PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

AVERTISSEMENT. — *Plusieurs questions de ce problème exigent d'assez longs calculs. Il est vivement conseillé de ne porter ces calculs sur la copie que lorsqu'ils aboutissent à un résultat et de soigner leur rédaction.*

Les questions ne sont pas indépendantes, mais on pourra admettre un résultat donné par l'énoncé, même si l'on n'a pas pu l'établir.

* * *

DÉFINITIONS, NOTATIONS ET RAPPELS

1° Une matrice A ayant p lignes et q colonnes est dite « d'ordre $[p, q]$ ». On désigne par $\mathcal{M}_{p,q}$ l'ensemble des matrices réelles d'ordre $[p, q]$. ${}^tA$ désigne la transposée de A.

Une matrice carrée d'ordre $[r, r]$ est dite, simplement, « d'ordre r » 1_r désigne la matrice unité d'ordre r.

On s'autorisera à confondre une matrice carrée d'ordre 1 et son unique terme.

Une matrice réelle carrée symétrique est dite « définie positive » si la forme quadratique qu'elle engendre est définie positive. On désignera par S_r^+ l'ensemble des matrices définies positives d'ordre r.

Enfin, une même notation désignera un vecteur de $\mathbf{R}^n$ et la matrice unicolonne de ses composantes.

2° Γ désigne la fonction gamma définie sur $\mathbf{R}^{+*}$ par :

$$a \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1}\, dx \ .$$

3° On désigne par $\mathcal{N}(m, \Lambda)$ la loi normale de moyenne m et de matrice de covariance Λ. On rappelle que sa fonction caractéristique est définie par :

$$u \longmapsto \exp\left\{ i\,{}^t u m - \frac{1}{2}\,{}^t u \Lambda u \right\} .$$

4° Enfin, on pourra utiliser les résultats suivants :

— si A et B sont deux matrices carrées, la matrice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ a pour déterminant le produit des déterminants de A et de B;

— si A et B sont deux matrices d'ordres respectifs $[p, q]$ et $[q, p]$, on a

$$\det(1_p - AB) = \det(1_q - BA)$$

et

$$\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA) ,$$

où « Tr » désigne la trace, c'est-à-dire la somme des éléments diagonaux.

* * *

L'objet du problème est l'étude de certaines matrices d'ordre fixé, mais dont les termes sont des variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé; de telles matrices seront dites « aléatoires ».

PREMIÈRE PARTIE

Soient a et λ deux nombres réels strictement positifs; on désigne par $\Gamma(a, \lambda)$ la loi de probabilité sur $\mathbf{R}$ dont la fonction caractéristique est définie par :

$$t \longmapsto (1 - i\lambda t)^{-a} \qquad \text{(détermination principale)}.$$

On rappelle que la densité de cette loi est définie par :

$$x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda^{-a}}{\Gamma(a)}\, e^{-x/\lambda} x^{a-1} & \text{si} \quad x > 0 \ ; \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \ . \end{cases}$$

1° Montrer que, quel que soit le nombre réel positif ou nul γ, la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\gamma/\lambda}(\gamma/\lambda)^n}{n\,!}\ \Gamma(a+n, \lambda)$$

définit une loi de probabilité. Calculer la fonction caractéristique de cette loi que l'on notera désormais $\Gamma(a, \gamma, \lambda)$.

On pourra, dans la suite, utiliser le résultat suivant : si X est une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, la loi de X^2 est

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}, m^2, 2\sigma^2\right).$$

2° Soient U et V deux variables aléatoires réelles indépendantes de lois respectives $\Gamma(a, \lambda)$ et $\Gamma(b, \lambda)$. Déterminer la loi du couple $\left(U+V, \dfrac{U}{U+V}\right)$ et calculer la densité de $\dfrac{U}{U+V}$.

3° Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbf{R}^n$ de loi $\mathcal{N}(m, \Lambda)$, et soit A une matrice carrée symétrique d'ordre n. Montrer que la fonction caractéristique de la variable aléatoire réelle ${}^tXAX$ est définie par :

$$t \longmapsto \left[\det\left(1_n - 2itA\Lambda\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{it\,{}^tm\left(1_n - 2itA\Lambda\right)^{-1}Am\right\}.$$

On pourra d'abord examiner le cas où A et Λ sont des matrices diagonales; dans le cas général, on commencera par montrer que l'on peut trouver une matrice P carrée d'ordre n telle que Λ soit égale à $P\,{}^tP$ et que ${}^tPAP$ soit diagonale.

* * *

DEUXIÈME PARTIE

Soit X une matrice aléatoire d'ordre $[p, q]$ donné.

1° Montrer que l'application

$$\varphi_X : \mathcal{M}_{p,q} \longrightarrow \mathbf{C}$$
$$T \longmapsto E\left(e^{i\mathrm{Tr}(X\,{}^tT)}\right)$$

définit la loi de probabilité de X. On appellera φ_X la fonction caractéristique de X.

Montrer que, si la matrice X est symétrique, on peut restreindre φ_X à des matrices T symétriques.

2° Déterminer la loi de X dans le cas particulier où

$$\varphi_X(T) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(T\,{}^tT) + i\,\mathrm{Tr}\,(m\,{}^tT)\right\},$$

m étant une matrice donnée d'ordre $[p, q]$. Quelle est, dans ce cas, la

densité de probabilité de X par rapport à la mesure de Lebesgue que l'on introduira naturellement sur $\mathcal{M}_{p,q}$ par analogie avec celle de $\mathbf{R}^{pq}$?

3° Soit A une matrice carrée d'ordre p. Calculer le jacobien de l'application de $\mathcal{M}_{p,q}$ dans lui-même définie par :

$$x \longmapsto Ax.$$

En déduire celui de l'application

$$x \longmapsto AxB,$$

où B désigne une matrice carrée d'ordre q.

4° Soient A et B deux matrices données d'ordres respectifs $[n, p]$ et $[q, r]$. On suppose que la loi de X est celle donnée à la question 2° ci-dessus.

a. Montrer que les colonnes de la matrice AX sont indépendantes et déterminer leurs lois de probabilité.

b. Calculer la fonction caractéristique de la matrice AXB; dans quels cas admet-elle une densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{M}_{n,r}$?

* * *

TROISIÈME PARTIE

Soit U une matrice carrée triangulaire supérieure d'ordre r dont les termes sont des variables aléatoires indépendantes. De plus, on suppose que, pour tout k $(1 \leqslant k \leqslant r)$, $U_{k,k}$, terme diagonal de U situé dans la k-ème colonne, est positif et que son carré a pour loi $\Gamma\left(a + \dfrac{k-r}{2}, 1\right)$, où a est un nombre réel donné strictement supérieur à $\dfrac{r-1}{2}$. Enfin, on suppose que tous les termes de U situés au-dessus de la diagonale ont pour loi commune $\mathcal{N}\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

1° On désigne par U_k la k-ème colonne de U. Déterminer la loi de probabilité conditionnelle de U_k à $U_{k,k}$.

2° En utilisant les résultats de la question précédente et la première partie du problème, calculer la fonction caractéristique de $U_k\,{}^tU_k$.

On pourra utiliser la relation suivante :

$$\alpha - CA^{-1}B = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & \alpha \end{pmatrix},$$

où A est une matrice carrée inversible et α un scalaire.

3° En déduire que la fonction caractéristique de la matrice $X = U\,{}^tU$ est définie par :

$$T \longmapsto \left[\det (1_r - iT) \right]^{-a} \qquad \text{(détermination principale)} .$$

4° Montrer qu'à toute matrice Ω de S_r^+ on peut faire correspondre, de façon unique, une matrice T triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que : $\Omega = T\,{}^tT$.

Donner un sens à la notion de jacobien de l'application définie par :

$$T \longmapsto T\,{}^tT$$

et montrer qu'il est égal à

$$2^r \prod_{k=1}^{r} (t_k)^k ,$$

où t_k désigne le terme diagonal de la k-ème colonne de T.

5° Soit X_{jk} le terme de X situé dans la j-ème ligne et dans la k-ème colonne. Calculer la densité de probabilité de l'ensemble des variables aléatoires $X_{j,k}$ $(1 \leqslant j \leqslant k \leqslant r)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^{\frac{r(r+1)}{2}}$. En déduire que l'application définie par :

$$x \longmapsto \frac{1}{\Gamma_r(a)} e^{-\mathrm{Tr}(x)} (\det x)^{a - \frac{r+1}{2}} ,$$

où $\Gamma_r(a) = \pi^{\frac{r(r-1)}{4}} \prod_{j=0}^{r-1} \Gamma\left(a - \frac{j}{2}\right)$, est la densité de probabilité de X par rapport à la mesure de Lebesgue que l'on introduira naturellement sur S_r^+.

6° Soit A une matrice donnée d'ordre $[r, p]$; calculer la fonction caractéristique de la matrice aléatoire $Z = {}^tAXA$. Montrer que la loi de probabilité de Z ne dépend que de p, a et $\Lambda = {}^tAA$; dans toute la suite, on désignera cette loi par $\Gamma_p(a, \Lambda)$.

7° Montrer que, si la matrice Λ est inversible, Z a une densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue sur un domaine que l'on précisera. Calculer cette densité en admettant que le jacobien de l'application définie par

$$x \longmapsto {}^tB\,x\,B ,$$

où x est une matrice carrée symétrique d'ordre p et B une matrice carrée de même ordre, est égal à $(\det B)^{p+1}$.

8° Soit x un vecteur donné de $\mathbf{R}^p$. Calculer l'espérance mathématique de ${}^txZx$ et en déduire celle de Z.

9° On suppose la matrice Λ inversible. Pour quelles valeurs du réel α la variable aléatoire $(\det Z)^\alpha$ est-elle sommable? Calculer alors son espérance mathématique.

10° On se place dans le cas particulier où $p = 2$ et où la matrice Λ est inversible. Soient Z_1 et Z_2 les termes diagonaux de Z.

a. Calculer la fonction caractéristique du couple (Z_1, Z_2).

b. Montrer, en utilisant les fonctions caractéristiques, qu'il existe des constantes β et λ, que l'on calculera, telles que la loi conditionnelle de Z_2 à Z_1 soit la loi $\Gamma(a, \beta Z_1, \lambda)$.

QUATRIÈME PARTIE

Dans toute cette partie, on donne un entier positif r et deux nombres réels a et b tels que :

$$2a + 1 > r \qquad \text{et} \qquad 2b + 1 > r .$$

On considère l'application de l'ensemble des matrices carrées symétriques inversibles d'ordre r donné dans lui-même qui fait correspondre à chaque matrice x son inverse et l'on admet que la valeur absolue du jacobien de cette application est égale à $|\det x|^{-r-1}$.

1° Soient Y une matrice aléatoire de loi $\Gamma_r(b, 1_r)$ et X une matrice aléatoire dont la loi de probabilité conditionnelle à Y est presque partout la loi $\Gamma_r(a, Y^{-1})$.

a. Calculer $E[(\det X)^\alpha]$ en précisant les valeurs réelles de α pour lesquelles cette expression existe.

b. Calculer la densité de probabilité de X et retrouver par un calcul direct le résultat de la question précédente.

c. Déterminer la loi de probabilité de X^{-1}.

d. Pour tout α réel positif, calculer

$$E\left[\left(\det(1_r+X)\right)^{-\alpha}(\det X)^{\alpha}\right] .$$

2° Soient U et V deux matrices aléatoires indépendantes de lois respectives $\Gamma_r\ (a,\ 1_r)$ et $\Gamma_r\ (b,\ 1_r)$.

a. Montrer que, quel que soit le réel positif α, la variable aléatoire

$$h(U)=E\left[\left(\det(U+V)\right)^{-\alpha}\,|\,U\right]$$

ne dépend pas de a et calculer l'intégrale

$$\int_{S_r^+} h\, d\Gamma_r(a+\alpha\,,1_r).$$

b. Calculer $E\left[\left(\dfrac{\det U}{\det(U+V)}\right)^{\alpha}\right]$ pour tout α réel positif et en déduire que la loi de la variable aléatoire $\dfrac{\det U}{\det(U+V)}$ est celle d'un produit de variables aléatoires indépendantes dont les lois respectives, que l'on précisera, sont du type obtenu à la deuxième question de la première partie.

3° Pourquoi les espérances mathématiques calculées en 1° *d.* et en 2° *b* sont-elles égales pour toute valeur de α? On admettra qu'il existe une matrice W d'ordre r telle que les deux matrices $W\,{}^tW$ et ${}^tW\,W$ aient la même loi que V.

RAPPORT SUR L'EPREUVE DE PROBABILITES ET STATISTIQUES

1. Thème du sujet

Le sujet proposait l'étude de matrices d'ordre fixé, dont les termes sont des variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé.

Il s'agissait, en quelque sorte, de vecteurs aléatoires présentés sous forme matricielle. Cela amenait à poser quelques questions qui relevaient plus de l'algèbre linéaire que du calcul des probabilités.

2. Observations générales

Les correcteurs rappellent avec insistance que l'épreuve de probabilités n'est pas une épreuve supplémentaire d'analyse ou d'algèbre. Si toutes les fautes mathématiques sont évidemment sanctionnées, le barème privilégie tout naturellement les questions faisant intervenir des techniques plus particulièrement probabilistes. Il est donc conseillé aux étudiants n'ayant aucune notion de cette branche des mathématiques de ne pas choisir l'option probabilités et statistiques.

On éviterait peut-être ainsi de constater que, sur 836 candidats qui ont composé, il y en ait eu :

- 108 qui ont remis une copie blanche ;
- 84 qui ont mérité la note 0 ;
- 162 qui ont mérité la note 1,

ce qui fait en tout 354 candidats, soit 42 % du total !

Il est inadmissible que la majorité des candidats à cette option ne sachent pas faire un changement de variable simple comme celui que l'on propose à la question 2 de la première partie, ou affirment (en l'énonçant parfois sous forme de théorème) que la loi d'un vecteur aléatoire est entièrement déterminée par celles de ses composantes.

Une autre façon de rendre compte de la faiblesse des candidats : le barème avait été prévu si large qu'il suffisait, pour obtenir la note 21 sur 40, d'avoir traité correctement :

Dans la première partie, les questions 1 et 2 ainsi que le cas particulier proposé à la question 3 ;
Dans la seconde partie, les questions 1, 2, 3 et 4a.

Or on constatera ci-dessous qu'il n'y a eu que 33 copies, soit une sur 25, qui aient obtenu une note au moins égale à 21.

3. Observations détaillées

Passons en revue les différentes questions et signalons les principales erreurs commises.

Partie I

A la question 1, il suffisait de remarquer que l'on a une combinaison convexe de lois de probabilité. Peu de candidats connaissaient cette propriété et ils ont donc presque tous montré que la combinaison des densités était une densité. Mais, que de difficultés pour échanger les signes $\int$ et Σ dans une somme à termes positifs ! On retrouve là la faiblesse des candidats dont se plaignent les correcteurs d'analyse.

La question 2 proposait un changement de variables classique, traité dans tous les livres d'exercices. Et pourtant, que d'erreurs : oubli ou mauvaise écriture du jacobien, erreur sur le domaine image (a-t-on bien vérifié la bijection ?), longs calculs pour trouver la densité marginale demandée alors qu'il suffisait de remarquer que le couple proposé était constitué de variables indépendantes. Ce dernier point illustre particulièrement les lacunes citées au début de ce rapport.

A la question 3, le cas particulier proposé a été souvent bien traité. Ensuite l'existence de la matrice P donne lieu à des raisonnements d'algèbre linéaire assez flous (par exemple : «on sait qu'il existe une base dans laquelle Λ et A sont diagonales...») et, surtout, beaucoup de candidats croient dur comme fer qu'une matrice de covariance est définie positive. Certains ont eu l'honnêteté de dire qu'ils se bornent à traiter ce cas ; ils en ont été récompensés. Aucun candidat n'a traité entièrement le cas général.

Partie II

A la question 1, il suffisait d'effectuer le produit matriciel et de remarquer que l'on a la fonction caractéristique habituelle d'un vecteur aléatoire dont les composantes sont les éléments de X. Hélas, la plupart des candidats se contentent de montrer que l'on connaît la loi de chacune des composantes de X, grâce à des matrices T particulières, et en déduisent que l'on connaît la loi de X (voir les observations générales ci-dessus). Une copie affirme même, péremptoirement, que les composantes d'un vecteur aléatoire sont toujours indépendantes par définition... Le cas de la matrice symétrique a bien souvent été mal traité.

Pour traiter la question 2, la plupart des candidats ont été gênés par l'insuffisance de leur réponse à la question précédente et se sont contentés de remarquer que les composantes de X étaient gaussiennes réduites. Certains ont néanmoins réussi à rattraper ici leurs erreurs précédentes.

La question 3, d'algèbre linéaire, a montré la maladresse des candidats qui n'ont pas eu l'idée d'écrire bout à bout les colonnes de la matrice, quand ils ont constaté qu'il n'aboutissaient pas en écrivant les lignes bout à bout.

La question 4a, pourtant bien classique, a été en général très maladroitement traitée, même par ceux qui avaient répondu correctement à la question 2.

En 4b, le calcul de la fonction caractéristique était facile, mais il a tout de même donné lieu à bien des erreurs, les candidats prenant prétexte de ce que «$Tr\,(AB) = Tr\,(BA)$»

pour écrire les matrices dans n'importe quel ordre, aboutissant ainsi à des produits non définis : un peu de sens critique, s'il vous plaît ! Quant à la question de l'existence d'une densité, très délicate, elle a été vue intuitivement dans quelques copies, mais elle n'a jamais été traitée entièrement.

Partie III

La question 1 a montré que les candidats ignorent la signification profonde d'une loi conditionnelle, soit qu'ils suppriment, d'autorité, les $(r-k)$ derniers termes de la colonne U_k, soit qu'ils s'obstinent à vouloir écrire une densité conditionnelle en appliquant le seul théorème relatif au conditionnement qu'ils connaissent.

La question 2 était très longue et très difficile. Elle n'a été traitée par aucun candidat, mais certains ont eu l'idée de conditionner et ont amorcé le calcul ; il leur en a été tenu compte.

A la question 3, il suffisait de signaler la convolution. Quelques candidats ont pensé à le dire, mais tous ont admis le résultat.

La question 4 était une question simple d'algèbre linéaire (orthogonalisation de Schmidt), mais très rares sont les copies qui ont traité correctement et l'existence et l'unicité. Quant à la valeur du jacobien, que d'acrobaties pour arriver à la valeur donnée par l'énoncé !

La question 5 a été traitée correctement dans quelques copies et plusieurs candidats ont gagné des points grâce aux questions 6 et 8 qui étaient assez faciles.

La fin de la partie III a été traitée dans une seule copie, celle qui a reçu la note 38.

Partie IV

Cette dernière partie n'a été abordée que dans deux copies, sans aucun résultat exact.

4. Les notes (sur 40)

Nombre de copies corrigées : 836 — Copies blanches : 108

Moyenne : 6,67 (copies blanches exclues)

Une copie a obtenu la note 38. La suivante a eu la note 31.

428 notes $\geqslant$ 3 ; 269 notes $\geqslant$ 8 ; 213 notes $\geqslant$ 10.

Répartition des notes (copies blanches exclues) par classes d'amplitude 5 :

0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40
84	331	128	84	68	17	14	1	1