Radon par des éléments de $\mathcal{L}_C$].

RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE

1. Thème du sujet

L'idée centrale du problème est une propriété générale de moyenne, caractéristique des fonctions polyharmoniques dans le disque unité ouvert D du plan $\mathbf{R}^2$: pour qu'une fonction f continue réelle dans D soit polyharmonique, il faut et il suffit qu'il existe une mesure de Radon réelle **non nulle** μ à support compact **associée** à f au sens suivant : pour toute similitude directe σ vérifiant $\sigma(\text{supp}\,\mu) \subset D$, on a $\int f\, d(\sigma\mu) = 0$ (supp μ désigne le support de μ et $\sigma\mu$ l'image de μ par σ).

Ce résultat peut s'étendre au cas de n dimensions, mais le cas $n = 2$ est plus facile à traiter que le cas $n \geqslant 3$, car on peut alors utiliser les éléments de la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe. Le cas $n = 1$ est beaucoup plus simple.

Si on prend pour μ la mesure réelle constituée par la masse -1 en un point z_0 et par la répartition homogène de la masse $+1$ sur un cercle de centre z_0 on obtient la propriété de moyenne de Gauss qui est, comme on sait, caractéristique des fonctions harmoniques. Si on prend pour μ la mesure constituée par la répartition homogène de la masse $+1$ sur l'intérieur d'une ellipse E et la répartition homogène de la masse -1 sur l'intérieur d'une seconde ellipse homofocale à E, on obtient une propriété beaucoup moins connue des fonctions harmoniques (voir par exemple l'ouvrage classique de COURANT et HILBERT).

Dans l'énoncé de la propriété générale on peut supposer que la mesure μ est absolument continue, autrement dit on peut remplacer «mesure associée à f» par «fonction (intégrable au sens de Lebesgue, presque partout nulle hors d'un compact) associée à f». On se limitait à ce cas dans l'énoncé du problème, car la notion de mesure de Radon non positive ne figure pas explicitement au programme de l'agrégation.

Le résultat en vue s'obtient en utilisant des développements de Taylor pour f lorsque cette fonction est supposée indéfiniment dérivable. Quelques préliminaires concernant les fonctions harmoniques et le potentiel logarithmique sont nécessaires. Le cas où f est seulement supposée continue s'obtient par régularisation, en utilisant le fait que toute limite uniforme de fonctions polyharmoniques d'ordre $\leqslant k$ dans un ouvert Ω est polyharmonique d'ordre $\leqslant k$ dans Ω.

Le problème était divisé en quatre parties : la première (préliminaires sur les fonctions polyharmoniques) avait pour but d'étudier la structure locale des fonctions polyharmoniques d'ordre k dans un disque ouvert (théorème d'Almansi) et d'en déduire que $\mathcal{H}^k(\mathrm{D}(\mathrm{O},\mathrm{R}), \mathbf{C})$ est fermé dans $\mathcal{C}(\mathrm{D}(\mathrm{O},\mathrm{R}), \mathbf{C})$. La seconde partie était l'étude des fonctions «normales», *i.e.* des fonctions réelles dans le potentiel logarithmique est identiquement nul hors d'un compact ; ce sont aussi les fonctions orthogonales aux fonctions harmoniques (en un sens bien précisé). Entre ces deux parties préliminaires et la quatrième partie, consacrée à la démonstration du résultat en vue, on avait ajouté une troisième partie, qui était l'étude d'un exemple concret de fonction normale ; cet exemple fournit, pour les fonctions harmoniques, la propriété de moyenne déjà signalée relative à des ellipses homofocales. La quatrième partie se terminait par une application du théorème général de moyenne à la construction de systèmes totaux de fonctions continues.

2. Observations générales

Sans doute le problème était-il un peu trop long, mais il ne comportait pas de très grandes difficultés, sauf peut-être dans la quatrième partie, abordée par très peu de candidats. Il fallait maîtriser plusieurs parties du programme d'analyse (théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe, intégrale de Lebesgue, etc.) et surtout être vraiment familier avec les techniques usuelles : séries (doubles), convergence uniforme, dérivation terme à terme, développements de Taylor (pour fonctions de plusieurs variables), etc. D'autre part, une lecture attentive du texte permettait de repérer un certain nombre de questions qu'on pourrait presque qualifier de «questions de cours», par exemple les questions I 1°, II 1°, III 1°, etc. Le barème était tel qu'un candidat qui se serait limité à les traiter à fond aurait été fort bien placé pour une éventuelle admissibilité. Comme il a déjà été dit dans des rapports précédents, si les textes proposés sont longs (mais certains candidats brillants en traitent la plus large partie) il est en fait surtout demandé d'en traiter solidement, sans bluff ni fébrilité, une partie limitée.

- Il serait sans doute lassant de répéter ici les remarques qu'on peut trouver dans les rapports précédents concernant la présentation des copies et ce qu'on peut appeler les «non raisonnements» : «donc» abusifs ou intempestifs, «on sait bien...» quelque résultat commode localement mais faux, sans oublier les classiques invocations magiques : «d'après LEBESGUE», «d'après FUBINI», etc. Trop de candidats ne font pas la distinction entre une démonstration et un galimatias destiné à duper le correcteur. A l'inverse les correcteurs ont eu le plaisir de lire quelques très bonnes copies ; trois d'entre elles, particulièrement brillantes, ont obtenu des notes voisines du maximum.

3. Remarques particulières

PREMIERE PARTIE

Le but de cette partie est de donner la structure locale des fonctions polyharmoniques (ici dans un disque ouvert centré en O) et de démontrer que pour k entier $\geqslant 1$, $\mathcal{H}^k(\mathrm{D}(\mathrm{O},\mathrm{R}), \mathbf{C})$ est fermé dans $\mathcal{C}_c(\mathrm{D}(\mathrm{O},\mathrm{R}), \mathbf{C})$, résultat que les préliminaires rappelaient pour k égal à 1.

1° Cette «question de cours» est en général fort mal traitée. Dans le sens *(i)* ⇒ *(ii)* il suffisait évidemment de dire que, pour une famille sommable de réels **positifs**, chaque terme est majoré par la somme de la dite famille. Mais il n'en va pas ainsi dans la plupart des copies ! : raisonnements par l'absurde des plus fumeux, confusion entre «fini en tout point» et «borné» (ce qui est proprement scandaleux), utilisation de ce que l'on a : $\lim\limits_{m,n} |a_{m,n}| \rho^{m+n} = 0$, et de ce que le complémentaire dans $\mathbf{N}^2$ de $]\,\mathrm{N}, \to [^2$ ne serait autre que $[\,0\,,\mathrm{N}\,]^2$ pour conclure (cette dernière erreur, des plus vulgaires, est reproduite par trop de copies au I 4° et I 5° ...) etc. Pour *(ii)* ⇒ *(i)*, on se ramenait immédiatement à : $\sum\sum\limits_{m,n} \sigma^{m+n} < +\infty$ pour σ réel dans $[\,0, 1\,[$, mais même ce dernier point est souvent fort mal prouvé.

Signalons enfin que cette question a donné lieu à une débauche de quantifications délirantes — il ne saurait être trop conseillé d'écrire en français «basique» ce que l'on ne sait pas quantifier.... — et que très peu de candidats ont fait d'eux-mêmes la remarque que l'appartenance de a à $\mathcal{A}_\mathrm{R}$ donne la convergence uniforme compacte dans $\mathrm{D}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ de la série double de fonctions $\sum\sum a_{m,n}\, z^m\, \bar{z}^{\,n}$.

Pour terminer, il n'était nul besoin pour être efficace d'utiliser la notion de filtre de sections ou des résultats élaborés concernant les familles sommables !

2° Cette question était l'occasion rêvée pour accumuler toutes les erreurs signalées dans les remarques générales ; les trop rares copies qui comportent à ce sujet quelque chose de sensé et d'honnête, sans même parvenir à une solution complète, ont été fortement récompensées.

Voici ce que le jury pouvait, en gros, attendre comme solution : si a appartient à $\mathcal{A}_\mathrm{R}$, F_a est continue d'après une remarque précédente, et les suites doubles b et c de complexes définies par : $b_{m,n} = (m+1)\, a_{m+1,n}$ et $c_{m,n} = (n+1)\, a_{m,n+1}$ appartiennent à $\mathcal{A}_\mathrm{R}$ (en montrant par exemple *(ii)* du 1° à leur sujet), de sorte que les séries doubles $\Sigma\Sigma\, b_{m,n}\, z^m \bar{z}^{-n}$ et $\Sigma\Sigma\, C_{m,n}\, z^m \bar{z}^{-n}$ convergent normalement sur tout compact de $D(O,R)$; il en est de même de toutes leurs combinaisons linéaires ; de là, $\Sigma\Sigma \frac{\partial}{\partial x}(a_{m,n}\, z^m \bar{z}^{-n}$ et aussi $\Sigma\Sigma \frac{\partial}{\partial y}(a_{m,n}\, z^m \bar{z}^{-n}$ convergent uniformément sur tout compact de $D(O,R)$; ainsi, d'une part F_a est partiellement dérivable par rapport à x (resp. y) dans $D(O,R)$, avec dérivation terme à terme, les dérivées partielles sont continues, donc F_a est φ^1, d'autre part, par recombinaison linéaire, on a bien : $\frac{\partial F_a}{\partial z}(z) = \Sigma\Sigma\, b_{m,n}\, z^m \bar{z}^{-n}$ (de même pour $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ ...). On achève par une récurrence immédiate, qui donne en particulier ΔF_a, $\Delta^k F_a$, $\frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial \bar{z}^q} F_a$ etc...

Citons les erreurs relevées le plus fréquemment :

La convergence normale, ou uniforme, voire absolue, d'une série de fonctions $\mathcal{C}^\infty$, entraîne que la somme est $\mathcal{C}^\infty$, et l'on peut donc, en outre, dériver terme à terme. (Ce serait en effet bien commode !) ;

Puisque z et $\bar{z}$ sont, **grosso modo**, des «variables indépendantes» (ceci malgré les extrêmes scrupules de langage des préliminaires !), l'on peut donc se préoccuper exclusivement des opérateurs $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sans revenir un instant aux variables x et y ;

L'existence de dérivées partielles de tous ordres en x et y (voire même seulement des dérivées partielles de la forme $\frac{\partial^p}{\partial x^p}$. et $\frac{\partial^q}{\partial y^q}$. ...) suffit à assurer le caractère $\mathcal{C}^\infty$.

Signalons encore des essais infructueux pour montrer que F_a est $\mathbf{C}$-analytique, à l'aide de sommations adéquates, et de ce que z et $\bar{z}$ n'ont quelque rapport que lorsque cela est bien utile...,

3° Le caractère injectif de $a \mapsto F_a$ est souvent bien vu, même si la formule liant $\frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial \bar{z}^q} F_a(0)$ et $a_{p,q}$ est parfois inexacte. Dans le «sottisier» déjà bondé de l'agrégation, ajoutons : «la famille $(z^m \bar{z}^n)_{(m,n)\in \mathbf{N}^2}$ est libre, d'où le résultat» ; «Si $\Sigma\Sigma a_{m,n}\, z^m \bar{z}^n = 0$ dans $D(O,R)$, on a : $a=0$, par prolongement analytique».

L'inclusion $\mathcal{H}^1(D(O,R),\mathbf{C}) \subset \mathcal{F}_R$ ne demandait qu'un peu de soin à partir du résultat cité au 3° des préliminaires. Encore convenait-il d'expliquer pourquoi la suite double, qui s'imposait alors, était dans $\mathcal{A}_R$, ce que peu de candidats ont su bien faire.

4° Quitte à paraître insister lourdement, « Δ induit une surjection de $\mathcal{F}_R$ sur lui-même» signifie, et dans cet ordre : « $\Delta(\mathcal{F}_R) \subset \mathcal{F}_R$» et «pour tout f élément de $\mathcal{F}_R$, il existe g dans $\mathcal{F}_R$ qui vérifie : $\Delta g = f$». Il suffisait bien entendu, en transmuant par la bijection $a \mapsto F_a$ de $\mathcal{A}_R$ sur $\mathcal{F}_R$, de raisonner en termes de $\mathcal{A}_R$.

Pour l'inclusion $\mathcal{H}^k \subset \mathcal{F}_R$ (brièvement écrite), où l'on souhaitait voir apparaître le mot «récurrence», suivi d'une démonstration (au lieu de l'expression «et ainsi de suite», suivie d'aucune) l'essentiel des erreurs rencontrées consistait à penser que le caractère surjectif précédemment dévoilé signifiait en fait : bijectif ! Enfin, pour la caractérisation des éléments a de $\mathcal{A}_R$ tels que $\Delta^k F_a = 0$, on a pu assister à une lutte sévère entre «et» et «ou» qu'il s'agit de glisser entre : «pour tout $m \geqslant k$», «pour tout $n \geqslant k$»... , la version défectueuse faisant jeu égal avec la correcte. Comme il a été dit plus haut, ceci n'est pas sans lien avec l'emploi non maîtrisé des quantificateurs, et la croyance que $\mathbf{N}^2$ est la réunion disjointe de $[0,N]^2$ et $]N,\rightarrow[^2$.

5° Certains candidats n'ont pas saisi l'importance du mot «exactement» (égalité d'ensembles, i-e double inclusion). Une inclusion était évidente avec 4°. Pour l'autre, il s'agissait de sommer «habilement» pour faire apparaître les puissances de $z\bar{z}$; mais, en fait, un dessin aidait puissamment, si besoin, la formulation théorique ; ce dessin bien simple n'a été aperçu que dans de trop rares copies. Pour passer enfin au cas A quelconque, que de difficultés dans les copies, alors qu'il n'y en a là vraiment aucune.

6° Un nombre infime de copies voit qu'il suffit de montrer (pour a.) que h_n est uniformément de Cauchy sur les compacts de $D(O,A)$ et, pour ce faire, de mettre en œuvre le principe du maximum (ou un quelconque succédané).

Pour b. il est bien rare qu'une fois mis en place les débuts d'une nécessaire récurrence, on indique clairement qu'il s'agit d'abord de choisir un compact K de $D(O,R)$, puis A tel que $0 < A < R$, et $K \subset D(0, A)$, puis, donc, g_n, h_n telles que etc., pour aboutir à la conclusion. Le jury a toutefois peu tenu compte des rédactions légèrement défectueuses à ce sujet.

DEUXIEME PARTIE

Signalons d'abord deux rectifications typographiques à apporter au texte (ces erreurs n'ont en fait pas gêné les candidats) : il convient de glisser un indice c ($\mathcal{L}_c$ au lieu de $\mathcal{L}$) dans le «chapeau», et de remplacer un R intempestif par r dans 2°. Le chapeau demandait donc d'admettre la formule de Poisson ($\Delta \hat{f} = -2\pi f$,si...), utile pour 7° ; cette partie était, il convient de le souligner, rédigée en termes de densités, en ce sens que les fonctions f, éléments de $\mathcal{L}_c$, remplacent ici les mesures $f.d\lambda$, et ne sont qu'un cas particulier des mesures de Radon complexes sur $\mathbf{C}$ à support compact. On faisait étudier quelques propriétés élémentaires du potentiel $\hat{f}$, en particulier le principe de symétrie (3° b), la caractérisation des fonctions normales (6°), qui remplacent donc ici les mesures à support compact, **réelles**, dont tous les moments complexes sont nuls (5° a (*ii*)). Bref, cette partie servait à entasser tous les outils nécessaires à la partie IV.

1° Que d'erreurs ! Certains candidats mal inspirés ne suivent pas l'indication de l'énoncé, et s'embourbent dans des valeurs moyennes donnant lieu à des résultats numériques incongrus. Un rapide test concernant le comportement asymptotique à l'infini aurait pourtant permis d'éliminer les formules les plus folkloriques.

La plupart des candidats ont de très grosses difficultés avec les déterminations du logarithme complexe, ou de l'argument. Il ne s'agissait ici, après une réduction immédiate (elle-même déjà source d'erreurs !), que de la détermination principale ; encore convenait-il de ne pas faire semblant de confondre Log $(1-u)$ et Log $|1-u|$, de connaître le développement en série entière de Log $(1-u)$ dans $D(0,1)$ [dont le jury souligne qu'il n'est ni $\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{u^n}{n}$ ni $\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+l} u^n}{n}$, que k ou l soient égaux à 1 ou 0 !, et qu'il ne converge pas uniformément dans $D(0,1)$!], enfin d'employer à bon escient une interversion des signes Σ et $\int$ dans un cas parfaitement élémentaire, ne nécessitant aucunement de recourir à la théorie de Lebesgue !

Le jury se doit d'insister sur le fait qu'il tient pour inquiétant qu'un très grand nombre de candidats ne traite pas correctement cette partie de la question.

Enfin, pour $|z| = r$, une ou deux copies seulement utilisent les résultats précédents, et, par exemple, le théorème de convergence monotone ; on trouve par contre quelques démonstrations sérieuses (mais assez longues) qui montrent à la main que Log $\left(\frac{1}{|z - re^{i\theta}|}\right)$ donne lieu pour $|z| = r$ à une intégrale impropre de Riemann convergente, puis calculent des intégrales de Log (sin θ) etc. pour aboutir au résultat souhaité. Evidemment, un grand nombre fait la remarque curieuse que l'intégrale «n'existe pas», puisque la fonction à intégrer «n'est pas toujours définie» ou «devient infinie» etc., ce qui ne l'empêchera pas de disserter doctement sur le «presque partout» dans les questions suivantes !

2°, 3°, 4 °. Sauf rares exceptions les candidats ne connaissent pas ou ne savent pas utiliser les théorèmes de Fubini (Fubini–Lebesgue, Fubini–Fatou ou Tonelli).

Il est de la sorte à peu près vain de commenter très à fond ces questions, qui demanderaient, outre une vigilante honnêteté sur l'emploi du mot «donc», quelque habileté. Très peu de candidats ont en fait compris l'utilité de la remarque sur la mémoration locale de Log $\left(\frac{1}{|z-\zeta|}\right.$, qui permettait de se ramener au cas des fonctions positives... ; très peu de candidats également ont vu que l'essentiel du 4° était la λ-mesurabilité de $P[\varphi].f$, ou encore de $P[\varphi]$ (le reste étant enfantin) ; mais il convenait encore pour ce dernier point d'être rigoureux et il n'est peut-être pas inutile de rappeler ici que la frontière d'un ouvert n'est pas toujours λ-négligeable...

TROISIEME ET QUATRIEME PARTIE

Des candidats en très petit nombre abordent la quatrième partie ; la plupart fournissent des copies brillantes, et donnent, en partie ou totalité, la solution des questions qu'ils traitent.

En ce qui concerne la partie III, le jury s'alarme de la masse écrasante d'erreurs, d'approximations, de médiocrités dont les rédactions du III 1° sont en général parsemées. Il convient sans doute de rappeler que le cosinus complexe, usuellement restreint, fournit l'un des premiers exemples de transformation conforme, que les théorèmes de la transformation conforme peuvent être considérés comme faisant partie du programme, enfin que l'on a renoncé à dénombrer les points de vue ou formules concernant les polynômes de Tchebycheff, de sorte que tout candidat les a entendu évoquer plusieurs fois au long de sa scolarité. Force est donc de constater qu'il ne reste pas grand chose d'un tel enseignement.

4. Les notes (sur 60)

Nombre de copies corrigées : 2231
Répartition des notes :

0	13,19 %
1 à 4	29,33 %
5 à 8	16,22 %
9 à 12	12,25 %
13 à 16	8,81 %
17 à 20	6,37 %
21 à 24	4,56 %
25 à 28	3,12 %
29 à 32	2,58 %
33 à 36	1,40 %
37 à 40	0,72 %
41 à 48	0,86 %
49 à 60	0,59 %

ANALYSE NUMÉRIQUE

AVERTISSEMENT

Les candidats sont priés de respecter les notations et la numérotation de l'énoncé. Les notations ou abréviations abusives risquent de ne pas être comprises.

Les démontrations et présentations concises, claires et soignées seront particulièrement bien appréciées.

NOTATIONS

Tous les espaces vectoriels considérés sont réels.

Si X est un espace normé, $\mathcal{L}(X)$ désigne l'espace vectoriel des applications linéaires continues de X dans lui-même, muni de la norme usuelle.

Soit O un ouvert de $\mathbf{R}^n$; $\mathcal{C}^0(O\,;X)$ (resp. $\mathcal{C}^k(O\,;X)$) désigne l'espace des fonctions continues (resp. k fois continûment différentiables) de O dans X.

Si K est un compact de $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{C}^0(K\,;X)$ (resp. $\mathcal{C}^k(K\,;X)$ est l'espace des restrictions à K des fonctions de $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}^n\,;X)$ (resp. de $\mathcal{C}^k(\mathbf{R}^n\,;X)$) muni (à l'exception de certains cas signalés) de la topologie usuelle de la convergence uniforme (resp. de la convergence uniforme pour l'ensemble des dérivées d'ordre $\leqslant k$) sur K.

Si $X = \mathbf{R}$, on notera $\mathcal{C}^k(O)$ (resp. $\mathcal{C}^k(K)$) au lieu de $\mathcal{C}^k(O\,;\mathbf{R})$ (resp. $\mathcal{C}^k(K\,;\mathbf{R})$).

PARTIE I

On considère $\Omega =]\,0\,,1\,[$. Soit $L^2(\Omega)$ l'espace de Hilbert des (classes de) fonctions de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue sur Ω.

On note

$$(u,v)_0 = \int_\Omega u(x)v(x)dx\ , \qquad \|u\|_0 = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

le produit scalaire et la norme dans $L^2(\Omega)$.

On introduit l'espace $H^m(\Omega)$, complété de $\mathscr{C}^m(\overline{\Omega})$ pour la norme

$$\varphi \longmapsto \|\varphi\|_m = \left(\sum_{j=0}^{m} \|\varphi^{(j)}\|_0^2 \right)^{1/2}$$

où $\varphi^{(j)}$ désigne pour $j = 1, \ldots, m$ la dérivée d'ordre j de φ et $\varphi^{(0)} = \varphi$.

On rappelle que toute forme linéaire continue sur un espace de Hilbert se représente à l'aide d'un produit scalaire de manière unique.

Soit

$$\mathscr{C}_0^m(\overline{\Omega}) = \{ \varphi \in \mathscr{C}^m(\overline{\Omega}) \; ; \quad \varphi^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}(1) = 0 \, , \qquad 0 \leqslant k \leqslant m-1 \}.$$

On rappelle que cet espace est dense dans $L^2(\Omega)$.

On dira que $u \in L^2(\Omega)$ *admet une dérivée faible d'ordre* k, $k \geqslant 1$, *dans* $L^2(\Omega)$ si la forme $\varphi \longmapsto (-1)^k \int_\Omega u(x)\varphi^{(k)}(x)dx$ définie sur $\mathscr{C}_0^k(\overline{\Omega})$ est continue pour la topologie induite par celle de $L^2(\Omega)$.

Ainsi, il existe $v_k \in L^2(\Omega)$, telle que pour tout $\varphi \in \mathscr{C}_0^k(\overline{\Omega})$, on ait :

$$(-1)^k \int_\Omega u(x)\varphi^{(k)}(x)\,dx = \int_\Omega v_k(x)\varphi(x)\,dx$$

et l'on note :

$$v_k = D^k u \qquad \text{(dérivée faible d'ordre } k, \ k \geqslant 1, \ \text{de } u).$$

Q. 1 *a.* Vérifier que toute fonction $\varphi \in \mathscr{C}^m(\overline{\Omega})$ a des dérivées faibles dans $L^2(\Omega)$ jusqu'à l'ordre m inclus et que l'on a :

(1) $$D^k\varphi = \varphi^{(k)}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m.$$

b. Montrer que tout $u \in H^m(\Omega)$ est dans $L^2(\Omega)$ et admet des dérivées faibles jusqu'à l'ordre m dans $L^2(\Omega)$.

On admettra pour la suite que $H^m(\Omega)$ est exactement l'espace des (classes de) fonctions $u \in L^2(\Omega)$ ayant des dérivées faibles jusqu'à l'ordre m dans $L^2(\Omega)$, espace de Hilbert pour la norme associée au produit scalaire

$$((u, v))_m = \sum_{j=0}^{m} (D^j u, D^j v)_0, \quad u, v \in H^m(\Omega).$$

Q. 2 Soit $t \in \overline{\Omega}$. Montrer qu'il existe une constante $C_0 > 0$ (indépendante de t) telle que l'on ait :

(2) $$|\varphi(t)| \leqslant C_0\|\varphi\|_1, \qquad \text{pour tout } \varphi \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega}).$$

En déduire que pour tout $u \in H^1(\Omega)$, on peut définir $u(t)$ et que l'on a :

(3) $H^1(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ (où $\hookrightarrow$ désigne l'injection continue).

On définit :

(4) $$H_0^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) \; ; \quad u(0) = u(1) = 0 \}$$

qui est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$.

On admettra, pour la suite, que $H_0^1(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathscr{C}_0^1(\overline{\Omega})$ pour la norme $u \longmapsto \|u\|_1$.

Établir :

(5) $$\|u\|_0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \|Du\|_0, \qquad \text{pour tout } u \in H_0^1(\Omega)$$

(avec $D = D^1$).

En déduire que $u \longmapsto \|u\| = \|Du\|_0$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme $u \longmapsto \|u\|_1$.

On notera :

(6) $$((u, v)) = \int_\Omega Du(x)\,Dv(x)\,dx, \qquad \text{pour } u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Q. 3 Soit B un borné de $H^1(\Omega)$.

Établir que si $\varphi \in B$ il existe une constante $C_B > 0$ telle que l'on ait

(7) $$|\varphi(t) - \varphi(t')| \leqslant C_B |t - t'|^{1/2} \qquad \text{pour tout } \varphi \in B \text{ et tout } t, t' \in \overline{\Omega}.$$

En déduire que B est relativement compact dans $L^2(\Omega)$.

Étendre les résultats de ***Q. 2*** et ***Q. 3*** à $H^m(\Omega)$.

Q. 4 Soit $\rho \geqslant 0$ et $f \in L^2(\Omega)$ donnés.

On considère le problème

$$(P_\rho) \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ vérifiant :} \\ (8) \quad ((u, v)) + \rho(u, v)_0 = (f, v)_0, \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Montrer que si (P_ρ) admet une solution u, celle-ci est unique et que l'on a :

(9) $$u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Observant que l'application $\varphi \longmapsto (f, \varphi)_0$ est continue sur $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $u \longmapsto \left(\|u\|^2 + \rho\|u\|_0^2\right)^{1/2}$, établir l'existence d'une solution de (P_ρ).

Q. 5 On pose : $V = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ et on définit l'opérateur A_ρ par :

(10) $$A_\rho v = -D^2 v + \rho v, \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Montrer que $v \longmapsto \|v\|_V = \|A_\rho v\|_0$ est une norme sur V et que A_ρ est une bijection bicontinue de V ainsi normé sur $L^2(\Omega)$.

A_ρ^{-1} désignant l'opérateur inverse de A_ρ, montrer que l'image d'un borné de $L^2(\Omega)$ par A_ρ^{-1} est un ensemble relativement compact de $L^2(\Omega)$.

Partie II

Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert (produit scalaire $(\,,)_{\mathcal{H}}$, norme $\|\ \|_{\mathcal{H}}$) et $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, on dira que $\mathcal{A}$ est de classe $(\mathcal{K})$ si l'image par $\mathcal{A}$ d'un borné de $\mathcal{H}$ est un ensemble relativement compact dans $\mathcal{H}$.

On rappelle que $\mathcal{A}$ est un opérateur autoadjoint de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ si

$$(\mathcal{A}u, v)_{\mathcal{H}} = (u, \mathcal{A}v)_{\mathcal{H}}, \text{ pour tout } u, v \in \mathcal{H}.$$

On utilisera, sans démonstration, le résultat suivant :

Soit $\mathcal{A}$ autoadjoint de classe $(\mathcal{K})$. Si F est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ différent de $\{0\}$, alors la restriction de $\mathcal{A}$ à F admet un vecteur propre dans F relatif à une valeur propre non nulle.

Q. 6 *a.* On considère encore $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, autoadjoint, de classe $(\mathcal{K})$ et on suppose que les valeurs absolues de toutes les valeurs propres distinctes λ_n de $\mathcal{A}$ constituent une suite.

Soit

E_{λ_i} le sous-espace propre associé à λ_i et $G = \operatorname{Ker}\mathcal{A} \oplus \underset{\lambda_i \neq 0}{E_{\lambda_i}}$

Montrer que G est dense dans $\mathcal{H}$.

b. Application : Montrer que A_ρ [défini dans I-**Q. 5**] admet une suite $\mu_n(\rho)$, $n \geq 1$ strictement croissante de valeurs propres, avec $\lim_{n \to \infty} \mu_n(\rho) = +\infty$ et déterminer les vecteurs propres correspondants, Φ_n, normés dans $L^2(\Omega)$.

Vérifier que Φ_n et $\Phi_{n'}$, $n \neq n'$, sont orthogonaux dans $L^2(\Omega)$ et dans $H_0^1(\Omega)$.

Enfin (en utilisant A_ρ^{-1}) établir que $\{\Phi_n\}_{n \geq 1}$ constitue une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$.

Dans la suite, on se limitera au cas $\rho = 0$, et on posera $\mu_n(0) = \mu_n$.

Q. 7 T étant un réel positif, on pose $\Omega_T =]0, T[\times \Omega$.

On se donne :

- $f \in L^2(\Omega)$, $\quad f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \Phi_k$ (convergence dans $L^2(\Omega)$),

  f_k constantes telles que : $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 < +\infty$

- $u_0 \in L^2(\Omega)$, $\quad u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{0k} \Phi_k$,

  α_{0k} constantes telles que : $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{0k})^2 < +\infty$.

Soit V_m le sous-espace de V engendré par $(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m)$.

On considère le problème :

$$(\Pi_m)\left\{\begin{array}{l} \text{Soit } \alpha_0 > 0 \text{ donné ;} \\ \text{Trouver } u_m : t \longmapsto u_m(t) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t)\Phi_k \in V_m, \\ t \in [0, T], \quad \text{vérifiant le système différentiel :} \\ (S_m)\left\{\begin{array}{l} \alpha_0\left(\dfrac{d u_m(t)}{dt}, \Phi_j\right)_0 + ((u_m(t), \Phi_j)) = (f, \Phi_j)_0. \\ \hfill 1 \leq j \leq m \\ u_m(0) = u_{0m} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{0k} \Phi_k \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Montrer que :

— (Π_m) admet une solution unique $u_m \in \mathcal{C}^p([0, T]; V_m)$ pour tout $p \geq 0$;

— u_m converge dans $\mathcal{C}^0([0, T]; L^2(\Omega))$ vers une fonction u, avec $u(0) = u_0$ et que $u \in \mathcal{C}^\infty(]0, T[; L^2(\Omega))$.

Établir ensuite que, pour tout $t \in]0\,,\,T[\,,\ u(t) \in V$.

Q. 8 Montrer que la fonction u obtenue en ***Q. 7*** est solution du problème :

$$(\Pi)\left\{\begin{array}{ll} & \text{Trouver } u \in \mathscr{C}^1(]0,\ T[\,;\, L^2(\Omega)) \cap \mathscr{C}^0([0,T]\,;\,L^2(\Omega)) \\ & \quad \text{tel que :} \\ i) & \text{Pour tout } t \in]0,\ T[,\quad u(t) \in V\ ; \\ ii) & \text{Pour tout } t \in]0,\ T[\ : \\ & \alpha_0\left(\dfrac{du}{dt}(t),\ \varphi\right)_0 + ((u(t),\ \varphi)) = (f,\ \varphi)_0\,, \\ & \text{pour tout } \varphi \in H_0^1(\Omega)\ ; \\ iii) & u(0) = u_0\ ; \end{array}\right.$$

et satisfait à

$$(11)\qquad \frac{\alpha_0}{2}\ \|u(t)\|_0^2 - \frac{\alpha_0}{2}\ \|u_0\|_0^2 + \int_0^t \|u(\sigma)\|^2 d\sigma = \int_0^t (f,\ u(\sigma))_0 d\sigma.$$

Établir que (Π) a au plus une solution et vérifier que « l'erreur de troncature » :

$$\varepsilon_{im} = \int_0^T \|u_m(t) - u(t)\|_i^2\, dt\,, \qquad i = 0\,,\ 1$$

satisfait à

$$(12)\qquad \varepsilon_{im} = O\left(\frac{1}{m^{1-i}}\right) \text{ quand } m \to +\infty\,,\quad i = 0\,,\ 1\,.$$

Q. 9 *a.* Établir que pour $t \in]\,0\,,\,T\,[\,,\ u(t) : x \longmapsto u(t\,,\,x)$ admet une dérivée faible d'ordre 2 dans $L^2(\Omega)$ vérifiant :

$$(13)\qquad -D^2u(t) = f - \alpha_0 \frac{du}{dt}(t)\,.$$

b. $\dfrac{\partial^2}{\partial \zeta^2}$ désignant l'opérateur de dérivée partielle usuel par rapport à la variable ζ, montrer que pour tout $t \in]\,0\,,\,T\,[$ on a :

$$(14)\qquad D^2u(t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(t)$$

et que, si

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \alpha_0 \frac{\partial}{\partial t}\,,\qquad \text{on a :}$$

$$(15)\qquad \left\{\begin{array}{l} Lu(t) = -f,\quad \text{pour tout } t \in]0\,,\ T[\,; \\ u(0,\ x) = u_0(x)\quad \text{p.p. en } x \in \Omega\,. \end{array}\right.$$

c. A quelle condition portant sur la suite $\{\alpha_{0k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ a-t-on $u_0 \in H_0^1(\Omega)$?

Comment sont modifiés les résultats de ***Q. 7*** à ***Q. 9*** dans ce cas ?

PARTIE III

On considère l'opérateur différentiel à coefficients réels constants $\mathcal{A}$ de nature « parabolique » défini pour u suffisamment régulier par

$$\mathcal{A}u = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \frac{\partial^{2n-k} u}{\partial x^{2(n-k)} \partial t^k}$$

auquel on associe le polynôme $E(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \alpha^{n-k}$, et l'on suppose que les coefficients a_k sont tels que $E(\alpha) = 0$ admet n racines distinctes strictement positives $\alpha_1\,,\,\alpha_2\,,\,\ldots\,,\,\alpha_n$.

Pour $i = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,n$, on introduit l'opérateur

$$L_i = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \alpha_i \frac{\partial}{\partial t}$$

et l'on note que $\mathcal{A}$ se factorise sous la forme du produit d'opérateurs :

$$\mathcal{A} = L_1\,.\,L_2\,.\ \ldots\ L_n\,.$$

On se donne n fonctions $\varphi_i \in \mathscr{C}_0^{\,2n-2(i-1)}(\overline{\Omega})$, $i = 1, \ldots, n$ et l'on pose le problème :

$$
(\mathrm{P}) \left\{ \begin{array}{ll}
 & \text{Trouver U vérifiant :} \\
(17) & \mathcal{A}\,\mathrm{U} = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\mathrm{T}} \; ; \\
(18) & \dfrac{\partial^{2i-2}}{\partial x^{2i-2}} \mathrm{U}(t,\, 0) = \dfrac{\partial^{2i-2}}{\partial x^{2i-2}} \mathrm{U}(t,\, 1) = 0, \\
 & \text{pour tout } t \in [0,\, \mathrm{T}],\ i = 1, 2, \ldots, n \; ; \\
(19) & \dfrac{\partial^{i-1}}{\partial t^{i-1}} \mathrm{U}(0,\, x) = \varphi_i(x), \quad \text{pour tout } x \in \overline{\Omega}, \\
 & \qquad\qquad i = 1, \ldots, n .
\end{array} \right.
$$

Q. 10 *a.* Noter que si U_i vérifie $\mathrm{L}_i(\mathrm{U}_i) = 0$, alors $\mathrm{U} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{U}_i$ vérifie (17). En déduire une solution du problème (P) sous la forme explicite :

$$
(20) \left\{ \begin{array}{l}
\mathrm{U}(t,\, x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k(t)\, \Phi_k(x) \\
\Lambda_k(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{C}_i \quad e^{-\frac{k^2\pi^2 t}{\alpha_i}} \quad \left[\text{ou } \exp\left(- \dfrac{k^2\pi^2 t}{\alpha_i} \right) \right] \\
\text{où l'on déterminera les } \mathrm{C}_i .
\end{array} \right.
$$

Vérifier que $u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega_{\mathrm{T}})$.

b. Établir que le problème (P) admet une solution et une seule dans $\mathscr{C}^\infty(\Omega_{\mathrm{T}})$.

Q. 11 On se propose d'approcher le problème (P) à l'aide d'une méthode de différences finies.

A cet effet, on se donne deux entiers positifs m et r destinés à tendre vers $+\infty$ et l'on pose :

$$
h = \frac{1}{m}, \qquad l = \frac{\mathrm{T}}{r} .
$$

On définit : $\mathrm{P}_{ik} \in \overline{\Omega}_{\mathrm{T}}$ de coordonnées $(t_i,\, x_k) = (il,\, kh)$

$$
\begin{array}{l} i = 0, 1, \ldots, r \\ k = 0, 1, \ldots, m . \end{array}
$$

On note :

$$
\Omega_{lh} = \{ \mathrm{P}_{ik} \; ; \; i = 1, \ldots r, \; k = 1, \ldots, m-1 \}
$$

$$
\overline{\Omega}_{lh} = \{ \mathrm{P}_{ik} \; ; \; i = 0, 1, \ldots, r, \; k = 0, 1, \ldots, m \}.
$$

On désigne par u_{ik} une approximation de $\mathrm{U}(t_i,\, x_k)$ où U est une solution du problème (P).

On considère l'approximation $\mathcal{A}_{lh}$ de l'opérateur $\mathcal{A}$ définie par :

$$
\mathcal{A}_{lh} = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu a_\nu \frac{\Delta_t^\nu}{l^\nu} \cdot \frac{\delta_x^{2(n-\nu)}}{h^{2(n-\nu)}}
$$

où Δ_t^r et δ_x^{2s} sont les opérateurs de « différences finies » :

$$
\left\{ \begin{array}{l}
\Delta_t^r \; u_{ik} = \displaystyle\sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} u_{i+r-j,\,k}, \quad r = 1, 2, \ldots . \\
\Delta_t^0 \; u_{ik} = u_{ik}, \quad \Delta_t^1 = \Delta_t \\
\delta_x^{2s} \; u_{ik} = \displaystyle\sum_{j=-s}^{+s} (-1)^{j+s} \binom{2s}{j+s} u_{i,\,k+j}, \quad s = 1, 2, \ldots . \\
\delta_x^0 \; u_{ik} = u_{ik}
\end{array} \right.
$$

($\binom{n}{m}$ est le coefficient du binôme C_n^m).

On pose alors le problème approché en dimension finie :

$$
(\mathrm{P}_{l,h}) \left\{ \begin{array}{ll}
(21) & \mathcal{A}_{lh}\, u_{ik} = 0 \qquad \text{dans } \Omega_{lh} \\
(22) & \left\{ \begin{array}{l} u_{i,0} = u_{i,m} = 0 \\ u_{i,-k} = -u_{ik} \\ u_{i,m+k} = -u_{i,m-k}, \\ \quad i = 0, 1, \ldots, r, \qquad k = 1, \ldots, m-1 . \end{array} \right. \\
(23) & \dfrac{\Delta_t^{s-1}}{l^{s-1}} = \varphi_s(x_k) \\
 & \qquad s = 1, \ldots, n, \qquad k = 1, \ldots, m-1
\end{array} \right.
$$

et l'on pose :

$$
\mathscr{L}_j = \frac{\delta_x^2}{h^2} - \alpha_j \frac{\Delta_t}{l}, \quad j = 1, \ldots, n .
$$

Montrer que le problème $(P_{l,h})$ admet une solution unique donnée par :

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} u_{ik} &= \sum_{p=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n} \beta_{pj} (\gamma_{jp})^i \Phi_p(x_k) \\ \gamma_{jp} &= 1 - \frac{4l}{h^2 \alpha_j} \sin^2 \frac{ph\pi}{2} \end{aligned} \right.$$

où les β_{pj} sont à déterminer.

Q. 12 Pour approcher la solution du problème $(P_{l,h})$ on utilise l'algorithme suivant :

On pose $\mathcal{L}_j(u_{ik}^{(n-j)}) = u_{ik}^{(n-j+1)}, \quad j = 1, 2, \dots, n$
avec $u_{ik}^{(n)} = 0$, on prend $u_{ik} = u_{ik}^{(0)}$

et l'on résout alternativement les n problèmes à un pas :

$$(\tilde{P}) \quad j=1, 2, \dots, n \quad \left\{ \begin{aligned} &\mathcal{L}_j(u_{ik}^{(n-j)}) = u_{ik}^{(n-j+1)} \quad \text{dans } \Omega_{l,h} \\ &u_{i,0}^{(n-j)} = u_{i,m}^{(n-j)} = 0, \\ &\qquad\qquad i = j-1, \dots, r-(n-j) \\ &u_{j-1,k}^{(n-j)} = F_{n-j}(x_k), \quad k = 1, \dots, m-1 \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé :

$$(25)\quad F_{n-j}(x_k) = \left\{ \begin{aligned} &\mathcal{L}_{j+1} \dots \mathcal{L}_n(u_{j-1,k}), \text{ si } j = 1, \dots, n-1 \\ &\sum_{\mu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\mu} l^{n-\mu-1} \varphi_{n-\mu}(x_k), \text{ si } j = n. \end{aligned} \right.$$

Introduisant dans $\mathbf{R}^{m-1}$ les vecteurs :

$\vec{U}_s^{(n-j)}$ de composantes $u_{s,k}^{(n-j)}$, $k = 1, \dots, m-1$

$\vec{F}_{(n-j)}$ de composantes $F_{n-j}(x_k)$, $k = 1, \dots, m-1$,

on notera que $(\tilde{P}_j)$ s'écrit sous la forme :

$$(26)\quad \left\{ \begin{aligned} \vec{U}_{i+1}^{(n-j)} &= B_j \vec{U}_i^{(n-j)} - \frac{1}{\alpha_j} \vec{U}_i^{(n-j+1)} \\ \vec{U}_{j-1}^{(n-j)} &= \vec{F}_{(n-j)} \end{aligned} \right.$$

où B_j est une matrice tridiagonale symétrique.

On utilisera les normes

$$\|\vec{u}_i\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant m-1} |u_{ik}|, \quad \|A\|_\infty = \|\{a_{ij}\}\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant m-1} \sum_{j=1}^{m-1} |a_{ij}|.$$

où $\vec{u}_i$ est le vecteur de composantes u_{ik} $k = 1, 2, \dots, m-1$.

a. Montrer que le schéma (26) est stable si, et seulement si, l et h vérifient :

$$(27)\quad l \leqslant \frac{h^2}{\alpha} \quad \text{où } \alpha = \max(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

b. On introduit les vecteurs de $\mathbf{R}^{m-1}$,

$$\vec{\varepsilon}_i \quad i = 1, 2, \dots,$$

de composantes :

$$\{u_{ik} - U(il, hk)\}, \quad k = 1, \dots, m-1$$

et l'on suppose la condition (27) satisfaite.

Montrer que lorsque $\left\{ \begin{aligned} h &\to +0 \\ l &\to +0 \end{aligned} \right.$, $\|\vec{\varepsilon}_i\|_\infty = O(l + h^2)$, $i = 1, \dots,$

Q. 13 *a.* Comment se trouve modifiée (20) lorsque l'équation $E(\alpha) = 0$ admet :

i. Une seule racine d'ordre n : $\alpha = 1$?

ii. ν racines α_j d'ordre n_j, $j = 1, \dots, \nu$, $\sum_{j=1}^{\nu} n_j = n$?

b. Reprendre les questions ***Q. 11***, ***Q. 12*** dans les deux cas considérés en ***Q. 13.-a***.

RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE NUMERIQUE

1. Thème du sujet

Le sujet de cette année portait sur l'étude de l'approximation des solutions de certains problèmes paraboliques d'évolution (méthodes de Fourier — Galerkin et de différences finies). Il attirait l'attention sur d'importantes applications de l'analyse qui sont couramment utilisées pour la résolution de problèmes pratiques dans des disciplines très variées (physique, mécanique, biologie, ...)

2. Observations générales

Comme cela a déjà été signalé dans des rapports antérieurs, cette année encore, la première impression qui se dégage de la lecture des copies est que, pratiquement, aucun candidat n'a la moindre idée des utilisations de l'analyse mathématique, alors que ce sont justement elles qui ont motivé le développement des grandes théories, notamment hilbertiennes.

Fait des plus curieux, pour cette matière optionnelle — sans programme précis il est vrai ! — on a le sentiment que les candidats répugnent à se placer dans des situations concrètes en se désintéressant totalement du moindre calcul, fut-il élémentaire, au profit de bavardages totalement inutiles !

En fait les copies révèlent que la plupart de leurs auteurs n'avait aucune motivation particulière pour l'analyse numérique, plus de la moitié d'entre eux accusant par ailleurs une très grande faiblesse en analyse.

Nous ne pouvons que conseiller à ceux des candidats qui opteront à l'avenir pour cette épreuve de se motiver, en suivant par exemple un cours de maîtrise d'analyse numérique.

3. Observations détaillées

La première partie du problème introduit le cadre fonctionnel des espaces de Sobolev, en dimension d'espace égale à 1, pour rester élémentaire. Elle met en évidence les principales propriétés des Espaces «d'Energie» $\mathrm{H}^1(\Omega)$ en $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ ($\Omega =]0,1[$); le but de cette partie est d'établir que l'opérateur auto-adjoint A_ρ défini par $\mathrm{A}_\rho\, u = \mathrm{D}^2 u + \rho u$ sur $\mathrm{D}(\mathrm{A}_\rho) = \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ possède un inverse continu sur $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et compact.

Bien entendu, aucune connaissance sur la théorie des distributions, les espaces de Sobolev et les opérateurs compacts n'est requise.

Toutes les démonstrations des propriétés demandées sont élémentaires à partir des définitions ou des résultats admis dans l'énoncé; elles ne nécessitent que l'utilisation de la densité d'espaces de fonctions régulières dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, la technique d'intégration par parties, l'inégalité de Schwarz et la théorie du prolongement des applications linéaires continues dans un espace normé.

Les correcteurs ont été très surpris de constater que très peu de candidats savent tirer partie des raisonnements de densité. En particulier la quasi totalité des copies (y compris les meilleures!) montre que la notion de complétion d'un espace normé n'a pas été assimilée.

C'est ainsi que :

— Dans [$Q_1 - a$] la majorité des candidats se contente d'affirmer que $\mathrm{D}^k \varphi = \varphi^{(k)}$, $1 \leqslant k \leqslant m$ pour $\varphi \in \mathcal{C}^m(\bar{\Omega})$.

— Dans [$Q_1 - b$] la presque totalité des solutions commence ainsi :
«Soit $\mu \in \mathrm{H}^m(\Omega)$ complété de $\mathcal{C}^m(\bar{\Omega})$ pour la norme

$$\varphi \mapsto \left(\sum_{j=0}^{m} \|\varphi^{(j)}\|_0^2 \right)^{1/2}$$

alors il existe $\{\mu_n\}_{n \in \mathrm{N}} \in \mathcal{C}^m(\bar{\Omega})$ suite de Cauchy pour cette norme et donc vérifiant :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \mathrm{N}_\epsilon \text{ tel que } n > \mathrm{N}_\epsilon \Rightarrow \sum_{j=0}^{m} \| \mu_m^{(j)} - u^{(j)} \|_0^2 < \epsilon \text{ »}$$

Que signifie donc $\mu^{(j)}$ pour $\mu \in \mathrm{H}^m(\Omega)$?

— Dans [Q_2] une multitude de candidats trouve dans l'inégalité (2), une constante C_0 dépendant de φ !
Trop peu se donnent la peine de montrer que l'injection de $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \to \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ se prolonge en une injection de $\mathrm{H}^1(\Omega) \to \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$

L'inégalité (3) a arrêté bon nombre de candidats ; il suffisait pourtant de noter que pour tout $\mu \in \mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega})$ on a :

$$x \in]0,1[\qquad \mu(x) = \int_0^x \mu'(\sigma)\, d\sigma$$

l'inégalité de Schwarz conduisant au résultat pour les fonctions de $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$: la densité de cet espace dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ permettait d'achever la démonstration de cette inégalité.

Notons cependant que les questions $Q_3 - Q_4 - Q_5$ ont été généralement assez bien traitées lorsqu'elles ont été abordées.

La deuxième partie étudiait une formulation faible du problème de la «Chaleur» en dimension d'espace 1 par la méthode de Fourrier—Galerkin.

Pour cela le but de la question [Q_6] était d'établir que les factions propres $\{\Phi_n : x \to \sqrt{2} \sin n\pi x\}$ de l'opérateur A_0 («Laplacien à une dimension») formait une base hilbertienne de $L^2(\,]0,\ 1[\,)$, ce qui résulte du fait (cf. Q_5) que A_0^{-1} est continue sur $L^2(\Omega)$ autoadjoint et compact

Après avoir donné la définition des opérateurs compacts (de classe (K) dans le texte) et autoadjoints dans un espace de Hilbert, on demandait, afin d'alléger la tâche des candidats, d'admettre une propriété classique des opérateurs autoadjoints compacts dont l'énoncé s'est trouvé, dans la rédaction définitive du sujet, entaché d'un lapsus qui n'a gêné personne, (deux candidats ont d'ailleurs rectifié d'eux-mêmes).

Il convient donc de lire :

«Soit $\mathcal{A}$ autoadjoint de classe (K). Si F est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$, stable pour $\mathcal{A}$ et différent de $\mathcal{A}^{-1}\{0\}$, alors la restriction de $\mathcal{A}$ à F admet un vecteur propre dans F relatif à une valeur propre non nulle !

[$Q_6 - a$] a donc été bien traitée lorsqu'elle a été abordée ; mais il n'en a pas été de même de l'application [$Q_6 - b$].

Il s'agissait pourtant de se rendre compte que Φ_n était donnée par l'équation différentielle linéaire du second ordre à cœfficients constants $y'' - \lambda y = 0$ avec les conditions aux limites $y(0) = y(1) = 0$.

Il est inquiétant de constater que le résultat exact ne se trouve que dans une infime minorité de copies !

Les questions Q_7 à Q_9 ont été abordées avec des fortunes diverses uniquement dans les meilleures copies. Aucune parmi elles ne traite de manière très satisfaisante la question [Q_9] un peu plus délicate.

La troisième partie proposait l'approximation par une méthode de discrétisation (différences finies) d'un problème de type parabolique dont on obtenait d'abord une représentation explicite de la solution, l'opérateur $\mathcal{A}$ se factorisant en produit d'opérateurs du type étudiée dans II.

Aucune copie n'a sans doute par manque de temps, abordé sérieusement cette partie qui a ainsi été pratiquement exclue du barème.

4. Les notes (sur 40)

Nombre de copies corrigées : 1064

Moyenne : 7,42

100 copies ont atteint la moyenne ; plus de la moitié des notes sont inférieures à 4.

Répartition des notes :

0 à 4	5 à 9	10 à 14	15 à 19	20 à 24	25 à 29	30 à 34	35 à 40
541	204	138	81	46	28	17	9

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

N. B. — *Ce problème comprend trois parties; l'étude de chacune d'elles est indépendante des deux autres.*

I

On se propose d'étudier le mouvement d'un solide rigide S suspendu par l'un de ses points O, fixe dans un repère galiléen qu'on pourra rapporter au système orthonormé O*xyz*, et soumis à des forces dont le moment en O est représenté par :

$$\vec{\mathfrak{M}} = \mathrm{A}f(t)\vec{\xi} + \mathrm{A}g(t)\vec{\eta} + \mathrm{C}h(t)\vec{\zeta}$$

où $\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\zeta}$ sont les vecteurs formant système orthonormé, portés par les axes principaux d'inertie de S en O et liés à S ; A, A, C les moments d'inertie correspondants; $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ des fonctions données du temps t, localement intégrables.

1° Écrire les équations du mouvement et montrer qu'avec les notations : $\vec{\omega} = p\vec{\xi} + q\vec{\eta} + r\vec{\zeta}$, vecteur rotation instantanée de S par rapport au repère O*xyz*, $p + iq = \pi$, $f + ig = \theta$, i désignant l'unité complexe ($i^2 = -1$), $\alpha = \dfrac{\mathrm{A} - \mathrm{C}}{\mathrm{A}}$, on est conduit au système différentiel :

$$(1) \qquad \frac{dr}{dt} = h(t), \qquad \frac{d\pi}{dt} + i\alpha r\pi = \theta(t).$$

2° Expliciter la solution du système (1) qui, pour $t = t_0$, prend la valeur $r = r_0$, $\pi = \pi_0$.

Examiner le cas où f, g, h sont constants.

3° On suppose désormais, dans la suite de cette partie I du problème, que le solide S, outre les forces déjà considérées, est soumis à des forces d'amortissement de type visqueux dont le moment en O peut être représenté par :

$$-\nu \mathrm{A}p\vec{\xi} - \nu \mathrm{A}q\vec{\eta} - \mu \mathrm{C}r\vec{\zeta}$$

ν et μ désignant des constantes positives.

Écrire le système différentiel (2) auquel obéissent r et π. On suppose f, g, h constants; montrer qu'il existe une solution stationnaire; quelle est, dans ce cas, la nature du mouvement du solide par rapport aux axes de référence ?

Exprimer la solution de (2) pour des conditions initiales quelconques; montrer qu'elle tend vers la solution stationnaire quand t tend vers $+\infty$.

4° Supposant que $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ sont des fonctions définies pour tout t réel, localement intégrables, et bornées, expliciter la solution de (2), définie pour $t \geqslant t_0$, qui, pour $t = t_0$, prend la valeur (r_0, π_0), et qu'on notera :

$$r(t\,;\, t_0, r_0, \pi_0), \quad \pi(t\,;\, t_0, r_0, \pi_0)$$

Montrer que :

$$\tilde{r}(t) = \lim_{t_0 \to -\infty} r(t\,;\, t_0, r_0, \pi_0)$$

$$\tilde{\pi}(t) = \lim_{t_0 \to -\infty} \pi(t\,;\, t_0, r_0, \pi_0)$$

existent, sont indépendantes de r_0, π_0, et constituent une solution de (2), définie et bornée sur la droite réelle $(-\infty, +\infty)$.

Établir l'unicité de la solution ayant ces caractères.

5° Établir que :

$$\lim_{t \to +\infty} |r(t\,;\, t_0, r_0, \pi_0) - \tilde{r}(t)| = 0$$

$$\lim_{t \to +\infty} |\pi(t\,;\, t_0, r_0, \pi_0| - \tilde{\pi}(t)| = 0$$

pour des conditions initiales t_0, r_0, π_0 quelconques; quelle est l'interprétation mécanique de ce résultat ?

6° Notant $\mathrm{E_R}$, $\mathrm{E_C}$ l'espace vectoriel des fonctions $u(t)$ à valeurs réelles, complexes respectivement, définies et bornées sur la droite réelle, normé par $\| u \| = \sup\limits_t | u(t) |$, on considère l'application de $(\mathrm{E_R})^3$ dans $(\mathrm{E_C})^2$ qui à tout élément $(f, g, h) \in (\mathrm{E_R})^3$ associe $(\tilde{r}, \tilde{\pi}) \in (\mathrm{E_C})^2$, où $\tilde{r}(t)$, $\tilde{\pi}(t)$ est la solution bornée de (2) mise en évidence au § 4°.

Établir que cette application est continue; quelle est la signification mécanique de cette propriété ?

Montrer que ce résultat demeure vrai quand on considère

$$(f, g, h) \longrightarrow (\tilde{r}, \tilde{\pi})$$

comme une application de $(\mathrm{F_R})^3$ dans $(\mathrm{E_C})^2$, où $\mathrm{F_R}$ est l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles $u(t)$, définies et intégrables sur la droite réelle, normé par

$$\| u \| = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(s)| ds.$$

7° On suppose que f, g, h sont des fonctions périodiques de t, de même période T, localement intégrables et bornées.

Montrer que la solution $\tilde{r}(t)$, $\tilde{\pi}(t)$ prévue au § 4° est périodique de période T.

Montrer que, si l'excitation périodique (f, g, h) prend naissance à partir d'un instant t_0, la solution $r(t; t_0, r_0, \pi_0)$, $\pi(t; t_0, r_0, \pi_0)$ du système (2) tend asymptotiquement, quand t tend vers $+\infty$, vers une solution périodique, c'est-à-dire que toute solution est asymptotiquement périodique.

8° Une fonction $v(t)$ sera dite quasi périodique réelle, complexe, si elle peut être définie par $v(t) = \mathrm{V}(t, \ldots, t, \ldots, t)$ où $\mathrm{V}(t_1, t_2 \ldots, t_m)$ est fonction continue à valeurs réelles, complexes respectivement, de m variables réelles indépendantes $t_1, t_2, \ldots, t_m$, périodique par rapport à chacune d'elles, de périodes $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \ldots, \mathrm{T}_m$, c'est-à-dire : $\mathrm{V}(t_1, t_2, \ldots, t_j + \mathrm{T}_j, \ldots, t_m) = \mathrm{V}(t_1, t_2, \ldots, t_j, \ldots, t_m)$, $\forall\, t_1, t_2, \ldots, t_m$.

De cette définition il résulte, en particulier, que toute fonction quasi périodique $v(t)$ est continue et bornée.

On suppose que $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ sont fonctions quasi périodiques réelles de t; montrer que la solution $(\tilde{r}, \tilde{\pi})$ du système (2) est quasi périodique et a les mêmes périodes fondamentales.

Montrer que toute solution de (2) est asymptotiquement quasi périodique quand t tend vers $+\infty$.

Soit $\mathrm{G_R}$, $\mathrm{G_C}$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions $v(t)$ quasi périodiques réelles, complexes respectivement, et leurs limites uniformes sur la droite réelle.

Montrer que si $(f, g, h) \in (\mathrm{G_R})^3$, la solution $(\tilde{r}, \tilde{\pi})$ prévue au § 4° appartient à $(\mathrm{G_C})^2$.

II

1° Considérant de nouveau le système étudié dans la partie I, l'on modifie les notations de sorte que ξ_1, ξ_2, ξ_3 désignent désormais le système orthonormé d'axes principaux d'inertie en O liés à S; x_1, x_2, x_3 sont les axes orthonormés du système galiléen de référence, et

$$\vec{\omega} = p_1 \vec{\xi}_1 + p_2 \vec{\xi}_2 + p_3 \vec{\xi}_3$$

est la rotation instantanée du solide par rapport à $\mathrm{O}x_1 x_2 x_3$.

Avec $c_{ij} = \cos(\vec{\xi}_i, \vec{x}_j)$, tels que $\vec{\xi}_i = \sum_{1 \leq j \leq 3} c_{ij} \vec{x}_j$, montrer que $\mathrm{X} = \{ c_{ij} \}$, matrice carrée $\{ 3 \times 3 \}$ d'éléments c_{ij}, est solution d'une équation différentielle

$$\frac{d\mathrm{X}}{dt} = \Omega(t)\,\mathrm{X} \tag{3}$$

où $\Omega(t) = \{ \omega_{ij}(t) \}$ est la matrice carrée $\{ 3 \times 3 \}$, d'éléments

$$\omega_{ij} = \sum_{1 \leq k \leq 3} \varepsilon_{ijk}\, p_k ,$$

avec $\varepsilon_{ijk} = +1, -1$ si (i, j, k) est une permutation paire, impaire respectivement de (1, 2, 3), et $\varepsilon_{ijk} = 0$ si (i, j, k) n'est pas une permutation de (1, 2, 3). On supposera que les fonctions p_j ont été calculées comme indiqué dans la partie I, de sorte que $\Omega(t)$ est une fonction continue de t, supposée connue.

Par le théorème d'existence et d'unicité pour une équation différentielle linéaire, justifier que l'équation (3) et la condition initiale

$$\mathrm{X}(0) = \mathrm{I}, \quad \mathrm{I} \text{ matrice identité,} \tag{4}$$

définissent de manière unique la matrice $\mathrm{X}(t)$.

Observant que $\Omega + \Omega^{\mathrm{tr}} = 0$ (Ω^{tr} matrice transposée de Ω), montrer que la solution unique de (3), (4) satisfait à $\mathrm{X}.\mathrm{X}^{\mathrm{tr}} = \mathrm{X}^{\mathrm{tr}}\mathrm{X} = \mathrm{I}$, $\forall\, t$ réel.

On suppose désormais dans ce paragraphe que $\Omega(t)$ est périodique en t de période T. Établir que :

$\mathrm{X}(t + \mathrm{T}) = \mathrm{X}(t).\mathrm{X}(\mathrm{T})$, et qu'il existe une matrice constante K, d'éléments réels ou complexes, inversible, telle que :

$$\mathrm{K}^{-1}.\mathrm{X}(\mathrm{T}).\mathrm{K} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\lambda\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\lambda\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

avec λ réel, $\varepsilon = \pm 1$.

En déduire, pour $\mathrm{X}(t)$, la représentation $\mathrm{X}(t) = \mathrm{Q}(t)\,\mathrm{Y}(t)$ où $\mathrm{Q}(t)$ est une matrice périodique de période T et

$$\mathrm{Y}(t) = \mathrm{K}.\begin{pmatrix} \gamma(t) & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\lambda t} \end{pmatrix}.\mathrm{K}^{-1}$$

avec $\gamma(t) = \exp\left\{ i(1-\varepsilon)\frac{\pi t}{2T} \right\}$, $(i^2 = -1)$.

Quelle est l'interprétation mécanique de ce résultat ?

2° On suppose le corps solide S muni d'une cavité U, de frontière ∂U, assez régulière pour garantir la validité, pour toute fonction vectorielle $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \to (f_1, f_2, f_3) = \vec{f}$, continûment différentiable dans U, de la formule :

$$\int_U \sum_{1 \leqslant j \leqslant 3} \frac{\partial f_j}{\partial \xi_j} d\xi = \int_{\partial U} \vec{n}.\vec{f} d\sigma$$

où $d\xi$, $d\sigma$ désignent respectivement l'élément de volume dans U, l'élément d'aire sur ∂U, et $\vec{n}$ est le vecteur unité normal à ∂U au point courant et dirigé vers l'extérieur de U.

Les coordonnées ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont relatives à un repère orthonormé $O\xi_1\xi_2\xi_3$ lié au corps solide et dont le mouvement par rapport à $Ox_1x_2x_3$ est supposé connu.

On suppose que la cavité U est totalement remplie d'un liquide homogène de densité ρ et l'on admet que la vitesse $\vec{v}$, relativement à $Ox_1x_2x_3$, de la particule fluide qui à l'instant t se trouve au point M de coordonnées $x_1x_2x_3$ peut être représentée par :

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\vec{x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\vec{x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\vec{x_3},$$

le potentiel $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ satisfaisant en tout point $M \in U$ à l'équation :

$$(5) \qquad \Delta_x \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0 ;$$

en outre il y a glissement du fluide sur la paroi ∂U, c'est-à-dire que :

$$(6) \qquad \frac{d\varphi}{dn} = \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\right).\vec{n}, \quad \forall\, M \in \partial U$$

avec $\frac{d\varphi}{dn} = \vec{n}.\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{\omega}$ rotation instantanée de S.

a. Établir qu'il existe, pour chaque instant t, au plus une solution φ du système (5), (6); on admettra dans la suite qu'il y a existence.

b. Justifier que la solution unique de (5), (6) satisfait dans U à l'équation :

$$\Delta_\xi \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_3^2} = 0$$

où φ est exprimé à l'aide des variables ξ_1, ξ_2, ξ_3, t,

via $\xi_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant 3} c_{ij}(t) x_j$, étant rappelé que les coefficients $c_{ij}(t)$ sont des fonctions connues de t.

Avec $\vec{\omega} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant 3} p_j \vec{\xi_j}$, montrer que φ peut être représentée dans U par :

$$\varphi = \vec{\omega}.\vec{\psi} = p_1\psi_1 + p_2\psi_2 + p_3\psi_3$$

où la fonction vectorielle $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \to (\psi_1, \psi_2, \psi_3) = \vec{\psi}$ ne dépend que des variables ξ_1, ξ_2, ξ_3 et est définie uniquement par :

$$\Delta_\xi \psi_j = 0, \quad \forall\, M \in U, \quad j = 1, 2, 3$$

$$\frac{d\psi_j}{dn} = \left(\vec{r} \wedge \vec{n}\right).\vec{\xi_j}, \quad \forall\, M \in \partial U, \quad j = 1, 2, 3,$$

avec $\frac{d\psi_j}{dn} = \vec{n}.\overrightarrow{\text{grad}}\,\psi_j$.

c. Montrer que les potentiels ψ_j définis à l'alinéa précédent sont tels que :

$$\int_{\partial U} \psi_i . \frac{d\psi_j}{dn} d\sigma = \int_{\partial U} \psi_j . \frac{d\psi_i}{dn} d\sigma, \quad \forall\, i, j.$$

d. Calculer le moment cinétique en O du liquide enfermé dans U dans son mouvement par rapport à $Ox_1x_2x_3$, c'est-à-dire :

$$\vec{H} = \rho \int_U \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi\, d\xi$$

et montrer que :

$$\vec{H}.\vec{\xi_i} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant 3} I_{ij} p_j$$

avec :

$$\mathrm{I}_{ij} = \frac{\rho}{2} \int_{\partial \mathrm{U}} \left(\psi_i \frac{d\psi_j}{dn} + \psi_j \frac{d\psi_i}{dn} \right) d\sigma \ .$$

Calculer l'énergie cinétique du liquide par rapport à $Ox_1x_2x_3$, soit :

$$2\,\mathrm{T} = \rho \int_{\mathrm{U}} \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \varphi \right)^2 d\xi$$

et établir que :

$$2\,\mathrm{T} = \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant 3} \mathrm{I}_{ij} p_i p_j \ .$$

Ainsi, du point de vue dynamique, le liquide enfermé dans U se comporte comme un corps solide dont le tenseur d'inertie relativement aux axes $\vec{\xi}_i$ est I_{ij}, et la rotation est $\vec{\omega}$.

e. Notant $\vec{u}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$ la vitesse, relativement aux axes $O\xi_1\xi_2\xi_3$, de la particule fluide qui à l'instant t se trouve en ξ_1, ξ_2, ξ_3, justifier les formules :

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \varphi - \vec{u} \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leqslant i \leqslant 3} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_i} = 0 \ , \quad \forall\ \mathrm{M} \in \mathrm{U}$$

avec u_i composante de $\vec{u}$ sur $\vec{\xi}_i$.

En déduire que :

$$\rho \int \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r} \right)^2 d\xi > \rho \int \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \varphi \right)^2 d\xi \ .$$

Quelle est l'interprétation mécanique de cette inégalité ?

III

On considère de nouveau un solide rigide S suspendu par l'un de ses points O, fixe dans le repère galiléen rapporté au système orthonormé $Oxyz$, et soumis à des forces dont le mouvement en O est représenté par :

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}} = (\mathrm{A}m + \mathrm{A}\mu\omega^2)\,\vec{\xi}$$

où $\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\zeta}$ sont les vecteurs unité portés par les axes principaux d'inertie de S en O, A, B, C désignant les moments d'inertie correspondants, tels que $\mathrm{A} > \mathrm{B} > \mathrm{C}$, m et μ sont des constantes positives, et ω est la mesure du vecteur rotation instantanée $\vec{\omega}$ de S par rapport à $Oxyz$, qu'on pourra représenter dans ce qui suit par :

$$\vec{\omega} = p\vec{\xi} + q\vec{\eta} + r\vec{\zeta} \ .$$

1° Utilisant les notations $a = \dfrac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{A}}$, $b = \dfrac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{\mathrm{B}}$, $c = \dfrac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{C}}$,

écrire le système différentiel auquel obéit (p, q, r). Introduisant la variable φ définie par $d\varphi = pdt$ montrer qu'on peut exprimer q et r en fonction de φ sous la forme :

$$q = \delta\sqrt{b}\ \cos\ \left(\sqrt{bc}\,.\,\varphi + \sigma_0\right)$$
$$r = \delta\sqrt{c}\ \sin\ \left(\sqrt{bc}\,.\,\varphi + \sigma_0\right)$$

δ et σ_0 désignant des constantes d'intégration.

2° Étudier le mouvement dans le cas où $\delta = 0$.

3° On suppose désormais $\delta \neq 0$; écrire l'équation différentielle du second ordre qui régit la fonction $\varphi(t)$.

4° Par une suite de transformations simples qu'on explicitera, on peut transformer l'équation obtenue à l'alinéa précédent en :

$$\text{(7)} \qquad \frac{d^2\theta}{d\tau^2} - \mu_1 \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 = k + \sin\theta$$

avec $\theta = 2\sqrt{bc}\,.\,\varphi + 2\,\sigma_0 + 2\,\sigma_1$, $\quad \tau = \sqrt{2\mathrm{D}\sqrt{bc}}\,.\,t$, $\quad \mu_1 = \dfrac{\mu}{2\sqrt{bc}}$

$$\mathrm{tg}\ 2\sigma_1 = \mu \frac{b-c}{a\sqrt{bc}} \ , \quad \mathrm{D} = \frac{\delta^2}{2} \left[\mu^2 (b-c)^2 + bca^2 \right]^{1/2}$$

$$k = \frac{m}{\mathrm{D}} + \mu \frac{\delta^2 (b+c)}{2\,\mathrm{D}} \ .$$

5° Écrire l'équation différentielle linéaire du 1er ordre à laquelle satisfait $u = \left(\dfrac{d\theta}{d\tau} \right)^2$, considérée comme fonction de θ. Exprimer la solution générale de cette équation.

Déterminer les solutions stationnaires de (7); en exprimer les conditions d'existence et de stabilité (en particulier on précisera une condition d'existence indépendante des conditions initiales de q et r).

Établir l'existence de solutions périodiques; calculer les périodes.

6° Montrer que l'étude des mouvements voisins de celui qui correspond à une solution stationnaire stable revient à rechercher les solutions périodiques d'une équation différentielle :

$$\frac{d^2\chi}{d\tau^2} + \omega_0^2\chi = \mu_1\left(\frac{d\chi}{d\tau}\right)^2 + F(\chi) \tag{8}$$

où $F(\chi)$ est fonction holomorphe de χ dans un voisinage de 0, et peut être représentée par la série convergente :

$$F(\chi) = \beta_2\chi^2 + \beta_3\chi^3 + \dots$$

Interpréter ω_0, β_2, β_3 au moyen de θ_0, valeur stationnaire de θ.

On cherche à représenter les solutions périodiques de (8) en fonction d'un paramètre λ tel que :

$$\chi(0) = \lambda\,, \quad \frac{d\chi}{d\tau}(0) = 0\,. \tag{9}$$

Dire pourquoi les conditions (9) ne sont pas incompatibles et expliquer la signification de λ, paramètre qui mesure en quelque sorte l'amplitude du mouvement périodique.

On s'attend que la période du mouvement, inconnue *a priori*, dépende de λ; c'est pourquoi on fait dans (8) le changement de variable $\tau \to s$ défini par :

$$\tau = \frac{s}{\omega_0}(1 + h_1\lambda + h_2\lambda^2 + \dots) \tag{10}$$

où h_1, h_2, ... sont des quantités numériques qu'on précisera ultérieurement.

On écrira l'équation transformée de (8) par (10) et on en cherchera des solutions représentables par la série :

$$\chi = \lambda\cos s + \lambda^2\chi_2(s) + \lambda^3\chi_3(s) + \dots + \lambda^j\chi_j(s) + \dots$$

où $\chi_2(s)$, $\chi_3(s)$, ..., $\chi_j(s)$, ... sont périodiques de période 2π et satisfont aux conditions initiales : $\chi_j(0) = \dfrac{d\chi_j(0)}{ds} = 0$.

Écrire l'équation vérifiée par $\chi_2(s)$; montrer que cette équation ne peut admettre de solution périodique de période 2π que si h_1 est convenablement choisi; déterminer $\chi_2(s)$.

Écrire ensuite l'équation vérifiée par $\chi_3(s)$; on montrera que h_2 est déterminé par la condition d'existence de solution périodique; expliciter $\chi_3(s)$.

Indiquer comment l'on pourrait calculer successivement h_3, ... et χ_4, ..., etc.

RAPPORT SUR L'EPREUVE DE MECANIQUE GENERALE

1. Thème du sujet

L'orientation d'un véhicule spatial par rapport aux étoiles est, on le sait, commandée par la mise en œuvre de moteurs fusée qui, solidaires du véhicule, exercent sur celui-ci et relativement à des axes liés, des efforts connus en fonction du temps. Inspiré très schématiquement de ce problème de mécanique spatiale, le texte proposait à l'attention des candidats l'étude de certaines propriétés du mouvement autour de son centre d'inertie d'un corps solide ou d'un système solide liquide, soumis à des forces données par référence à celui-ci.

2. Solution du problème

I

1 — Les équations d'Euler du mouvement deviennent, avec les notations du texte :

$$\frac{dr}{dt} = h(t)\,, \quad \frac{d\pi}{dt} + i\alpha r\pi = \theta(t) \tag{1}$$

2 — On a $r(t) = r_0 + \int_{t_0}^{t} h(s)\,ds$, puis $\dfrac{d\pi}{dt} + i\alpha r(t)\pi = \theta(t)$,

équation linéaire qu'on intègre par la méthode usuelle, d'où :

$$\pi(t) = \left\{\pi_0 + \int_{t_0}^{t} \exp\left[i\alpha\int_{t_0}^{\tau} r(s)\,ds\right].\theta(\tau)\,d\tau\right\} \exp\left[-i\alpha\int_{t_0}^{t} r(s)\,ds\right]$$

3 — Dans le cas de l'amortissement visqueux, les équations du mouvement sont :

$$\frac{dp}{dt} - \alpha q r = f(t) - \nu p \qquad \mu, \nu > 0 \tag{2}$$

$$\frac{dq}{dt} + \alpha r p = g(t) - \nu q \tag{3}$$

$$\frac{dr}{dt} = h(t) - \mu r \tag{4}$$

Cas où f, g, h sont constants : le système (2), (3), (4) a une solution stationnaire unique définie par :

$$\nu p - \alpha q r = f, \ \nu q + \alpha p r = g, \ \mu r = h.$$

Si les valeurs initiales de p, q, r sont prises égales à la solution de ce système, la rotation du solide demeurera constante par rapport aux axes liés et, par conséquent, le sera aussi par rapport aux axes de référence.

Le mouvement sera dans ce cas une rotation uniforme autour d'un axe de direction invariable.

Cas de conditions initiales quelconques : la solution s'écrit :

$$r(t) = e^{-\mu(t-t_0)} r_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\mu(t-s)} h\, ds \tag{5}$$

$$\pi(t) = \left\{ \pi_0 + \int_{t_0}^{t} \theta \exp\left[\int_{t_0}^{\tau} (\nu + i\alpha r(s))\, ds\right] d\tau \right\} \exp\left[-\int_{t_0}^{t} (\nu + i\alpha r(s)\, ds)\right]$$

On peut vérifier à partir de ces formules que $r(t)$ et $\pi(t)$ ont pour limites quand $t \to +\infty$, $\dfrac{h}{\mu}$ et $\dfrac{\theta\mu}{\mu\nu + i\alpha h}$ respectivement.

4 — Dans le cas où $f(t), g(t), h(t)$ sont localement intégrables on obtient :

$$r(t) = r(t\,;t_0, r_0, \pi_0) = e^{-\mu(t-t_0)} r_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\mu(t-s)} h(s)\, ds \tag{6}$$

$$\pi(t) = \pi(t\,;t_0, r_0, \pi_0) = \left\{ \pi_0 + \int_{t_0}^{t} \theta(\tau) \exp\left[\int_{t_0}^{\tau} (\nu + i\alpha r(s))\, ds\right] d\tau \right\} \exp\left[-\int_{t_0}^{t} (\nu + i\alpha r(s)) ds\right]$$

ou

$$\pi(t) = \pi_0 \exp\left[-\int_{t_0}^{t} (\nu + i\alpha r(s)) ds\right] + \int_{t_0}^{t} \theta(\tau) \exp\left[-\int_{\tau}^{t} (\nu + i\alpha r(s)) ds\right] d\tau \tag{7}$$

Faisant tendre t_0 vers $-\infty$, on obtient formellement :

$$\bar{r}(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\mu(t-s)} h(s)\, ds \tag{8}$$

$$\bar{\pi}(t) = \int_{-\infty}^{t} \theta(\tau) \exp\left[-\int_{\tau}^{t} (\nu + i\alpha \bar{r}(s)) ds\right] d\tau \tag{9}$$

On justifie ces résultats dans le cas où $h(t), \theta(t)$ sont bornées sur la droite réelle, en notant que

$$\int_{t_0}^{t_1} \theta(\tau) \exp\left[-\int_{\tau}^{t} (\nu + i\alpha r(s)) ds\right] d\tau, \int_{-\infty}^{t_1} \theta(\tau) \exp\left[-\int_{\tau}^{t} (\nu + i\alpha \bar{r}(s)) ds\right] d\tau,$$

majorés par $\|\theta\| \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} e^{-\nu(t-\tau)} d\tau$, $\|\theta\| \displaystyle\int_{-\infty}^{t_1} e^{-\nu(t-\tau)} d\tau$

avec $\|\theta\| : \sup\limits_{s \in \mathbf{R}} |\theta(s)|$, peuvent être rendus arbitrairement petits pour tout t_0 tel que $t_0 \leqslant t_1 < t$, avec t_1 convenablement choisi, et que, de l'estimation

$$|r(s) - \bar{r}(s)| \leqslant (|r_0| + \mu^{-1} \|h\|) e^{-\mu(s-t_0)}, \ s \geqslant t_0 \tag{10}$$

l'on peut conclure que $r(s) - \bar{\pi}(s)$ tend vers 0 quand $t_0 \to -\infty$, uniformément par rapport à s appartenant à tout intervalle compact.

On vérifie facilement que $\bar{r}(t), \bar{\pi}(t)$ définis par (8), (9) sont bornées sur la droite réelle et solution de (2), (3), (4). Il y a unicité d'une telle solution ainsi qu'on le voit en raisonnant d'abord sur (2) puis sur (3), (4).

5.— Il est évident que $\lim\limits_{t \to +\infty} |r(t) - \bar{r}(t)| = 0$. Il s'agit ensuite de comparer $\pi(t)$ et $\bar{\pi}(t)$.

Notant que :

$$\left|\int_{-\infty}^{t_0} \theta(\tau) \exp\left[\int_{\tau}^{t} (\nu + i\alpha \bar{r}(s)) ds\right] d\tau\right| \leqslant \|\theta\| \int_{-\infty}^{t_0} e^{-\nu(t-\tau)} d\tau = \frac{\|\theta\|}{\nu} e^{-\nu(t-t_0)}$$

tend vers 0 quand $t \to +\infty$, l'on voit qu'il est suffisant d'établir que :

$$\int_{-\infty}^{t} \theta(\tau) \left\{ \exp\left[-\int_{\tau}^{t} (\nu + i\alpha r(s))ds\right] - \exp\left[-\int_{\tau}^{t} (\nu + i\alpha \bar{r}(s))ds\right] \right\} d\tau$$

tend vers 0 quand $t \to +\infty$. Or cette différence est majorée par :

$$2 \|\theta\| \int_{-\infty}^{t} e^{-\nu(t-\tau)} \sin\left[\frac{\alpha}{2} \int_{\tau}^{t} (r(s) - \bar{r}(s))\, ds\right] d\tau$$

$$= 2 \|\theta\| \int_{0}^{+\infty} e^{-\nu\sigma} \sin\left[\frac{\alpha}{2} \int_{t-\sigma}^{t} (r(s) - \bar{r}(s))\, ds\right] d\sigma$$

expression qui tend vers 0 quand $t \to +\infty$, car l'intégrale intérieure tend vers 0 quand $t \to +\infty$, uniformément par rapport à σ appartenant à tout intervalle compact, en raison de (10).

6 — Stabilité de la solution bornée relativement au moment *(f, g, h)*

Soient $(\bar{r}, \bar{\pi})$, $(\bar{r}_1, \bar{\pi}_1)$ les solutions bornées qui correspondent aux données (f, g, h), (f_1, g_1, h_1). De (8) on déduit :

$$|\bar{r} - \bar{r}_1| = \left|\int_{-\infty}^{t} e^{-\mu(t-s)} (h(s) - h_1(s))ds\right| < \frac{1}{\mu} \operatorname{Sup}_s |h(s) - h_1(s)|$$

d'où : $\|\bar{r} - \bar{r}_1\| \leqslant \frac{1}{\mu} \|h - h_1\|$, et de (9) :

$$\bar{\pi} - \bar{\pi}_1 = \int_{-\infty}^{t} (\theta - \theta_1) \exp\left[-\int_{\tau}^{t} (\nu + i\alpha\bar{r}(s))\, ds\right] d\tau$$

$$+ \int_{-\infty}^{t} \theta_1 \left\{ \exp\left[-\int_{\tau}^{t} (\nu + i\alpha\bar{r}(s))\, ds\right] - \exp\left[-\int_{\tau}^{t} (\nu + i\alpha\bar{r}_1(s))\, ds\right] \right\} d\tau$$

d'où :

$$|\bar{\pi}(t) - \bar{\pi}_1(t)| \leqslant \int_{-\infty}^{t} |\theta(\tau) - \theta_1(\tau)| \exp[-\nu(t-\tau)]\, d\tau$$

$$+ \int_{-\infty}^{t} |\theta_1(\tau)| \, |\exp[-\nu(t-\tau)]| \, \left|\exp\left(-\int_{\tau}^{t} i\alpha\bar{r}(s)\, ds\right) - \exp\left(-\int_{\tau}^{t} i\alpha\bar{r}_1(s)\, ds\right)\right| d\tau$$

Compte tenu de $|e^{i\epsilon} - 1| < |\epsilon|$, ϵ réel, il vient :

$$\|\bar{\pi} - \bar{\pi}_1\| \leqslant \frac{1}{\nu} \|\theta - \theta_1\| + 2 \int_{-\infty}^{t-l} |\theta_1(\tau)| e^{-\nu(t-\tau)} d\tau + \alpha l \int_{t-l}^{t} |\theta_1(\tau)| d\tau . \|\bar{r} - \bar{r}_1\| \tag{11}$$

ou :

$$\|\bar{\pi} - \bar{\pi}_1\| \leqslant \frac{1}{\nu} \|\theta - \theta_1\| + \frac{2}{\nu} e^{-\nu l} \|\theta_1\| + \alpha l^2 \|\theta_1\| \|\bar{r} - \bar{r}_1\|$$

formule d'après laquelle s'établit aisément la propriété de continuité.

On considère maintenant le cas où f, g, h sont telles que

$$|||f||| = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(s)|\, ds < +\infty \quad \text{etc.}$$

Il convient de remarquer que les formules (8), (9) ont un sens et définissent une solution de (2), (3), (4) bornée sur la droite réelle.

Partant de (8) on a :

$$|\bar{r} - \bar{r}_1| = \left|\int_{-\infty}^{t} e^{-\mu(t-s)} (h(s) - h_1(s))ds\right| < \int_{+\infty}^{+\infty} |h(s) - h_1(s)|\, ds = |||h - h_1|||$$

d'où : $\|\bar{r} - \bar{r}_1\| \leqslant |||h - h_1|||$

et de (9) l'on obtient, en suivant le raisonnement qui a conduit à (11) :

$$\|\bar{\pi} - \bar{\pi}_1\| \leqslant |||\theta - \theta_1||| + 2e^{-\nu l} |||\theta_1||| + \alpha l\, |||\theta_1||| \cdot \|\bar{r} - \bar{r}_1\|$$

d'où la conclusion.

7 — On peut représenter

$$\bar{r}(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{\mu\sigma} h(t+\sigma)\, d\sigma \tag{12}$$

$$\bar{\pi}(t) = \int_{-\infty}^{0} \theta(t+\sigma) \exp\left[-\int_{\sigma}^{0} (\nu + i\alpha\bar{r}(t+s))\, ds\right] d\sigma$$

d'où il suit que si h et θ sont périodiques en t de période T, $\bar{r}(t)$ et $\bar{\pi}(t)$ seront aussi périodiques de même période.

Il est clair que si l'excitation périodique prend naissance à partir d'un instant t_0, la solution $r(t\,;t_0, r_0, \pi_0)$, $\pi(t\,;t_0, r_0, \pi_0)$ du système (2), (3), (4) tend, lorsque $t \to +\infty$, d'après les conclusions antérieures, vers la solution $\tilde{r}(t)$, $\tilde{\pi}(t)$ du même système, qu'on peut définir après qu'on a prolongé dans le sens des t négatifs, par périodicité, les termes qui définissent l'excitation c'est-à-dire h et θ.

8.– Si f, g, h, c'est-à-dire h et θ sont quasi périodiques, on peut écrire $h = \mathrm{H}(t,\dots,t)$, $\theta = \Theta(t,\dots,t)$, $\mathrm{H}(t_1, t_2 \dots t_p)$, $\Theta(t_1,\dots,t_q)$ périodiques en t_i, t_j respectivement de période T_i, T'_j. Il est clair qu'on peut toujours, par un jeu d'écriture, ne considérer que le cas où $p=q=m$ et $\mathrm{T}_i = \mathrm{T}'_i$. Des formules (12) et (13) on obtient :

$\tilde{r}(t) = \tilde{\mathrm{R}}(t,\dots,t)$, $\tilde{\pi}(t) = \tilde{\Pi}(t,\dots,t)$ avec :

$$\tilde{\mathrm{R}}(t_1,\dots,t_m) = \int_{-\infty}^{0} e^{\mu\sigma}\, \mathrm{H}(t_1+\sigma, t_2+\sigma, \dots, t_m+\sigma)\, d\sigma$$

$$\tilde{\Pi}(t_1,\dots,t_m) = \int_{-\infty}^{0} \Theta(t_1+\sigma,\dots,t_m+\sigma)\exp\left[-\int_{\sigma}^{0} (\nu + i\alpha\tilde{\mathrm{R}}(t_1+s,\dots,t_m+s))ds\right] d\sigma$$

d'où il suit que $\tilde{r}(t)$ et $\tilde{\theta}(t)$ sont quasi periodiques avec les mêmes fréquences fondamentales.

Si $(f, g, h) \in \mathrm{G}_{\mathbf{R}}^3$, il est clair que $(\tilde{r}, \tilde{\pi}) \in \mathrm{G}_{\mathbf{C}}^2$ en vertu des propriétés de continuité établies au § 6.

II

1. Calculant la vitesse de $\vec{\xi}_i = \sum_j c_{ij}\, \vec{x}_j$, de deux manières, on obtient :

$$\frac{d\vec{\xi}_i}{dt} = \sum_j \frac{dc_{ij}}{dt}\vec{x}_j = \vec{\omega}\wedge\vec{\xi}_i = \sum_l p_l\, \vec{\xi}_l \wedge \vec{\xi}_i = \sum_{k,l} \epsilon_{kli}\, p_l\, \vec{\xi}_k = \sum_{k,l,j} \epsilon_{k,l,i}\, p_l\, c_{k,j}\, \vec{s}_j$$

d'où : $$\frac{dc_{ij}}{dt} = \sum_{k,l} \epsilon_{i,k,l}\, p_l\, c_{k,j}$$

c'est-à-dire : $$\frac{d\mathrm{X}}{dt} = \Omega(t)\,\mathrm{X} \qquad (14)$$

avec $$\mathrm{X} = \left\{c_{ij}\right\}, \quad \Omega = \left\{\sum_l \epsilon_{ikl}\, p_l\right\} \qquad (15)$$

L'équation (14) et la condition initiale $\mathrm{X}(0) = \mathrm{I}$ (qui postule qu'on a choisi pour système de référence x_1, x_2, x_3 le système $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ dans sa position à l'instant 0) définissent de manière unique la matrice $\mathrm{X}(t)$.

Il est évident de $\epsilon_{ikl} = -\epsilon_{kil}$ que : $\Omega + \Omega^{tr} = 0$.

D'autre part, on peut écrire :

$$\frac{d\,\mathrm{X}^{tr}\mathrm{X}}{dt} = \frac{d\mathrm{X}^{tr}}{dt}\mathrm{X} + \mathrm{X}^{tr}\frac{d\mathrm{X}}{dt} = \mathrm{X}^{tr}(\Omega^{tr} + \Omega)\mathrm{X} = 0$$

et par conséquent $\mathrm{X}^{tr}\mathrm{X} = \mathrm{I}$, puisque $\mathrm{X}^{tr}(0) = \mathrm{X}(0) = \mathrm{I}$.

De ce résultat on déduit que $|\,\text{dét}\ \mathrm{X}\,| = 1$ et puisque $\mathrm{X}(t)$ est à valeurs réelles, continue et $\mathrm{X}(0) = \mathrm{I}$, on peut assurer que dét $\mathrm{X}(t) = 1$.

La matrice $\mathrm{X}(t)$ est inversible ; multipliant à gauche $\mathrm{X}^{tr}\mathrm{X} = \mathrm{I}$ par X, on obtient $(\mathrm{X}\mathrm{X}^{tr} - \mathrm{I})\,\mathrm{X} = 0$ et par multiplication à droite par X^{-1} : $\mathrm{X}\mathrm{X}^{tr} = \mathrm{I}$.

Aussi la matrice $\mathrm{X}(t)$ est unitaire (résultat auquel on s'attendait compte tenu de sa définition géométrique).

On suppose désormais que $\Omega(t)$ est périodique en t de période T (ce qui sera le cas pour la solution asymptotique, si l'excitation est périodique).

La relation : $\mathrm{X}(t+\mathrm{T}) = \mathrm{X}(t)\,\mathrm{X}(\mathrm{T})$ (16)

résulte du fait que $\mathrm{X}(t+\mathrm{T})$, $\mathrm{X}(t)\,\mathrm{X}(\mathrm{T})$ sont solutions de (14) et prennent pour $t = 0$ même valeur ; l'égalité suit du théorème d'unicité.

La matrice $\mathrm{X}(\mathrm{T})$ étant unitaire, réelle et de déterminant égal à $+1$, a pour valeurs propres $1, e^{i\sigma\mathrm{T}}, e^{-i\sigma\mathrm{T}}$, avec σ réel et peut être rendue diagonale ; c'est dire qu'il existe une matrice K, inversible, à éléments complexes telle que :

$$K^{-1} . X(T) . K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\sigma T} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\sigma T} \end{pmatrix} \tag{17}$$

Avec

$$Y(t) = K \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\sigma t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\sigma t} \end{pmatrix} . K^{-1} \tag{18}$$

On note que : $Y^{-1}(t) = Y(-t)$, $Y(t+s) = Y(t).Y(s)$ et avec (16) que :

$$X(t+T)Y^{-1}(t+T) = X(t)X(T)Y(-t-T) = X(t)X(T)Y(-T)Y(-t).$$

Mais par (17) et (18) on a : $X(T)Y(-T) = I$, de sorte que :

$$X(t+T)Y^{-1}(t+T) = X(t)Y^{-1}(t), \forall t.$$

La matrice $Q(t) = X(t).Y^{-1}(t)$ est donc périodique de période T, et l'on obtient la représentation : $X(t) = Q(t).Y(t)$.

D'après (18), $Y(t)$ est périodique de période $\dfrac{2\pi}{\sigma}$ (Y est constante si $\sigma = 0$).

La matrice $X(t)$ est donc quasi périodique avec deux périodes fondamentales T et $\dfrac{2\pi}{\sigma}$ $(\sigma \neq 0)$.

2. a) Il existe au plus une fonction $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ satisfaisant à :

$$\Delta_x \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0, \forall (x_1, x_2, x_3) \in U \tag{19}$$

$$\frac{d\varphi}{dn} = (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) . \vec{n}, \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \partial U \tag{20}$$

Il suffit de montrer que $\Delta_x \tilde{\varphi} = 0$ dans U et $\dfrac{d\tilde{\varphi}}{dn} = 0$ sur ∂U, implique $\tilde{\varphi} = \text{const.}$; partant de :

$$\int_U \tilde{\varphi} \Delta_x \tilde{\varphi} dx + \int_U (\overrightarrow{\text{grad}}_x \tilde{\varphi})^2 dx = \int_U \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) dx$$

$$= \int_{\partial U} \sum_j \tilde{\varphi} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_j} n_j \, d\sigma = \int_{\partial U} \tilde{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{dn} d\sigma = 0.$$

Il reste : $\displaystyle\int_U (\overrightarrow{\text{grad}}_x \tilde{\varphi})^2 dx = 0$ qui entraîne $\text{grad}_x \tilde{\varphi} = 0$ dans U et $\tilde{\varphi} = \text{const.}$

b) Puisque la transformation de coordonnées $x \to \xi$ est orthogonale, il y a invariance du Laplacien de sorte que, φ exprimé à l'aide des coordonnées ξ_1, ξ_2, ξ_3, t vérifie : $\Delta_\xi \varphi = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_1^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_2^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_3^2} = 0.$

Avec $\vec{\omega} = \sum_j p_j \vec{\xi}_j$, on cherche une représentation de φ sous la forme :

$\varphi = \vec{\omega} . \vec{\psi} = p_1 \psi_1 + p_2 \psi_2 + p_3 \psi_3$, avec $\psi_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, ne dépendant que des variables ξ_1, ξ_2, ξ_3 et non de t.

Interprétant (20) : $\dfrac{d\varphi}{dn} = \vec{\omega} \dfrac{d\vec{\psi}}{dn} = \vec{\omega} . (\vec{r} \wedge \vec{n})$, l'on voit qu'on satisfait à (19) et (20) en définissant $\psi_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ comme la solution unique de :

$$\Delta \psi_j = 0 \quad \text{dans } U \tag{21}$$

$$\frac{d\psi_j}{dt} = (\vec{r} \wedge \vec{n}) . \vec{\xi}_j \quad \text{sur } \partial U \tag{22}$$

c) Avec $\vec{n} = \sum_l \nu_l \vec{\xi}_l$, on a :

$$\int_{\partial U} \psi_i \frac{d\psi_j}{dn} d\sigma = \int_{\partial U} \sum_l \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi_l} \nu_l \, d\sigma = \int_U \sum_l \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left(\psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi_l}\right) d\xi$$

$$= \int_U \sum_l \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi_l} \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi_l} d\xi, \text{ en raison de } \Delta \psi_j = 0$$

d'où la relation de symétrie :

$$\int_{\partial U} \psi_i \frac{d\psi_j}{dn} d\sigma = \int_{\partial U} \psi_j \frac{d\psi_i}{dn} d\sigma$$

d) On calcule le moment cinétique du fluide :

$$\vec{H} = \rho \int_U \vec{OM} \wedge \vec{\text{grad}}\ \varphi\, d\xi\ ;$$

on peut écrire :

$$\vec{H}.\vec{\xi_i} = \rho \int_U \sum_{j,k} \epsilon_{ijk}\, \xi_j \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_k}\, d\xi = \rho \int_U \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial \xi_k} (\epsilon_{ijk}\, \xi_j \varphi)\, d\xi$$

$$= \rho \int_{\partial U} \sum_{j,k} \epsilon_{ijk}\, \xi_j\, \varphi \nu_k\, d\sigma = \rho \int_{\partial U} (\vec{r} \wedge \vec{n}) . \vec{\xi_i} \varphi\, d\sigma$$

c'est-à-dire, d'après (22) :

$$H.\xi_i = \rho \int_{\partial U} \frac{d\psi_i}{dn} \varphi d\sigma = \sum_j (\rho \int_{\partial U} \frac{d\psi_i}{dn} \psi_j\, d\sigma)\, p_j$$

ou avec : $I_{ij} = \dfrac{\rho}{2} \displaystyle\int_{\partial U} (\psi_i \frac{d\psi_j}{dn} + \psi_j \frac{d\psi_i}{dn})\, d\sigma,$

$$\vec{H}.\vec{\xi}_i = \sum_j I_{ij}\, p_j \tag{23}$$

L'énergie cinétique est :

$$2T = \rho \int_U (\vec{\text{grad}}\, \xi \varphi)^2\, d\xi = \rho \int_U (\sum_j p_j\, \vec{\text{grad}}\, \psi_j)(\sum_l p_l\, \vec{\text{grad}}\, \psi_l)\, d\xi$$

$$= \sum_{j,l} \rho\, p_j p_l \int_U \vec{\text{grad}}\ \psi_j\ \vec{\text{grad}}\ \psi_l\, d\xi .$$

En outre :

$$\int_U \vec{\text{grad}}\ \psi_j\ \vec{\text{grad}}\ \psi_l\, d\xi = \int_U \sum_k \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi_k} \frac{\partial \psi_l}{\partial \xi_k}\, d\xi = \int_U \sum_k (\frac{\partial}{\partial \xi_k} (\psi_j \frac{\partial \psi_l}{\partial \xi_k}) - \psi_j \frac{\partial^2 \psi_l}{\partial \xi_k^{\,2}})\, d\xi$$

$$= \int_{\partial U} \sum_k \psi_j \frac{\partial \psi_l}{\partial \xi_k} \nu_k\, d\sigma = \int_{\partial U} \psi_j \frac{d\psi_l}{dn}\, d\sigma = \rho^{-1} I_{jl}$$

d'où : $$2T = \sum_{j,l} I_{jl}\, p_j\, p_l \tag{24}$$

Les formules (23) et (24) montrent que du point de vue dynamique, le liquide enfermé dans la cavité U se comporte comme un corps solide dont le tenseur d'inertie relativement aux axes ξ est I_{ij} et la rotation par rapport aux axes de référence est $\vec{\omega}$.

e) Par le théorème de composition des vitesses il est clair que : $\vec{\text{grad}}\, \varphi = \vec{u} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$, $\vec{u}$ désignant la vitesse, par rapport au système ξ, de la particule fluide qui à l'instant t est en (ξ_1, ξ_2, ξ_3)

De cette formule on déduit :

$$0 = \Delta_\xi \varphi = \text{div}_\xi\, \text{grad}_\xi \varphi = \text{div}_\xi\, \vec{u} + \text{div}_\xi\, \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

Mais $\text{div}_\xi (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = 0$, d'où $\displaystyle\sum_i \frac{\partial u_i}{\partial \xi_i} = 0.$

Partant de $\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \vec{\text{grad}}\, \varphi - \vec{u}$, on obtient :

$$\int_U \rho (\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2\, d\xi = \int_U \rho\, (\vec{\text{grad}}\, \varphi)^2\, d\xi + \int_U \rho \vec{u}^2 d\xi - 2 \int_U \rho\, \vec{\text{grad}}\, \varphi . \vec{u}\, d\xi .$$

Mais $$\int_U \vec{\text{grad}}\, \varphi . \vec{u}\, d\xi = \int_U \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} u_i\, d\xi = \int_U \sum_i \frac{\partial (\varphi u_i)}{\partial \xi_i}\, d\xi$$

$$= \int_{\partial U} \varphi . (\vec{u} . \vec{n})\, d\sigma$$

et, puisqu'en raison de (20), on a $\vec{u} . \vec{n} = 0$ sur ∂U, il vient :

$$\int_U \rho (\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2\, d\xi = \int_U \rho\, (\vec{\text{grad}}\, \varphi)^2\, d\xi + \int_U \rho \vec{u}^2 d\xi$$

d'où : $$\int_U \rho (\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2\, d\xi > \int_U \rho\, (\vec{\text{grad}}\, \varphi)^2\, d\xi .$$

Ainsi l'énergie cinétique du fluide est inférieure à celle qu'aurait un corps solide homogène de même densité remplissant la cavité.

III

1. Utilisant les équations d'Euler on obtient :

$$\frac{dp}{dt} - a\,q\,r = m + \mu\,\omega^2 \qquad (25)$$

$$\frac{dq}{dt} + b\,r\,p = 0 \qquad (26)$$

$$\frac{dr}{dt} - c\,p\,q = 0 \qquad (27)$$

avec a, b, c, m, μ positifs et $\vec{\omega} = p\,\vec{\xi} + q\,\vec{\eta} + r\,\vec{\zeta}$.

Introduisant la variable φ définie par $d\varphi = pdt$, (26) et (27) deviennent :

$$\frac{dq}{d\varphi} + br = 0 \qquad\qquad \frac{dr}{d\varphi} - cq = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d^2q}{d\varphi^2} + bcq = 0\,,\ bc > 0$$

et les représentations :

$$q = \delta\sqrt{b}\,\cos\,(\sqrt{bc}\,\varphi + \sigma_0)$$

$$r = \delta\sqrt{c}\,\sin\,(\sqrt{bc}\,\varphi + \sigma_0).$$

2. Dans le cas où $\delta = 0$, on a $q = r = 0$, $\dfrac{dp}{dt} = m + \mu p^2$.

Ainsi $\vec{\omega}\,\Lambda\left(\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{\xi\eta\zeta} = 0$ et puisque $\left(\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{\xi\eta\zeta} = \left(\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{xyz}$,

l'on voit que $\vec{\omega}\,\Lambda\left(\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{xyz} = 0$, d'où il suit que la direction du vecteur rotation, identique à celle de l'axe principal ξ, est invariable par rapport aux axes de référence. Le solide exécute ainsi un mouvement de rotation autour d'un axe de direction invariable. La mesure de cette rotation s'obtient en intégrant l'équation $\dfrac{dp}{dt} = m + \mu p^2$,

dont la solution générale est : $p = \sqrt{\dfrac{m}{\mu}}\ tg\,[\sqrt{\mu}\,m\,(t - t_0)]$.

3. On suppose désormais $\delta \neq 0$.

Partant de (25) avec $\dfrac{dp}{dt} = \dfrac{d}{dt}\,\dfrac{d\varphi}{dt}$, on obtient :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \mu\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = m + \frac{\delta^2 a\sqrt{bc}}{2}\,\sin\,(2\sqrt{bc}\,\varphi + 2\,\sigma_0)$$

$$+ \mu\,\delta^2\,[\,b\cos^2(\sqrt{bc}\,\varphi + \sigma_0) + c\sin^2(\sqrt{bc}\,\varphi + \sigma_0)] \qquad (28)$$

4. Compte tenu des notations du texte on transforme aisément (28) en :

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} - \mu_1\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 = k + \sin\theta \qquad (29)$$

5. Avec $u = \left(\dfrac{d\theta}{d\tau}\right)^2$, $\dfrac{du}{d\theta} = 2\,\dfrac{d^2\theta}{d\tau^2}$, on obtient à partir de (29) l'équation linéaire :

$$\frac{du}{d\theta} - 2\,\mu_1\,u = 2k + 2\sin\theta \qquad (30)$$

dont la solution générale est :

$$u = G(\theta) = f(\theta) - g(\theta),\ \text{avec}\ f(\theta) = Ce^{\,2\mu_1\theta}$$

$$g(\theta) = \frac{k}{\mu_1} + \frac{2\cos\theta}{1 + 4\mu_1^{\,2}} + \frac{4\,\mu_1\sin\theta}{1 + 4\,\mu_1^{\,2}}.$$

On détermine ensuite $\theta(\tau)$ au moyen de :

$$\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 = G(\theta).$$

Les valeurs admissibles pour θ sont telles que $G(\theta) = f(\theta) - g(\theta) \geqslant 0$; On les déterminera aisément, considérant les représentations de f et g, respectivement fonction exponentielle, fonction sinusoïdale de valeur moyenne $\dfrac{k}{\mu_1} > 0$.

Plusieurs cas peuvent être considérés, qui dépendent des conditions initiales, mais sans entrer dans une discussion complète on peut prévoir la possibilité de mouvements oscillatoires si $G(\theta) > 0$ pour $\theta \in]\theta_1, \theta_2[$ et change de signe dès que θ sort de cet intervalle.

La période de mouvement est alors : $T = 2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \dfrac{d\theta}{\sqrt{G(\theta)}}$.

On obtient une solution stationnaire $\theta = \theta_0$ en exprimant que $G(\theta_0) = 0$; $G'(\theta_0) = 0$; en outre la condition de stabilité est : $G''(\theta_0) < 0$. Ainsi l'on écrit :

$$G(\theta_0) = C e^{2\mu_1\theta_0} - \left[\frac{k}{\mu_1} + \frac{2\cos\theta_0}{1+4\mu_1^2} + \frac{4\mu_1 \sin\theta_0}{1+4\mu_1^2}\right] = 0$$

$$G'(\theta_0) = 2\mu_1 C e^{2\mu_1\theta_0} - \left[-\frac{2\sin\theta_0}{1+4\mu_1^2} + \frac{4\mu_1\cos\theta_0}{1+4\mu_1^2}\right] = 0$$

$$G''(\theta_0) = 4\mu_1^2 C e^{2\mu_1\theta_0} + \left[\frac{2\cos\theta_0}{1+4\mu_1^2} + \frac{4\mu_1\sin\theta_0}{1+4\mu_1^2}\right] < 0.$$

Eliminant C entre les deux premières équations on a : $k + \sin\theta_0 = 0$, (31) qui définit θ_0 sous réserve que $k < 1$, résultat conforme à ce qu'on aurait pu obtenir directement de (29).

D'autre part, éliminant C avec l'aide de $G(\theta_0) = 0$, la condition de stabilité devient : $4\mu_1 k + 2\cos\theta_0 + 4\mu_1 \sin\theta_0 < 0$, c'est-à-dire compte tenu de (31) : $\cos\theta_0 < 0$ (32).

6. Revenant à (29), on se propose d'étudier quantitativement les mouvements voisins d'une position d'équilibre.

A cette fin on pose $\theta = \theta_0 + \chi$, d'où :

$$\frac{d^2\chi}{d\tau^2} - \mu_1 \left(\frac{d\chi}{d\tau}\right)^2 = k + \sin\theta_0 \cos\chi + \cos\theta_0 \sin\chi$$

qu'on peut écrire, notant $\omega_0^2 = -\cos\theta_0$:

$$\frac{d^2\chi}{d\tau^2} + \omega_0^2 \chi = \mu_1 \left(\frac{d\chi}{d\tau}\right)^2 + F(\chi) \qquad (33)$$

avec : $F(\chi) = k + \sin\theta_0 \cos\chi + \cos\theta_0 \sin\chi - \cos\theta_0 . \chi$

d'où : $F(\chi) = \beta_2 \chi^2 + \beta_3 \chi^3 + \ldots$ avec

$$\beta_2 = -\frac{\sin\theta_0}{2}, \quad \beta_3 = -\frac{\cos\theta_0}{6}, \text{ etc.}$$

Pour représenter les solutions périodiques de (33) voisines de $\chi = 0$, on introduit un paramètre η, qui mesure en quelque sorte leur amplitude et sert à définir la condition initiale:

$$\left.\begin{aligned} &\chi(0) = \eta \\ &\frac{d\chi(0)}{d\theta} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (34).$$

L'équation (33) étant autonome, on peut choisir arbitrairement l'origine des temps, en particulier à un instant où χ atteint un maximum.

La période du mouvement est inconnue *a priori* ; pour le calculer, on fait le changement de variable $\tau \to s$: $\tau = \dfrac{s}{\omega_0}\ (1 + h_1\eta + h_2\eta^2 + \ldots)$

où $h_1, h_2, \ldots$ sont des inconnues que le calcul devra permettre de déterminer, la solution recherchée étant périodique en s de période 2π.

Il vient ainsi :

$$\frac{d^2\chi}{ds^2} + (1 + h_1\eta + h_2\eta^2 + \ldots)^2\chi = \mu_1\left(\frac{d\chi}{ds}\right)^2 + (1 + h_1\eta + h_2\eta^2 + \ldots)^2(\beta_2\chi^2 + \beta_3\chi^3 + \ldots)$$

et on en cherche la solution vérifiant (34) sous la forme :

$$\chi = \eta \cos s + \eta^2 \chi_2(s) + \eta^3 \chi_3(s) + \ldots$$

$\chi_2, \chi_3, \ldots$ étant périodiques en s de période 2π et satisfaisant aux conditions initiales :

$$\chi_j(0) = \frac{d\chi_j(0)}{ds} = 0, j \geqslant 2.$$

Au premier ordre en η, l'équation obtenue est identiquement vérifiée. Au second ordre en η on trouve :

$$\frac{d^2\chi_2}{ds^2} + \chi_2 = \frac{\mu_1 + \beta_2}{2} - 2h_1 \cos s + \frac{\beta_2 - \mu_1}{2} \cos 2s.$$

Pour que cette équation ait une solution $\chi_2(s)$, périodique en s de période 2π, il faut que le terme en $\cos s$ du second membre disparaisse, ce qui oblige de prendre $h_1 = 0$.

On obtient alors :

$$\chi_2 = \frac{\mu_1 + \beta_2}{2} - \frac{\beta_2 - \mu_1}{2} \cos 2s + a_2 \cos s + b_2 \sin s$$

où a_2 et b_2 sont des constantes qu'on détermine par :

$$\chi_2(0) = \frac{d\chi_2(0)}{ds} = 0.$$

ou : $a_2 + \mu_1 = 0$

$b_2 = 0.$

Finalement on obtient :

$$\chi_2(s) = \frac{2\mu_1 - \sin\theta_0}{4} + \frac{\sin\theta_0 + 2\mu_1}{12} \cos 2s - \mu_1 \cos s$$

et l'on peut poursuivre le calcul aux ordres supérieurs de la même façon.

3. Observations des correcteurs

Les résultats sont médiocres ; il est surprenant qu'aient été si nombreux les candidats qui, incapables d'exprimer correctement la solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec condition initiale, n'ont pu avancer si peu que ce soit dans l'analyse du problème.

Le mouvement discuté dans la partie I était régi par un système d'équations non linéaire, assez simple en vérité puisque le calcul de ses solutions pouvait être réduit à l'intégration successive de deux équations différentielles linéaires ; mais faute d'avoir reconnu le caractère non linéaire de ce système, beaucoup de candidats ont abordé l'analyse des propriétés de continuité des applications définies au § I,6 en considérant celles-ci comme linéaires et ont été ainsi conduits à des calculs complètement inexacts ; par ailleurs les quelques copies dont les auteurs ont compris le sens de la question posée, présentent des développements maladroits et incomplets qui jamais n'ont permis d'obtenir une réponse satisfaisante.

Les propriétés de périodicité ou de quasi périodicité du mouvement énoncées aux I. 7, 8 et II. 1 ont été assez généralement incomprises ; les calculs proposés au II 2 en vue d'exprimer le moment et l'énergie cinétique du liquide remplissant la cavité U ont été effleurés par certains candidats sans qu'ait été expliqué pourquoi du point de vue dynamique, l'on pouvait substituer au liquide un solide fictif ayant des propriétés inertielles convenables.

Quant à la partie III l'on peut signaler quelques tentatives, souvent infructueuses, pour intégrer l'équation différentielle du mouvement qui, d'ailleurs, était donnée dans le texte ; mais les questions de stabilité et de calcul asymptotique des solutions périodiques ont totalement échappé à l'attention des candidats.

4. Les notes (sur 40)

Nombre de copies corrigées : 230

Moyenne : 7,32 (en excluant les copies nulles : 9,98)

Répartition des notes :

0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 40
60	44	54	42	19	11

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

AVERTISSEMENT. — *Plusieurs questions de ce problème exigent d'assez longs calculs. Il est vivement conseillé de ne porter ces calculs sur la copie que lorsqu'ils aboutissent à un résultat et de soigner leur rédaction.*

Les questions ne sont pas indépendantes, mais on pourra admettre un résultat donné par l'énoncé, même si l'on n'a pas pu l'établir.

***

DÉFINITIONS, NOTATIONS ET RAPPELS

1° Une matrice A ayant p lignes et q colonnes est dite « d'ordre $[p, q]$ ». On désigne par $\mathcal{M}_{p,q}$ l'ensemble des matrices réelles d'ordre $[p, q]$. ${}^t\mathrm{A}$ désigne la transposée de A.

Une matrice carrée d'ordre $[r, r]$ est dite, simplement, « d'ordre r » 1_r désigne la matrice unité d'ordre r.

On s'autorisera à confondre une matrice carrée d'ordre 1 et son unique terme.

Une matrice réelle carrée symétrique est dite « définie positive » si la forme quadratique qu'elle engendre est définie positive. On désignera par S_r^+ l'ensemble des matrices définies positives d'ordre r.

Enfin, une même notation désignera un vecteur de $\mathbf{R}^n$ et la matrice unicolonne de ses composantes.

2° Γ désigne la fonction gamma définie sur $\mathbf{R}^{+*}$ par :

$$a \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1}\, dx \quad .$$

3° On désigne par $\mathcal{N}(m, \Lambda)$ la loi normale de moyenne m et de matrice de covariance Λ. On rappelle que sa fonction caractéristique est définie par :

$$u \longmapsto \exp\left\{ i\,{}^t u m - \frac{1}{2}\,{}^t u \Lambda u \right\} .$$

4° Enfin, on pourra utiliser les résultats suivants :

— si A et B sont deux matrices carrées, la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & \mathrm{B} \end{pmatrix}$ a pour déterminant le produit des déterminants de A et de B;

— si A et B sont deux matrices d'ordres respectifs $[p, q]$ et $[q, p]$, on a

$$\det(1_p - \mathrm{AB}) = \det(1_q - \mathrm{BA})$$

et

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{BA}) ,$$

où « Tr » désigne la trace, c'est-à-dire la somme des éléments diagonaux.

***

L'objet du problème est l'étude de certaines matrices d'ordre fixé, mais dont les termes sont des variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé; de telles matrices seront dites « aléatoires ».

PREMIÈRE PARTIE

Soient a et λ deux nombres réels strictement positifs; on désigne par $\Gamma(a, \lambda)$ la loi de probabilité sur $\mathbf{R}$ dont la fonction caractéristique est définie par :

$$t \longmapsto (1 - i\lambda t)^{-a} \qquad \text{(détermination principale)}.$$

On rappelle que la densité de cette loi est définie par :

$$x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda^{-a}}{\Gamma(a)}\, e^{-x/\lambda} x^{a-1} & \text{si} \quad x > 0 \ ; \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \ . \end{cases}$$

1° Montrer que, quel que soit le nombre réel positif ou nul γ, la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\gamma/\lambda}(\gamma/\lambda)^n}{n\,!}\ \Gamma(a+n, \lambda)$$

définit une loi de probabilité. Calculer la fonction caractéristique de cette loi que l'on notera désormais $\Gamma(a, \gamma, \lambda)$.

On pourra, dans la suite, utiliser le résultat suivant : si X est une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, la loi de X^2 est

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}, m^2, 2\sigma^2\right).$$

2° Soient U et V deux variables aléatoires réelles indépendantes de lois respectives $\Gamma(a, \lambda)$ et $\Gamma(b, \lambda)$. Déterminer la loi du couple $\left(U+V, \frac{U}{U+V}\right)$ et calculer la densité de $\frac{U}{U+V}$.

3° Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbf{R}^n$ de loi $\mathcal{N}(m, \Lambda)$, et soit A une matrice carrée symétrique d'ordre n. Montrer que la fonction caractéristique de la variable aléatoire réelle ${}^tXAX$ est définie par :

$$t \longmapsto \left[\det\left(1_n - 2it A\Lambda\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{it\,{}^tm\left(1_n - 2itA\Lambda\right)^{-1} Am\right\}.$$

On pourra d'abord examiner le cas où A et Λ sont des matrices diagonales; dans le cas général, on commencera par montrer que l'on peut trouver une matrice P carrée d'ordre n telle que Λ soit égale à $P{}^tP$ et que ${}^tPAP$ soit diagonale.

*
* *

DEUXIÈME PARTIE

Soit X une matrice aléatoire d'ordre $[p, q]$ donné.

1° Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi_X : \mathcal{M}_{p,q} &\longrightarrow \mathbf{C} \\ T &\longmapsto E\left(e^{i\operatorname{Tr}(X\,{}^tT)}\right) \end{aligned}$$

définit la loi de probabilité de X. On appellera φ_X la fonction caractéristique de X.

Montrer que, si la matrice X est symétrique, on peut restreindre φ_X à des matrices T symétriques.

2° Déterminer la loi de X dans le cas particulier où

$$\varphi_X(T) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(T\,{}^tT) + i\operatorname{Tr}(m\,{}^tT)\right\},$$

m étant une matrice donnée d'ordre $[p, q]$. Quelle est, dans ce cas, la densité de probabilité de X par rapport à la mesure de Lebesgue que l'on introduira naturellement sur $\mathcal{M}_{p,q}$ par analogie avec celle de $\mathbf{R}^{pq}$?

3° Soit A une matrice carrée d'ordre p. Calculer le jacobien de l'application de $\mathcal{M}_{p,q}$ dans lui-même définie par :

$$x \longmapsto Ax.$$

En déduire celui de l'application

$$x \longmapsto AxB,$$

où B désigne une matrice carrée d'ordre q.

4° Soient A et B deux matrices données d'ordres respectifs $[n, p]$ et $[q, r]$. On suppose que la loi de X est celle donnée à la question 2° ci-dessus.

a. Montrer que les colonnes de la matrice AX sont indépendantes et déterminer leurs lois de probabilité.

b. Calculer la fonction caractéristique de la matrice AXB; dans quels cas admet-elle une densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{M}_{n,r}$?

*
* *

TROISIÈME PARTIE

Soit U une matrice carrée triangulaire supérieure d'ordre r dont les termes sont des variables aléatoires indépendantes. De plus, on suppose que, pour tout k $(1 \leqslant k \leqslant r)$, $U_{k,k}$, terme diagonal de U situé dans la k-ème colonne, est positif et que son carré a pour loi $\Gamma\left(a + \frac{k-r}{2}, 1\right)$, où a est un nombre réel donné strictement supérieur à $\frac{r-1}{2}$. Enfin, on suppose que tous les termes de U situés au-dessus de la diagonale ont pour loi commune $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

1° On désigne par U_k la k-ème colonne de U. Déterminer la loi de probabilité conditionnelle de U_k à $U_{k,k}$.

2° En utilisant les résultats de la question précédente et la première partie du problème, calculer la fonction caractéristique de $U_k{}^tU_k$.

On pourra utiliser la relation suivante :

$$\alpha - CA^{-1}B = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & \alpha \end{pmatrix},$$

où A est une matrice carrée inversible et α un scalaire.

3° En déduire que la fonction caractéristique de la matrice $X = U\,{}^tU$ est définie par :

$$T \longmapsto \left[\det (1_r - iT)\right]^{-a} \qquad \text{(détermination principale)} .$$

4° Montrer qu'à toute matrice Ω de S_r^+ on peut faire correspondre, de façon unique, une matrice T triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que : $\Omega = T\,{}^tT$.

Donner un sens à la notion de jacobien de l'application définie par :

$$T \longmapsto T\,{}^tT$$

et montrer qu'il est égal à

$$2^r \prod_{k=1}^{r} (t_k)^k ,$$

où t_k désigne le terme diagonal de la k-ème colonne de T.

5° Soit X_{jk} le terme de X situé dans la j-ème ligne et dans la k-ème colonne. Calculer la densité de probabilité de l'ensemble des variables aléatoires $X_{j,k}$ $(1 \leqslant j \leqslant k \leqslant r)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^{\frac{r(r+1)}{2}}$. En déduire que l'application définie par :

$$x \longmapsto \frac{1}{\Gamma_r(a)} e^{-\mathrm{Tr}(x)} (\det x)^{a - \frac{r+1}{2}} ,$$

où $\Gamma_r(a) = \pi^{\frac{r(r-1)}{4}} \prod_{j=0}^{r-1} \Gamma\left(a - \frac{j}{2}\right)$, est la densité de probabilité de X par rapport à la mesure de Lebesgue que l'on introduira naturellement sur S_r^+ .

6° Soit A une matrice donnée d'ordre $[r, p]$; calculer la fonction caractéristique de la matrice aléatoire $Z = {}^tAXA$. Montrer que la loi de probabilité de Z ne dépend que de p, a et $\Lambda = {}^tAA$; dans toute la suite, on désignera cette loi par $\Gamma_p(a, \Lambda)$.

7° Montrer que, si la matrice Λ est inversible, Z a une densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue sur un domaine que l'on préci-

sera. Calculer cette densité en admettant que le jacobien de l'application définie par

$$x \longmapsto {}^tBxB ,$$

où x est une matrice carrée symétrique d'ordre p et B une matrice carrée de même ordre, est égal à $(\det B)^{p+1}$.

8° Soit x un vecteur donné de $\mathbf{R}^p$. Calculer l'espérance mathématique de ${}^txZx$ et en déduire celle de Z.

9° On suppose la matrice Λ inversible. Pour quelles valeurs du réel α la variable aléatoire $(\det Z)^\alpha$ est-elle sommable? Calculer alors son espérance mathématique.

10° On se place dans le cas particulier où $p = 2$ et où la matrice Λ est inversible. Soient Z_1 et Z_2 les termes diagonaux de Z.

a. Calculer la fonction caractéristique du couple (Z_1, Z_2) .

b. Montrer, en utilisant les fonctions caractéristiques, qu'il existe des constantes β et λ, que l'on calculera, telles que la loi conditionnelle de Z_2 à Z_1 soit la loi $\Gamma(a, \beta Z_1, \lambda)$.

QUATRIÈME PARTIE

Dans toute cette partie, on donne un entier positif r et deux nombres réels a et b tels que :

$$2a + 1 > r \qquad \text{et} \qquad 2b + 1 > r .$$

On considère l'application de l'ensemble des matrices carrées symétriques inversibles d'ordre r donné dans lui-même qui fait correspondre à chaque matrice x son inverse et l'on admet que la valeur absolue du jacobien de cette application est égale à $|\det x|^{-r-1}$.

1° Soient Y une matrice aléatoire de loi $\Gamma_r(b, 1_r)$ et X une matrice aléatoire dont la loi de probabilité conditionnelle à Y est presque partout la loi $\Gamma_r(a, Y^{-1})$.

a. Calculer $E[(\det X)^\alpha]$ en précisant les valeurs réelles de α pour lesquelles cette expression existe.

b. Calculer la densité de probabilité de X et retrouver par un calcul direct le résultat de la question précédente.

c. Déterminer la loi de probabilité de X^{-1}.

d. Pour tout α réel positif, calculer

$$E\left[\left(\det(1_r+X)\right)^{-\alpha}(\det X)^{\alpha}\right] .$$

2° Soient U et V deux matrices aléatoires indépendantes de lois respectives $\Gamma_r\ (a,\ 1_r)$ et $\Gamma_r\ (b,\ 1_r)$.

a. Montrer que, quel que soit le réel positif α, la variable aléatoire

$$h(U)=E\left[\left(\det(U+V)\right)^{-\alpha}\mid U\right]$$

ne dépend pas de a et calculer l'intégrale

$$\int_{S_r^+} h\, d\Gamma_r(a+\alpha, 1_r).$$

b. Calculer $E\left[\left(\dfrac{\det U}{\det(U+V)}\right)^{\alpha}\right]$ pour tout α réel positif et en déduire que la loi de la variable aléatoire $\dfrac{\det U}{\det(U+V)}$ est celle d'un produit de variables aléatoires indépendantes dont les lois respectives, que l'on précisera, sont du type obtenu à la deuxième question de la première partie.

3° Pourquoi les espérances mathématiques calculées en 1° *d.* et en 2° *b* sont-elles égales pour toute valeur de α? On admettra qu'il existe une matrice W d'ordre r telle que les deux matrices $W\,{}^tW$ et ${}^tW\,W$ aient la même loi que V.

RAPPORT SUR L'EPREUVE DE PROBABILITES ET STATISTIQUES

1. Thème du sujet

Le sujet proposait l'étude de matrices d'ordre fixé, dont les termes sont des variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé.

Il s'agissait, en quelque sorte, de vecteurs aléatoires présentés sous forme matricielle. Cela amenait à poser quelques questions qui relevaient plus de l'algèbre linéaire que du calcul des probabilités.

2. Observations générales

Les correcteurs rappellent avec insistance que l'épreuve de probabilités n'est pas une épreuve supplémentaire d'analyse ou d'algèbre. Si toutes les fautes mathématiques sont évidemment sanctionnées, le barème privilégie tout naturellement les questions faisant intervenir des techniques plus particulièrement probabilistes. Il est donc conseillé aux étudiants n'ayant aucune notion de cette branche des mathématiques de ne pas choisir l'option probabilités et statistiques.

On éviterait peut-être ainsi de constater que, sur 836 candidats qui ont composé, il y en ait eu :

– 108 qui ont remis une copie blanche ;
– 84 qui ont mérité la note 0 ;
– 162 qui ont mérité la note 1,

ce qui fait en tout 354 candidats, soit 42 % du total !

Il est inadmissible que la majorité des candidats à cette option ne sachent pas faire un changement de variable simple comme celui que l'on propose à la question 2 de la première partie, ou affirment (en l'énonçant parfois sous forme de théorème) que la loi d'un vecteur aléatoire est entièrement déterminée par celles de ses composantes.

Une autre façon de rendre compte de la faiblesse des candidats : le barème avait été prévu si large qu'il suffisait, pour obtenir la note 21 sur 40, d'avoir traité correctement :

Dans la première partie, les questions 1 et 2 ainsi que le cas particulier proposé à la question 3 ;
Dans la seconde partie, les questions 1, 2, 3 et 4a.

Or on constatera ci-dessous qu'il n'y a eu que 33 copies, soit une sur 25, qui aient obtenu une note au moins égale à 21.

3. Observations détaillées

Passons en revue les différentes questions et signalons les principales erreurs commises.

Partie I

A la question 1, il suffisait de remarquer que l'on a une combinaison convexe de lois de probabilité. Peu de candidats connaissaient cette propriété et ils ont donc presque tous montré que la combinaison des densités était une densité. Mais, que de difficultés pour échanger les signes $\int$ et Σ dans une somme à termes positifs ! On retrouve là la faiblesse des candidats dont se plaignent les correcteurs d'analyse.

La question 2 proposait un changement de variables classique, traité dans tous les livres d'exercices. Et pourtant, que d'erreurs : oubli ou mauvaise écriture du jacobien, erreur sur le domaine image (a-t-on bien vérifié la bijection ?), longs calculs pour trouver la densité marginale demandée alors qu'il suffisait de remarquer que le couple proposé était constitué de variables indépendantes. Ce dernier point illustre particulièrement les lacunes citées au début de ce rapport.

A la question 3, le cas particulier proposé a été souvent bien traité. Ensuite l'existence de la matrice P donne lieu à des raisonnements d'algèbre linéaire assez flous (par exemple : «on sait qu'il existe une base dans laquelle Λ et A sont diagonales...») et, surtout, beaucoup de candidats croient dur comme fer qu'une matrice de covariance est définie positive. Certains ont eu l'honnêteté de dire qu'ils se bornent à traiter ce cas ; ils en ont été récompensés. Aucun candidat n'a traité entièrement le cas général.

Partie II

A la question 1, il suffisait d'effectuer le produit matriciel et de remarquer que l'on a la fonction caractéristique habituelle d'un vecteur aléatoire dont les composantes sont les éléments de X. Hélas, la plupart des candidats se contentent de montrer que l'on connaît la loi de chacune des composantes de X, grâce à des matrices T particulières, et en déduisent que l'on connaît la loi de X (voir les observations générales ci-dessus). Une copie affirme même, péremptoirement, que les composantes d'un vecteur aléatoire sont toujours indépendantes par définition... Le cas de la matrice symétrique a bien souvent été mal traité.

Pour traiter la question 2, la plupart des candidats ont été gênés par l'insuffisance de leur réponse à la question précédente et se sont contentés de remarquer que les composantes de X étaient gaussiennes réduites. Certains ont néanmoins réussi à rattraper ici leurs erreurs précédentes.

La question 3, d'algèbre linéaire, a montré la maladresse des candidats qui n'ont pas eu l'idée d'écrire bout à bout les colonnes de la matrice, quand ils ont constaté qu'il n'aboutissaient pas en écrivant les lignes bout à bout.

La question 4a, pourtant bien classique, a été en général très maladroitement traitée, même par ceux qui avaient répondu correctement à la question 2.

En 4b, le calcul de la fonction caractéristique était facile, mais il a tout de même donné lieu à bien des erreurs, les candidats prenant prétexte de ce que «$Tr\,(AB) = Tr\,(BA)$»

pour écrire les matrices dans n'importe quel ordre, aboutissant ainsi à des produits non définis : un peu de sens critique, s'il vous plaît ! Quant à la question de l'existence d'une densité, très délicate, elle a été vue intuitivement dans quelques copies, mais elle n'a jamais été traitée entièrement.

Partie III

La question 1 a montré que les candidats ignorent la signification profonde d'une loi conditionnelle, soit qu'ils suppriment, d'autorité, les $(r-k)$ derniers termes de la colonne U_k, soit qu'ils s'obstinent à vouloir écrire une densité conditionnelle en appliquant le seul théorème relatif au conditionnement qu'ils connaissent.

La question 2 était très longue et très difficile. Elle n'a été traitée par aucun candidat, mais certains ont eu l'idée de conditionner et ont amorcé le calcul ; il leur en a été tenu compte.

A la question 3, il suffisait de signaler la convolution. Quelques candidats ont pensé à le dire, mais tous ont admis le résultat.

La question 4 était une question simple d'algèbre linéaire (orthogonalisation de Schmidt), mais très rares sont les copies qui ont traité correctement et l'existence et l'unicité. Quant à la valeur du jacobien, que d'acrobaties pour arriver à la valeur donnée par l'énoncé !

La question 5 a été traitée correctement dans quelques copies et plusieurs candidats ont gagné des points grâce aux questions 6 et 8 qui étaient assez faciles.

La fin de la partie III a été traitée dans une seule copie, celle qui a reçu la note 38.

Partie IV

Cette dernière partie n'a été abordée que dans deux copies, sans aucun résultat exact.

4. Les notes (sur 40)

Nombre de copies corrigées : 836 — Copies blanches : 108

Moyenne : 6,67 (copies blanches exclues)

Une copie a obtenu la note 38. La suivante a eu la note 31.

428 notes $\geqslant$ 3 ; 269 notes $\geqslant$ 8 ; 213 notes $\geqslant$ 10.

Répartition des notes (copies blanches exclues) par classes d'amplitude 5 :

0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40
84	331	128	84	68	17	14	1	1

oral

1. ORGANISATION DES EPREUVES

- En cette première année de mixité, les responsables du concours n'ont pas cru devoir innover : l'organisation des épreuves orales de 1976 a été calquée sur celle du concours masculin des années précédentes, à cela près que les candidats admissibles ont été répartis en trois sous-jurys (au lieu de deux), comportant chacun une commission d'algèbre et une combinaison d'analyse ; la ventilation a été faite d'après les résultats de l'écrit, les candidats classés 1 et 6, 2 et 5, 3 et 4 (modulo 6) étant respectivement affectés au premier, second, troisième sous-jury. Une rotation des examinateurs a permis d'harmoniser la conception des épreuves et leur rotation.

- Comme les années précédentes, les moyennes de notes ont été légèrement meilleures en algèbre qu'en analyse.

- Sans anticiper sur les rapports techniques qui vont suivre, peut-être est-il bon de donner quelques conseils aux futurs candidats :
  Si le candidat doit se montrer capable de dominer les programmes des classes secondaires et préparatoires, il doit se garder de se placer à un niveau trop nettement au-dessus de celui de ses connaissances ;
  Le plan doit trouver toute sa place sur le tableau — de dimensions raisonnables — qui est mis à la disposition du candidat : des passages moins importants peuvent être dits sans être écrits : par contre il est indispensable d'écrire ce qui est fondamental dans les hypothèses et conclusions des théorèmes essentiels ;
  Il est rappelé que proposer au jury d'exposer une seule partie du plan conduit automatiquement la commission à en imposer une autre. Ceci dit, le choix proposé doit être en harmonie avec le plan (ne pas privilégier les points marginaux ; ne pas éliminer les points essentiels) ; il doit aussi être raisonnable (si l'on veut que l'exposé soit conduit à son terme à la fin du temps imparti, il vaut mieux ne pas prévoir des démonstrations trop longues ou trop ambitieuses) .
  Enfin des erreurs à éviter absolument : procéder de façon trop détaillée ou trop lente, ou *a contrario* exposer à toute vitesse une vague ébauche de démonstration ; réciter de façon crispée, en restant esclave de ses notes.

En un mot, le jury souhaiterait que les candidats fassent preuve, sinon d'un sens poussé de la pédagogie, du moins de certaines qualités d'exposition.

2. EPREUVE D'ANALYSE, MECANIQUE, PROBABILITES

2.1. Observations générales

- Les futurs candidats ont intérêt à lire, ou à relire, les observations faites dans les rapports précédents, et en particulier celles qui concernent les **exemples et contre exemples ;** ces observations sont — hélas — toujours valables, et on pourrait les reproduire ici mot pour mot.

- **En ce qui concerne les sujets d'exposé :** certains sont vastes, et il est en fait impossible d'évoquer en une vingtaine de minutes tout ce qui s'y rattache ; aussi le candidat devrait-il en ce cas se limiter, c'est-à-dire **faire des choix** (quitte à les justifier) pour présenter un plan cohérent et bien centré, et les points de vue ou théorèmes laissés de côté seront éventuellement abordés par le jury au cours de la discussion (cette dernière permettant ainsi au candidat de faire montre de sa culture mathématique) ; d'autres sont plus concentrés ; il n'est pas alors question de «tenir» vingt minutes de plan à l'aide de verbiages intempestifs, mais d'enrichir le dit plan à l'aide d'exemples et d'applications ; d'autre part, il est tout à fait possible d'envisager un plan court, bien adapté à la situation, d'une dizaine de minutes.

2.2. Remarques particulières sur certains sujets

- **Exemples d'applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés et de normes de telles applications.** Le cas de la dimension finie est trop souvent laissé de côté ; dans ce cas là et aussi dans le cas général, il importe, comme le titre y invite, de savoir majorer, ou même calculer explicitement, la norme d'une application linéaire continue.

- **Fonctions convexes d'une variable réelle ; inégalités de convexité.** Le jury regrette vivement que le point de vue géométrique soit complètement ignoré ; il n'est pas interdit de «dessiner le graphe» d'une ou plusieurs fonctions convexes, et de mettre alors en évidence les rapports entre arc et corde ; de la même façon, la notion de droite d'appui, qui facilite ou éclaire beaucoup de démonstration, n'est pas évoquée ; enfin, quelques renseignements sur le comportement asymptotique des fonctions convexes seraient les bienvenus.

- **Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle ; exemples, contre-exemples.** Cet exposé, en apparence facile, a été l'occasion pour trop de candidats, d'obtenir une note déplorable.
Il s'agit d'abord de dire clairement ce qu'est une fonction continue (resp. continue en un point) : si l'on se réfère à la notion de limite, il est impossible d'esquiver à ce sujet une question légitime du jury : s'embrouiller dans les points adhérents, d'accumulation etc. laisse une impression pénible ; d'autre part, ne pas réaliser que la source de la fonction envisagée est munie de la topologie induite par la

topologie de $\mathbb{R}$, et ne pas — ou mal — exploiter ce fait conduit à des imprécisions, voire de grossières erreurs... . Qu'en est-il, par exemple, de la continuité d'une fonction en un point isolé de sa source ? ....
Par ailleurs, si l'on peut envisager un plan élémentaire où ne sont cités que les premiers théorèmes, encore faut-il que ceux-ci soient présentés dans un ordre ayant un sens mathématique, au lieu de les voir dispersés dans un fouillis, qui, s'il est parfois sympathique, conduit toujours le jury à attribuer des notes médiocres ; de même, si les polynômes sont des exemples de fonctions continues, il en est d'autres, qui font même partie du programme (somme d'une série de fonctions, **par exemple...) ...** ; ainsi le jury souhaiterait voir expliquées, fût-ce en réponse à ses questions, et/ou sur des exemples, des techniques opératoires assurant qu'une fonction est continue....
Enfin, pour ce qui est de la dérivabilité, on n'est pas obligé de se limiter à la dérivabilité d'ordre 1, et, même en s'y limitant, on doit bien mettre en évidence ce qui relève respectivement du point de vue ponctuel et du point de vue global, et encore ce qu'il y a de particulier dans le cas du but réel...

- **Problèmes de prolongement de fonctions ; exemples.** Les remarques générales concernant les sujets vastes s'appliquent ici. Sans, donc, imposer un choix, le jury ne trouverait pas anormal que soient abordés le point de vue «topologique» (prolongement d'applications continues, uniformément continues...), le point de vue «du calcul différentiel» (prolongement d'applications dérivables, différentiables, de classe C^k, C^∞...), le point de vue «fonctionnel» (fonctions exponentielle, logarithme par exemple...). On peut éventuellement, en étant assuré de ses connaissances, évoquer encore par exemple ce qui relève du théorème de Hahn-Banach (et ses applications usuelles) ; ce qui relève du prolongement analytique etc. Une fois encore, ces remarques ne se veulent ni exhaustives, ni contraignantes.

- **Problèmes d'extremum.** Certains candidats ont un peu restreint le sujet en n'envisageant que des applications du calcul différentiel aux problèmes d'extremum. Il est pourtant assez naturel d'évoquer d'importantes applications usuelles de la compacité, des problèmes de distances etc.

- **Illustrer par des exemples et contre-exemples la théorie des séries numériques.** Ici s'appliquent certaines des remarques générales : un plan traitant en fait le sujet «séries numériques», orné de quelques rares et élémentaires exemples (séries a^n, $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{(-1)^n}{n}$) n'est pas acceptable. Il vaut mieux envisager un plan court, bâti autour d'exemples variés, avec l'indication des théorèmes généraux et des réciproques inexactes qu'il s'agit d'illustrer ; dans cette optique, on sera amené à offrir de détailler un ou plusieurs des exemples en question, et à ne pas commettre la faute qui consiste à proposer d'exposer la règle de d'Alembert, ou celle de Cauchy.

- **Exposés de probabilités et de cinématique.** Il faut répéter que ces exposés ne sauraient servir de prétexte à un relâchement dans le souci de rigueur qui doit se manifester aussi bien dans les définitions et les énoncés de théorèmes que dans les démonstrations. Plus spécialement pour les probabilités, le jury s'alarme du manque de soin, voire de connaissances de certains candidats à propos des questions d'intégralité et de limites qui entrent en jeu dans cette théorie.

2.3. Liste des sujets d'analyse, de mécanique et de probabilités

1) *Applications à l'analyse de la notion de compacité.*
2) *Exemples d'espaces compacts.*
3) *Espaces homéomorphes. Exemples et contre-exemples.*
4) *Applications à l'analyse de la notion de connexité.*
5) *Théorème du point fixe ; applications.*
6) *Espaces métriques complets, espaces métriques compacts ; comparaison de ces notions.*
7) *Exemples de sous-espaces vectoriels denses d'un espace vectoriel normé ; applications.*
8) *Exemples d'applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés et de normes de telles applications.*
9) *Espaces vectoriels normés de dimension finie.*
10) *Donner une construction de* $\mathbf{R}$*; en déduire les principales propriétés de* $\mathbf{R}$.
11) *Une construction de* $\mathbf{R}$ *étant acquise, donner différentes caractérisations de* $\mathbf{R}$.
12) *Topologie de la droite numérique* $\mathbf{R}$*; droite numérique achevée.*
13) *Parties connexes de* $\mathbf{R}$ *et applications entre de telles parties.*
14) *Propriétés topologiques de* $\mathbf{R}^n$ *; exemples d'utilisation.*
15) *Limite d'une fonction numérique d'une variable réelle.*
16) *Suite de nombres réels.*
17) *Limite, limite inférieure, limite supérieure d'une suite numérique.*
18) *Approximation d'un nombre réel par des rationnels. Fractions continues.*
19) *Topologie et dénombrabilité : parties dénombrables denses, suites, suites extraites, suites de compacts...*
20) *Etude sur des exemples de suites numériques définies par une relation de récurrence.*
21) *Suites définies par une relation de la forme* $u_{n+1} = f(u_n)$, *où* f *est une fonction à valeurs réelles.*
22) *Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle ; exemples, contre-exemples.*
23) *Fonctions à variation bornée ; cas des fonctions croissantes. Applications.*
24) *Fonctions réciproques.*

25) *Fonctions implicites. Applications.*
26) *Fonctions convexes d'une ou de plusieurs variables réelles.*
27) *Fonctions convexes d'une variable réelle ; inégalités de convexité.*
28) *Problèmes de prolongement de fonctions ; exemples.*
29) *Applications différentiables. Exemples.*
30) *Fonctions de plusieurs variables réelles : formule des accroissements finis et applications.*
31) *Différentiabilité d'ordre* k *des applications d'un ouvert de* $\mathbf{R}^n$ *dans* $\mathbf{R}^p$ *; dérivées partielles.*
32) *Les différentes formules de Taylor.*
33) *Problèmes d'extremum.*
34) *Comparaison des fonctions au voisinage d'un point.*
35) *Applications des développements limités ou asymptotiques.*
36) *Fonction logarithme et fonction exponentielle d'une variable réelle.*
37) *Fonction exponentielle complexe.*
38) *Extensions de la notion de fonction exponentielle.*
39) *Fonctions circulaires directes et réciproques.*
40) *Séries à termes réels ou complexes. Exemples.*
41) *Illustrer par des exemples et contre-exemples la théorie des séries numériques.*
42) *Opérations sur les séries à termes réels ou complexes (opérations algébriques, sommation par paquets, réindexation....).*
43) *Continuité, dérivabilité, intégrabilité de la somme d'une série de fonctions d'une variable réelle.*
44) *Comparaison d'une série et d'une intégrale.*
45) *Différentes notions de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions. Exemples.*
46) *Exemples d'utilisation du critère de convergence de Cauchy (suites, séries, fonctions, ...).*
47) *Exemples de problèmes d'interversion de limites.*
48) *Séries entières.*
49) *Méthodes de développement d'une fonction en série entière. Exemples.*
50) *Série de Taylor.*
51) *Fonction* $x \mapsto e^{ix}$ *de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{C}$ *; nombre* π. *Module et argument d'un nombre complexe.*
52) *Le nombre* π.
53) *Solutions, solutions maximales des équations différentielles* $y' = f(x, y)$.
54) *Equations différentielles linéaires. Exemples.*

55) *Systèmes différentiels linéaires à cœfficients constants ; cas d'une équation différentielle d'ordre n.*

56) *Etude détaillée sur un petit nombre d'exemples d'équations différentielles non linéaires ; illustrations géométriques.*

57) *Sous-variétés différentiables de dimension 1 ou 2 de $\mathbf{R}^2$ et de $\mathbf{R}^3$; espace tangent. Exemples.*

58) *Propriétés affines locales des courbes. Exemples.*

59) *Propriétés métriques locales des courbes. Exemples.*

60) *Tracé des courbes $\overrightarrow{OM} = \vec{f}(t)$. Exemples.*

61) *Tracé des courbes $\rho = f(\theta)$. Exemples.*

62) *Rectification des courbes planes ; courbure ; recherche des courbes dont la courbure algébrique est une fonction donnée de l'arc.*

63) *Courbure et torsion des courbes en géométrie euclidienne de dimension 3 ; recherche des courbes dont la courbure et la torsion sont des fonctions données de l'arc.*

64) *Mouvement à accélération centrale.*

65) *Composition des mouvements ; applications.*

66) *Mouvement d'un repère orthonormé ; applications à la théorie des courbes gauches et à la cinématique du solide.*

67) *Mouvement d'un plan sur un plan.*

68) *Méthodes de calcul approché des solutions des équations numériques.*

69) *Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynomiales.*

70) *Théorèmes limites fondamentaux en calcul des probabilités.*

71) *Le jeu de pile ou face (variables de Bernoulli indépendantes).*

72) *Le conditionnement en calcul des probabilités. Exemples.*

73) *Loi binomiale, loi de Poisson.*

74) *Exemples de lois de distribution.*

3. EPREUVE D'ALGEBRE, GEOMETRIE

3.1. Observations générales

Le jury ne saurait mieux faire que de renvoyer aux rapports des années précédentes, et, en particulier, à celui de 1975. Il déplore, une fois de plus, la faiblesse quasi-générale des candidats en géométrie.

- Pour qu'un **plan** soit satisfaisant, il est nécessaire — sinon suffisant — que d'une part l'enchaînement logique des idées soit clairement dégagé, que, d'autre part, les énoncés des définitions et des théorèmes soient précis et rigoureux. Par ailleurs,

le jury n'apprécie pas qu'à l'occasion d'une propriété citée dans son plan, le candidat ne puisse ni en esquisser une démonstration, ni l'illustrer par des exemples.

- A propos de **l'exposé**, le candidat doit prouver qu'il a compris la démonstration et, en particulier, le bien fondé des hypothèses. Le jury regrette par ailleurs que d'aucuns se bornent à réciter ou à recopier leurs notes au tableau.

3.2. Remarques particulières sur certains sujets

Le manque de rigueur de certains candidats s'est particulièrement manifesté lors de leçons portant sur les sujets suivants :

- **Divisibilité.** La définition d'un élément irréductible et l'énoncé du théorème de décomposition sont rarement corrects. Les notions d'éléments premiers, premiers entre eux, premiers entre eux deux à deux sont parfois confondues.

- **Equations linéaires.** La démonstration du théorème fondamental, concernant l'existence de solutions, est souvent floue, ne serait-ce que parce que les notations ne sont pas toujours bien précisées.

- **Racines d'un polynôme.** Les candidats n'ont pas assez réfléchi sur les notions de corps infini, de corps de caractéristique nulle et de corps algébriquement clos. La caractérisation des racines multiples et la formule de Taylor donnent lieu à des erreurs fréquentes.

- **Valeurs propres.** La définition du polynôme caractéristique pose un problème rarement surmonté. Des phrases comme : «Si l'endomorphisme a toute ses racines dans le corps...» conduisent à des énoncés incorrects.

  Les candidats sont invités à illustrer leurs leçons par des **exemples non triviaux.** Voici quelques remarques, à ce sujet :

- **Groupes.** Les groupes définis en algèbre linéaire ou en géométrie donnent des exemples intéressants de sous-groupes, de sous-groupes distingués, de systèmes générateurs, de groupes opérant sur un ensemble.

- **Anneaux.** Il existe, dans le programme, des exemples d'anneaux non commutatifs et d'anneaux commutatifs non principaux.

  Terminons par une liste, non exhaustive, de sujets à propos desquels les candidats n'ont pas toujours su faire le **lien entre la théorie et la pratique** .

- **Espaces vectoriels.** Oubli fréquent des démonstrations constructives en dimension finie.

- **Fractions rationnelles.** S'il est nécessaire de connaître le théorème de décomposition en éléments simples, il faut aussi savoir décrire et mettre en œuvre des méthodes pratiques, permettant d'aboutir à un résultat numérique explicite.

- **Polynômes.** Il n'est pas toujours besoin de se placer dans une clôture algébrique pour qu'un polynôme donné se scinde.

- **Formes quadratiques.** La méthode de Gauss (entre autres) permet la construction d'une base orthogonale pour une forme quadratique.

- **Géométrie.** Le jury souhaiterait que les candidats soient capables d'effectuer quelques «constructions géométriques» simples par exemple celle du centre d'une similitude plane directe.

L'étude des applications affines ne doit pas se borner à l'énoncé de quelques théorèmes d'algèbre ; en particulier, la recherche des points fixes éventuels est essentielle.

3.3. Liste des sujets d'algèbre et de géométrie

1) *Exemples de structures algébriques quotients.*
2) *Groupes finis, exemples.*
3) *Groupe symétrique.*
4) *Sous-groupes distingués, exemples.*
5) *Groupe opérant sur un ensemble ; applications.*
6) *Parties génératrices d'un groupe : exemples.*
7) *Groupe engendré par un élément.*
8) *Etude d'anneaux sur quelques exemples.*
9) *Anneaux quotients de* $\mathbb{Z}$.
10) *Idéaux d'un anneau unitaire.*
11) *Anneaux principaux.*
12) *Divisibilité dans les anneaux unitaires commutatifs intègres.*
13) *Division euclidienne.*
14) *Plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun.*
15) *Nombres premiers. Applications.*
16) *Structure de corps, caractéristique, exemples.*
17) *Racines* $n^{\text{ièmes}}$ *de l'unité.*
18) *Factorisation dans l'anneau des polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif, applications.*
19) *Anneau des polynômes à une indéterminée sur un anneau.*
20) *Racines d'un polynôme à une indéterminée sur un corps commutatif ; multiplicité d'une racine.*
21) *Polynômes symétriques.*
22) *Division euclidienne et congruences dans l'anneau des polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif.*
23) *Divisibilité dans les anneaux de polynômes.*

24) *Polynômes irréductibles à une indéterminée sur un corps commutatif.*
25) *Elimination. Résultant de deux polynômes.*
26) *Valeur d'un polynôme ; fonction polynôme.*
27) *Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.*
28) *Dérivation des polynômes.*
29) *Bases et dimension dans les espaces vectoriels.*
30) *Sous-espaces d'un espace vectoriel.*
31) *Espaces vectoriels quotients.*
32) *Rang en algèbre linéaire.*
33) *Groupe linéaire.*
34) *Dualité dans les espaces vectoriels.*
35) *Formes bilinéaires sur les espaces vectoriels de dimension finie.*
36) *Formes bilinéaires alternées, groupe symplectique (en dimension finie) sur un corps de caractéristique différente de 2.*
37) *Formes multilinéaires alternées. Exemples.*
38) *Déterminants de vecteurs, d'une matrice, d'un endomorphisme. Liaison, propriétés.*
39) *Applications des déterminants.*
40) *Systèmes d'équations linéaires.*
41) *Valeurs propres, sous-espaces propres.*
42) *Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme. Applications.*
43) *Expressions matricielles réduites d'un endomorphisme d'espace vectoriel de dimension finie.*
44) *Polynôme minimal d'un endomorphisme.*
45) *Expressions matricielles réduites d'un endomorphisme d'un* $\mathbb{R}$*–espace vectoriel de dimension finie.*
46) *Formes quadratiques. Décomposition en carrés. Classification sur* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$.
47) *Réductions d'une forme quadratique.*
48) *Espaces vectoriels euclidiens (la dimension est finie).*
49) *Groupe orthogonal en dimension finie.*
50) *Espaces vectoriels hermitiens (la dimension est finie).*
51) *Groupe unitaire en dimension finie.*
52) *Dualité dans les espaces vectoriels euclidiens (la dimension est finie). Adjoint d'un endomorphisme. Endomorphismes symétriques, réduction.*
53) *Dualité dans les espaces vectoriels hermitiens. (la dimension est finie). Adjoint d'un endomorphisme. Endomorphismes auto-adjoints, réduction.*

54) *Produit vectoriel dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Applications.*

55) *Droite projective. Homographies, involutions. Cas de* $\mathbf{R}$ *et* $\mathbf{C}$.

56) *Espaces projectifs.*

57) *Dualité dans les espaces projectifs.*

58) *Barycentres.*

59) *Variétés linéaires affines dans un espace affine de dimension finie.*

60) *Applications affines et groupe affine en dimension finie.*

61) *Convexité dans un espace affine réel de dimension finie. Applications.*

62) *Symétries.*

63) *Formes réduites des isométries d'un espace affine euclidien de dimension* $\leqslant 3$.

64) *Isométries d'un espace affine euclidien (la dimension est finie).*

65) *Problèmes d'angles en géométrie métrique plane.*

66) *Isométries d'un espace affine euclidien de dimension* $\leqslant 3$*, laissant globalement invariante une partie donnée.*

67) *Similitudes planes directes et indirectes.*

68) *Torseurs.*

69) *Inversion plane.*

70) *Poles et polaires en géométrie plane.*

71) *Coniques dans le plan affine réel.*

72) *Coniques dans le plan projectif.*

73) *Coniques dans le plan affine euclidien.*

74) *Faisceaux linéaires ponctuels de coniques.*

75) *Vecteurs et sous-espaces isotropes relativement à une forme bilinéaire symétrique ou alternée.*

76) *Le cercle en géométrie plane.*

77) *Génératrices rectilignes des quadriques en dimension 3.*

78) *Utilisation des nombres complexes en géométrie.*

79) *Quadriques à centre dans un espace affine euclidien de dimension 3.*

BIBLIOTHEQUE DE L'AGREGATION

Les candidats étaient autorisés à apporter tout livre imprimé vendu dans le commerce (à l'exclusion des textes dactylographiés ou ronéotypés) et dépourvu de notes manuscrites.

En outre, ils pouvaient consulter sur place les ouvrages suivants :

ARTIN	*Algèbre géométrique* (Gauthier-Villars)
BASS	*Cours de Mathématique* (Masson) tomes 1 et 2
BERGER et GOSTIAUX	*Géométrie différentielle* (Colin)
BLANCHARD	*Corps non commutatifs* (Presses universitaires)
BOURBAKI	Les tomes suivants : *Théorie des ensembles* *Algèbre* *Fonction d'une variable réelle* *Topologie générale* *Espaces vectoriels topologiques* *Intégration*
BROUSSE	*Mécanique* (Colin)
CABANNES H.	*Cours de mécanique générale* (Dunod)
CAGNAC	*Cours de mathématiques supérieures* (Masson)
CAGNAC, RAMIS et COMMEAU	*Nouveau cours de mathématiques spéciales* (Masson)
CAGNAC et THIBERGE	*Géométrie* – Classes terminales C (Masson) *Arithmétique/Algèbre* – Classes terminales (Masson)
CARTAN	*Fonctions analytiques* (Hermann) *Formes différentielles* (Hermann) *Calcul différentiel* (Hermann)
CASANOVA	*Cours de mathématiques spéciales* (Belin)
CHAMBADAL et OVAERT	*Cours de mathématiques* (Gauthier Villars) (tome 1 – tome 2, algèbre – tome 2, analyse) *Algèbre linéaire et algèbre tensorielle* (Dunod)
CHAZEL	*Traité de mathématiques* (Hachette)
CHOQUET	*Cours d'analyse* (Masson) *L'enseignement de la géométrie* (Hermann)
CONDAMINE et VISSIO	*Mathématiques :* Terminales C et T (Delagrave)
COUTY	*Analyse* (Colin)
DIEUDONNE	*Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* (Hermann) *Sur les groupes classiques* (Hermann)

	Calcul infinitésimal (Hermann)
	Eléments d'analyse (Gauthier Villars) tomes 1 à 6
DIXMIER	*Fondements de l'analyse* (Hermann) *Analyse M.P.* (Gauthier Villars)
DONEDDU	*Arithmétique générale* (Dunod) *Cours de mathématiques spéciales* (Dunod)
DUBREIL (M. et Mme)	*Leçons d'algèbre moderne* (Dunod)
DUBUC	*Géométrie plane* (Presses universitaires)
EXBRAYAT et MAZET	*Algèbre, analyse, topologie*
FELLER	*An introduction to probability theory and its applications (Viley)* tomes 1 et 2
FRENKEL	*Algèbre et Géométrie* *Géométrie pour l'élève professeur* (Hermann)
GODEMENT	*Algèbre* (Hermann)
GOURSAT	*Cours d'analyse* (Gauthier Villars)
GOUYON	*Précis de mathématiques spéciales* (Vuibert)
HARDY G.H.	*A course of Pure Mathematics* (Cambridge University Press)
HENNEQUIN et TORTRAT	*Théorie des probabilités et quelques applications* (Masson)
HOCQUENGHEM et JAFFARD	*Mathématiques* (Masson) tomes 1 et 2
KREE	*Introduction aux Mathématiques appliquées* (Dunod)
KRIVINE	*Théorie axiomatique des ensembles* (Presses universitaires)
LANG	*Introduction aux variétés différentiables* (traduction française) *Algèbre – Linear Algebra*
LEFORT	*Mathématiques pour les sciences biologiques et agronomiques* (Colin)
Mme LELONG-FERRAND et ARNAUDIES	*Cours de mathématiques,* 4 tomes (Dunod)
Mme LELONG-FERRAND	*Géométrie différentielle* (Masson)
MAC-LANE et BIRKHOFF	*Algèbre, structures fondamentales* (traduction française) *Les grands théorèmes* (traduction française)
MAILLARD	*Classes terminales C* (Hachette)
MALLIAVIN	*Géométrie différentielle intrinsèque* (Hermann)
MARTIN P.	*Géométrie* (Colin)
METIVIER	*Introduction à la théorie des probabilités*

NEVEU J.	*Bases mathématiques du calcul des probabilités* (Masson)
PISOT et ZAMANSKY	*Mathématiques générales* (Dunod) *Algèbre et algèbre linéaire* (Dunod)
QUEYSANNE	*Algèbre* (Colin)
RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX	*Mathématiques spéciales* (Masson) tome 1 : algèbre ; tome 3 : analyse
RIESZ et NAGY	*Leçons d'analyse fonctionnelle* (Gauthier Villars)
RUDIN	*Real and complex Analysis* (Mac Grandhill)
SAMUEL	*Théorie algébrique des nombres* (Hermann)
SCHWARTZ	*Cours d'analyse* (Hermann) tomes 1 et 2
SERRE	*Cours d'arithmétique* (Presses universitaires)
VALIRON	*Cours d'analyse* (Masson) tomes 1 et 2
VAUQUOIS	*Les probabilités* (Hermann)
ZAMANSKY	*Algèbre et analyse moderne* (Dunod)
ZISMAN	*Topologie algébrique* (Colin)