MÉCANIQUE GÉNÉRALE

N. B. — *Ce problème comprend trois parties; l'étude de chacune d'elles est indépendante des deux autres.*

I

On se propose d'étudier le mouvement d'un solide rigide S suspendu par l'un de ses points O, fixe dans un repère galiléen qu'on pourra rapporter au système orthonormé $Oxyz$, et soumis à des forces dont le moment en O est représenté par :

$$\vec{\mathfrak{M}} = \mathrm{A} f(t)\vec{\xi} + \mathrm{A} g(t)\vec{\eta} + \mathrm{C} h(t)\vec{\zeta}$$

où $\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\zeta}$ sont les vecteurs formant système orthonormé, portés par les axes principaux d'inertie de S en O et liés à S ; A, A, C les moments d'inertie correspondants; $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ des fonctions données du temps t, localement intégrables.

1° Écrire les équations du mouvement et montrer qu'avec les notations : $\vec{\omega} = p\vec{\xi} + q\vec{\eta} + r\vec{\zeta}$, vecteur rotation instantanée de S par rapport au repère $Oxyz$, $p + iq = \pi$, $f + ig = \theta$, i désignant l'unité complexe ($i^2 = -1$), $\alpha = \dfrac{\mathrm{A} - \mathrm{C}}{\mathrm{A}}$, on est conduit au système différentiel :

$$(1) \qquad \frac{dr}{dt} = h(t), \qquad \frac{d\pi}{dt} + i\alpha r\pi = \theta(t).$$

2° Expliciter la solution du système (1) qui, pour $t = t_0$, prend la valeur $r = r_0$, $\pi = \pi_0$.

Examiner le cas où f, g, h sont constants.

3° On suppose désormais, dans la suite de cette partie I du problème, que le solide S, outre les forces déjà considérées, est soumis à des forces d'amortissement de type visqueux dont le moment en O peut être représenté par :

$$-\nu \mathrm{A} p\vec{\xi} - \nu \mathrm{A} q\vec{\eta} - \mu \mathrm{C} r\vec{\zeta}$$

ν et μ désignant des constantes positives.

Écrire le système différentiel (2) auquel obéissent r et π. On suppose f, g, h constants; montrer qu'il existe une solution stationnaire; quelle est, dans ce cas, la nature du mouvement du solide par rapport aux axes de référence ?

Exprimer la solution de (2) pour des conditions initiales quelconques; montrer qu'elle tend vers la solution stationnaire quand t tend vers $+\infty$.

4° Supposant que $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ sont des fonctions définies pour tout t réel, localement intégrables, et bornées, expliciter la solution de (2), définie pour $t \geqslant t_0$, qui, pour $t = t_0$, prend la valeur (r_0, π_0), et qu'on notera :

$$r(t\,;\, t_0, r_0, \pi_0), \quad \pi(t\,;\, t_0, r_0, \pi_0)$$

Montrer que :

$$\tilde{r}(t) = \lim_{t_0 \to -\infty} r(t\,;\, t_0, r_0, \pi_0)$$

$$\tilde{\pi}(t) = \lim_{t_0 \to -\infty} \pi(t\,;\, t_0, r_0, \pi_0)$$

existent, sont indépendantes de r_0, π_0, et constituent une solution de (2), définie et bornée sur la droite réelle $(-\infty, +\infty)$.

Établir l'unicité de la solution ayant ces caractères.

5° Établir que :

$$\lim_{t \to +\infty} |r(t\,;\, t_0, r_0, \pi_0) - \tilde{r}(t)| = 0$$

$$\lim_{t \to +\infty} |\pi(t\,;\, t_0, r_0, \pi_0| - \tilde{\pi}(t)| = 0$$

pour des conditions initiales t_0, r_0, π_0 quelconques; quelle est l'interprétation mécanique de ce résultat ?

6° Notant $\mathrm{E_R}$, $\mathrm{E_C}$ l'espace vectoriel des fonctions $u(t)$ à valeurs réelles, complexes respectivement, définies et bornées sur la droite réelle, normé par $\| u \| = \sup_t | u(t) |$, on considère l'application de $(\mathrm{E_R})^3$ dans $(\mathrm{E_C})^2$ qui à tout élément $(f, g, h) \in (\mathrm{E_R})^3$ associe $(\tilde{r}, \tilde{\pi}) \in (\mathrm{E_C})^2$, où $\tilde{r}(t)$, $\tilde{\pi}(t)$ est la solution bornée de (2) mise en évidence au § 4°.

Établir que cette application est continue; quelle est la signification mécanique de cette propriété ?

Montrer que ce résultat demeure vrai quand on considère

$$(f, g, h) \longrightarrow (\tilde{r}, \tilde{\pi})$$

comme une application de $(\mathrm{F_R})^3$ dans $(\mathrm{E_C})^2$, où $\mathrm{F_R}$ est l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles $u(t)$, définies et intégrables sur la droite réelle, normé par

$$\|u\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(s)|\,ds.$$

7° On suppose que f, g, h sont des fonctions périodiques de t, de même période T, localement intégrables et bornées.

Montrer que la solution $\tilde{r}(t)$, $\tilde{\pi}(t)$ prévue au § 4° est périodique de période T.

Montrer que, si l'excitation périodique (f, g, h) prend naissance à partir d'un instant t_0, la solution $r(t\,;\, t_0, r_0, \pi_0)$, $\pi(t\,;\, t_0, r_0, \pi_0)$ du système (2) tend asymptotiquement, quand t tend vers $+\infty$, vers une solution périodique, c'est-à-dire que toute solution est asymptotiquement périodique.

8° Une fonction $v(t)$ sera dite quasi périodique réelle, complexe, si elle peut être définie par $v(t) = \mathrm{V}(t, \ldots, t, \ldots, t)$ où $\mathrm{V}(t_1, t_2 \ldots, t_m)$ est fonction continue à valeurs réelles, complexes respectivement, de m variables réelles indépendantes $t_1, t_2, \ldots, t_m$, périodique par rapport à chacune d'elles, de périodes $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \ldots, \mathrm{T}_m$, c'est-à-dire : $\mathrm{V}(t_1, t_2, \ldots, t_j + \mathrm{T}_j, \ldots, t_m) = \mathrm{V}(t_1, t_2, \ldots, t_j, \ldots, t_m)$, $\forall\, t_1, t_2, \ldots, t_m$.

De cette définition il résulte, en particulier, que toute fonction quasi périodique $v(t)$ est continue et bornée.

On suppose que $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ sont fonctions quasi périodiques réelles de t; montrer que la solution $(\tilde{r}, \tilde{\pi})$ du système (2) est quasi périodique et a les mêmes périodes fondamentales.

Montrer que toute solution de (2) est asymptotiquement quasi périodique quand t tend vers $+\infty$.

Soit $\mathrm{G_R}$, $\mathrm{G_C}$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions $v(t)$ quasi périodiques réelles, complexes respectivement, et leurs limites uniformes sur la droite réelle.

Montrer que si $(f, g, h) \in (\mathrm{G_R})^3$, la solution $(\tilde{r}, \tilde{\pi})$ prévue au § 4° appartient à $(\mathrm{G_C})^2$.

II

1° Considérant de nouveau le système étudié dans la partie I, l'on modifie les notations de sorte que ξ_1, ξ_2, ξ_3 désignent désormais le système orthonormé d'axes principaux d'inertie en O liés à S; x_1, x_2, x_3 sont les axes orthonormés du système galiléen de référence, et

$$\vec{\omega} = p_1 \vec{\xi}_1 + p_2 \vec{\xi}_2 + p_3 \vec{\xi}_3$$

est la rotation instantanée du solide par rapport à $\mathrm{O}x_1\, x_2\, x_3$.

Avec $c_{ij} = \cos(\vec{\xi}_i, \vec{x}_j)$, tels que $\vec{\xi}_i = \sum_{1 \le j \le 3} c_{ij} \vec{x}_j$, montrer que $\mathrm{X} = \{c_{ij}\}$, matrice carrée $\{3 \times 3\}$ d'éléments c_{ij}, est solution d'une équation différentielle

$$\frac{d\mathrm{X}}{dt} = \Omega(t)\,\mathrm{X} \tag{3}$$

où $\Omega(t) = \{\omega_{ij}(t)\}$ est la matrice carrée $\{3 \times 3\}$, d'éléments

$$\omega_{ij} = \sum_{1 \le k \le 3} \varepsilon_{ijk}\, p_k\,,$$

avec $\varepsilon_{ijk} = +1, -1$ si (i, j, k) est une permutation paire, impaire respectivement de (1, 2, 3), et $\varepsilon_{ijk} = 0$ si (i, j, k) n'est pas une permutation de (1, 2, 3). On supposera que les fonctions p_j ont été calculées comme indiqué dans la partie I, de sorte que $\Omega(t)$ est une fonction continue de t, supposée connue.

Par le théorème d'existence et d'unicité pour une équation différentielle linéaire, justifier que l'équation (3) et la condition initiale

$$\mathrm{X}(0) = \mathrm{I}, \quad \mathrm{I} \text{ matrice identité,} \tag{4}$$

définissent de manière unique la matrice $\mathrm{X}(t)$.

Observant que $\Omega + \Omega^{\mathrm{tr}} = 0$ (Ω^{tr} matrice transposée de Ω), montrer que la solution unique de (3), (4) satisfait à $\mathrm{X}.\mathrm{X}^{\mathrm{tr}} = \mathrm{X}^{\mathrm{tr}}\mathrm{X} = \mathrm{I}$, $\forall\, t$ réel.

On suppose désormais dans ce paragraphe que $\Omega(t)$ est périodique en t de période T. Établir que :

$\mathrm{X}(t + \mathrm{T}) = \mathrm{X}(t).\mathrm{X}(\mathrm{T})$, et qu'il existe une matrice constante K, d'éléments réels ou complexes, inversible, telle que :

$$\mathrm{K}^{-1}.\mathrm{X}(\mathrm{T}).\mathrm{K} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\lambda \mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\lambda \mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

avec λ réel, $\varepsilon = \pm 1$.

En déduire, pour $\mathrm{X}(t)$, la représentation $\mathrm{X}(t) = \mathrm{Q}(t)\,\mathrm{Y}(t)$ où $\mathrm{Q}(t)$ est une matrice périodique de période T et

$$\mathrm{Y}(t) = \mathrm{K}.\begin{pmatrix} \gamma(t) & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\lambda t} \end{pmatrix}.\mathrm{K}^{-1}$$

avec $\gamma(t) = \exp\left\{ i(1-\varepsilon)\dfrac{\pi t}{2T} \right\}, \quad (i^2 = -1)$.

Quelle est l'interprétation mécanique de ce résultat ?

2° On suppose le corps solide S muni d'une cavité U, de frontière ∂ U, assez régulière pour garantir la validité, pour toute fonction vectorielle $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \to (f_1, f_2, f_3) = \vec{f}$, continûment différentiable dans U, de la formule :

$$\int_U \sum_{1 \leqslant j \leqslant 3} \frac{\partial f_j}{\partial \xi_j} \, d\xi = \int_{\partial U} \vec{n} . \vec{f} d\sigma$$

où $d\xi$, $d\sigma$ désignent respectivement l'élément de volume dans U, l'élément d'aire sur ∂ U, et $\vec{n}$ est le vecteur unité normal à ∂U au point courant et dirigé vers l'extérieur de U.

Les coordonnées ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont relatives à un repère orthonormé $O\xi_1\xi_2\xi_3$ lié au corps solide et dont le mouvement par rapport à $Ox_1x_2x_3$ est supposé connu.

On suppose que la cavité U est totalement remplie d'un liquide homogène de densité ρ et l'on admet que la vitesse $\vec{v}$, relativement à $Ox_1x_2x_3$, de la particule fluide qui à l'instant t se trouve au point M de coordonnées $x_1x_2x_3$ peut être représentée par :

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \vec{x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \vec{x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \vec{x_3},$$

le potentiel $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ satisfaisant en tout point M $\in$ U à l'équation :

(5) $$\Delta_x \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0 ;$$

en outre il y a glissement du fluide sur la paroi ∂U, c'est-à-dire que :

(6) $$\frac{d\varphi}{dn} = \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\right) . \vec{n}, \quad \forall\, M \in \partial U$$

avec $\dfrac{d\varphi}{dn} = \vec{n} . \overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi$, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{\omega}$ rotation instantanée de S.

a. Établir qu'il existe, pour chaque instant t, au plus une solution φ du système (5), (6); on admettra dans la suite qu'il y a existence.

b. Justifier que la solution unique de (5), (6) satisfait dans U à l'équation :

$$\Delta_\xi \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_3^2} = 0$$

où φ est exprimé à l'aide des variables ξ_1, ξ_2, ξ_3, t,

via $\xi_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant 3} c_{ij}(t) x_j$, étant rappelé que les coefficients $c_{ij}(t)$ sont des fonctions connues de t.

Avec $\vec{\omega} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant 3} p_j \vec{\xi_j}$, montrer que φ peut être représentée dans U par :

$$\varphi = \vec{\omega} . \vec{\psi} = p_1\psi_1 + p_2\psi_2 + p_3\psi_3$$

où la fonction vectorielle $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \to (\psi_1, \psi_2, \psi_3) = \vec{\psi}$ ne dépend que des variables ξ_1, ξ_2, ξ_3 et est définie uniquement par :

$$\Delta_\xi \psi_j = 0, \quad \forall\, M \in U, \quad j = 1, 2, 3$$

$$\frac{d\psi_j}{dn} = \left(\vec{r} \wedge \vec{n}\right) . \vec{\xi_j}, \quad \forall\, M \in \partial U, \quad j = 1, 2, 3,$$

avec $\dfrac{d\psi_j}{dn} = \vec{n} . \overrightarrow{\text{grad}}\, \psi_j$.

c. Montrer que les potentiels ψ_j définis à l'alinéa précédent sont tels que :

$$\int_{\partial U} \psi_i . \frac{d\psi_j}{dn} \, d\sigma = \int_{\partial U} \psi_j . \frac{d\psi_i}{dn} \, d\sigma, \quad \forall\, i, j.$$

d. Calculer le moment cinétique en O du liquide enfermé dans U dans son mouvement par rapport à $Ox_1x_2x_3$, c'est-à-dire :

$$\vec{H} = \rho \int_U \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi \, d\xi$$

et montrer que :

$$\vec{H} . \vec{\xi_i} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant 3} I_{ij} p_j$$

avec :

$$I_{ij} = \frac{\rho}{2}\int_{\partial U}\left(\psi_i \frac{d\psi_j}{dn} + \psi_j \frac{d\psi_i}{dn}\right) d\sigma .$$

Calculer l'énergie cinétique du liquide par rapport à $Ox_1x_2x_3$, soit :

$$2\,T = \rho \int_U \left(\overrightarrow{\text{grad}}\ \varphi\right)^2 d\xi$$

et établir que :

$$2\,T = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} I_{ij} p_i p_j .$$

Ainsi, du point de vue dynamique, le liquide enfermé dans U se comporte comme un corps solide dont le tenseur d'inertie relativement aux axes $\vec{\xi}_i$ est I_{ij}, et la rotation est $\vec{\omega}$.

e. Notant $\vec{u}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$ la vitesse, relativement aux axes $O\xi_1\xi_2\xi_3$, de la particule fluide qui à l'instant t se trouve en ξ_1, ξ_2, ξ_3, justifier les formules :

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \varphi - \vec{u} \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq i \leq 3} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_i} = 0 , \quad \forall\, M \in U$$

avec u_i composante de $\vec{u}$ sur $\vec{\xi}_i$.

En déduire que :

$$\rho \int \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}\right)^2 d\xi > \rho \int \left(\overrightarrow{\text{grad}}\ \varphi\right)^2 d\xi .$$

Quelle est l'interprétation mécanique de cette inégalité ?

III

On considère de nouveau un solide rigide S suspendu par l'un de ses points O, fixe dans le repère galiléen rapporté au système orthonormé $Oxyz$, et soumis à des forces dont le mouvement en O est représenté par :

$$\vec{\mathfrak{M}} = (Am + A\mu\omega^2)\,\vec{\xi}$$

où $\vec{\xi}, \vec{\eta}, \vec{\zeta}$ sont les vecteurs unité portés par les axes principaux d'inertie de S en O, A, B, C désignant les moments d'inertie correspondants, tels que $A > B > C$, m et μ sont des constantes positives, et ω est la mesure du vecteur rotation instantanée $\vec{\omega}$ de S par rapport à $Oxyz$, qu'on pourra représenter dans ce qui suit par :

$$\vec{\omega} = p\vec{\xi} + q\vec{\eta} + r\vec{\zeta} .$$

1° Utilisant les notations $a = \dfrac{B-C}{A}$, $b = \dfrac{A-C}{B}$, $c = \dfrac{A-B}{C}$, écrire le système différentiel auquel obéit (p, q, r). Introduisant la variable φ définie par $d\varphi = p\,dt$ montrer qu'on peut exprimer q et r en fonction de φ sous la forme :

$$q = \delta\sqrt{b}\,\cos\left(\sqrt{bc}\,.\,\varphi + \sigma_0\right)$$
$$r = \delta\sqrt{c}\,\sin\left(\sqrt{bc}\,.\,\varphi + \sigma_0\right)$$

δ et σ_0 désignant des constantes d'intégration.

2° Étudier le mouvement dans le cas où $\delta = 0$.

3° On suppose désormais $\delta \neq 0$; écrire l'équation différentielle du second ordre qui régit la fonction $\varphi(t)$.

4° Par une suite de transformations simples qu'on explicitera, on peut transformer l'équation obtenue à l'alinéa précédent en :

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} - \mu_1\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 = k + \sin\theta \tag{7}$$

avec $\theta = 2\sqrt{bc}\,.\,\varphi + 2\sigma_0 + 2\sigma_1$, $\tau = \sqrt{2D\sqrt{bc}}\,.\,t$, $\mu_1 = \dfrac{\mu}{2\sqrt{bc}}$

$$\text{tg}\ 2\sigma_1 = \mu\frac{b-c}{a\sqrt{bc}}, \quad D = \frac{\delta^2}{2}\left[\mu^2(b-c)^2 + bca^2\right]^{1/2}$$

$$k = \frac{m}{D} + \mu\frac{\delta^2(b+c)}{2D} .$$

5° Écrire l'équation différentielle linéaire du 1er ordre à laquelle satisfait $u = \left(\dfrac{d\theta}{d\tau}\right)^2$, considérée comme fonction de θ. Exprimer la solution générale de cette équation.

Déterminer les solutions stationnaires de (7); en exprimer les conditions d'existence et de stabilité (en particulier on précisera une condition d'existence indépendante des conditions initiales de q et r).

Établir l'existence de solutions périodiques; calculer les périodes.

6° Montrer que l'étude des mouvements voisins de celui qui correspond à une solution stationnaire stable revient à rechercher les solutions périodiques d'une équation différentielle :

$$\frac{d^2\chi}{d\tau^2} + \omega_0{}^2\chi = \mu_1\left(\frac{d\chi}{d\tau}\right)^2 + F(\chi) \tag{8}$$

où $F(\chi)$ est fonction holomorphe de χ dans un voisinage de 0, et peut être représentée par la série convergente :

$$F(\chi) = \beta_2\chi^2 + \beta_3\chi^3 + \dots$$

Interpréter ω_0, β_2, β_3 au moyen de θ_0, valeur stationnaire de θ.

On cherche à représenter les solutions périodiques de (8) en fonction d'un paramètre λ tel que :

$$\chi(0) = \lambda\,, \quad \frac{d\chi}{d\tau}(0) = 0\,. \tag{9}$$

Dire pourquoi les conditions (9) ne sont pas incompatibles et expliquer la signification de λ, paramètre qui mesure en quelque sorte l'amplitude du mouvement périodique.

On s'attend que la période du mouvement, inconnue *a priori*, dépende de λ; c'est pourquoi on fait dans (8) le changement de variable $\tau \to s$ défini par :

$$\tau = \frac{s}{\omega_0}(1 + h_1\lambda + h_2\lambda^2 + \dots) \tag{10}$$

où h_1, h_2, ... sont des quantités numériques qu'on précisera ultérieurement.

On écrira l'équation transformée de (8) par (10) et on en cherchera des solutions représentables par la série :

$$\chi = \lambda \cos s + \lambda^2\chi_2(s) + \lambda^3\chi_3(s) + \dots + \lambda^j\chi_j(s) + \dots$$

où $\chi_2(s)$, $\chi_3(s)$, ..., $\chi_j(s)$, ... sont périodiques de période 2π et satisfont aux conditions initiales : $\chi_j(0) = \dfrac{d\chi_j(0)}{ds} = 0$.

Écrire l'équation vérifiée par $\chi_2(s)$; montrer que cette équation ne peut admettre de solution périodique de période 2π que si h_1 est convenablement choisi; déterminer $\chi_2(s)$.

Écrire ensuite l'équation vérifiée par $\chi_3(s)$; on montrera que h_2 est déterminé par la condition d'existence de solution périodique; expliciter $\chi_3(s)$.

Indiquer comment l'on pourrait calculer successivement h_3, ... et χ_4, ..., etc.

RAPPORT SUR L'EPREUVE DE MECANIQUE GENERALE

1. Thème du sujet

L'orientation d'un véhicule spatial par rapport aux étoiles est, on le sait, commandée par la mise en œuvre de moteurs fusée qui, solidaires du véhicule, exercent sur celui-ci et relativement à des axes liés, des efforts connus en fonction du temps. Inspiré très schématiquement de ce problème de mécanique spatiale, le texte proposait à l'attention des candidats l'étude de certaines propriétés du mouvement autour de son centre d'inertie d'un corps solide ou d'un système solide liquide, soumis à des forces données par référence à celui-ci.

2. Solution du problème

I

1 — Les équations d'Euler du mouvement deviennent, avec les notations du texte :

$$\frac{dr}{dt} = h(t)\,, \quad \frac{d\pi}{dt} + i\,\alpha r\,\pi = \theta(t) \tag{1}$$

2 — On a $r(t) = r_0 + \int_{t_0}^{t} h(s)\,ds$, puis $\dfrac{d\pi}{dt} + i\,\alpha r(t)\,\pi = \theta(t)$,

équation linéaire qu'on intègre par la méthode usuelle, d'où :

$$\pi(t) = \left\{\pi_0 + \int_{t_0}^{t} \exp\left[i\alpha \int_{t_0}^{\tau} r(s)\,ds\right].\,\theta(\tau)\,d\tau\right\} \exp\left[-i\alpha\int_{t_0}^{t} r(s)\,ds\right]$$

3 — Dans le cas de l'amortissement visqueux, les équations du mouvement sont :

$$\frac{dp}{dt} - \alpha q\,r = f(t) - \nu p \qquad \mu, \nu > 0 \tag{2}$$

$$\frac{dq}{dt} + \alpha r\,p = g(t) - \nu q \tag{3}$$

$$\frac{dr}{dt} = h(t) - \mu r \tag{4}$$

Cas où f, g, h sont constants : le système (2), (3), (4) a une solution stationnaire unique définie par :

$$\nu p - \alpha q r = f, \ \nu q + \alpha p r = g, \ \mu r = h.$$

Si les valeurs initiales de p, q, r sont prises égales à la solution de ce système, la rotation du solide demeurera constante par rapport aux axes liés et, par conséquent, le sera aussi par rapport aux axes de référence.

Le mouvement sera dans ce cas une rotation uniforme autour d'un axe de direction invariable.

Cas de conditions initiales quelconques : la solution s'écrit :

$$r(t) = e^{-\mu(t-t_0)} r_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\mu(t-s)} h\, ds \tag{5}$$

$$\pi(t) = \left\{ \pi_0 + \int_{t_0}^{t} \theta \exp\left[\int_{t_0}^{\tau} (\nu + i\alpha r(s))\, ds \right] d\tau \right\} \exp\left[- \int_{t_0}^{t} (\nu + i\alpha r(s)\, ds) \right]$$

On peut vérifier à partir de ces formules que $r(t)$ et $\pi(t)$ ont pour limites quand $t \to +\infty$, $\frac{h}{\mu}$ et $\frac{\theta\mu}{\mu\nu + i\alpha h}$ respectivement.

4 – Dans le cas où $f(t), g(t), h(t)$ sont localement intégrables on obtient :

$$r(t) = r(t\,;t_0, r_0, \pi_0) = e^{-\mu(t-t_0)} r_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\mu(t-s)} h(s)\, ds \tag{6}$$

$$\pi(t) = \pi(t\,; t_0, r_0, \pi_0) = \left\{ \pi_0 + \int_{t_0}^{t} \theta(\tau) \exp\left[\int_{t_0}^{\tau} (\nu + i\alpha r(s))\, ds \right] d\tau \right\} \exp\left[- \int_{t_0}^{t} (\nu + i\alpha r(s)) ds \right]$$

ou

$$\pi(t) = \pi_0 \exp\left[- \int_{t_0}^{t} (\nu + i\alpha r(s)) ds \right] + \int_{t_0}^{t} \theta(\tau) \exp\left[- \int_{\tau}^{t} (\nu + i\alpha r(s)) ds \right] d\tau \tag{7}$$

Faisant tendre t_0 vers $-\infty$, on obtient formellement :

$$\tilde{r}(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\mu(t-s)} h(s)\, ds \tag{8}$$

$$\tilde{\pi}(t) = \int_{-\infty}^{t} \theta(\tau) \exp\left[- \int_{\tau}^{t} (\nu + i\alpha \tilde{r}(s)) ds \right] d\tau \tag{9}$$

On justifie ces résultats dans le cas où $h(t), \theta(t)$ sont bornées sur la droite réelle, en notant que

$$\int_{t_0}^{t_1} \theta(\tau) \exp\left[- \int_{\tau}^{t} (\nu + i\alpha r(s)) ds \right] d\tau, \ \int_{-\infty}^{t_1} \theta(\tau) \exp\left[- \int_{\tau}^{t} (\nu + i\alpha \tilde{r}(s)) ds \right] d\tau,$$

majorés par $\|\theta\| \int_{t_0}^{t_1} e^{-\nu(t-\tau)} d\tau$, $\|\theta\| \int_{-\infty}^{t_1} e^{-\nu(t-\tau)} d\tau$

avec $\|\theta\| : \sup_{s \in \mathbf{R}} |\theta(s)|$, peuvent être rendus arbitrairement petits pour tout t_0 tel que $t_0 \leqslant t_1 < t$, avec t_1 convenablement choisi, et que, de l'estimation

$$|r(s) - \tilde{r}(s)| \leqslant (|r_0| + \mu^{-1} \|h\|) e^{-\mu(s-t_0)}, \ s \geqslant t_0 \tag{10}$$

l'on peut conclure que $r(s) - \tilde{\pi}(s)$ tend vers 0 quand $t_0 \to -\infty$, uniformément par rapport à s appartenant à tout intervalle compact.

On vérifie facilement que $\tilde{r}(t), \tilde{\pi}(t)$ définis par (8), (9) sont bornées sur la droite réelle et solution de (2), (3), (4). Il y a unicité d'une telle solution ainsi qu'on le voit en raisonnant d'abord sur (2) puis sur (3), (4).

5.– Il est évident que $\lim_{t \to +\infty} |r(t) - \tilde{r}(t)| = 0$. Il s'agit ensuite de comparer $\pi(t)$ et $\tilde{\pi}(t)$.

Notant que :

$$\left| \int_{-\infty}^{t_0} \theta(\tau) \exp\left[\int_{\tau}^{t} (\nu + i\alpha \tilde{r}(s)) ds \right] d\tau \right| \leqslant \|\theta\| \int_{-\infty}^{t_0} e^{-\nu(t-\tau)} d\tau = \frac{\|\theta\|}{\nu} e^{-\nu(t-t_0)}$$

tend vers 0 quand $t \to +\infty$, l'on voit qu'il est suffisant d'établir que :

$$\int_{-\infty}^{t} \theta(\tau) \left\{ \exp\left[-\int_{\tau}^{t} (\nu + i\alpha r(s))ds\right] - \exp\left[-\int_{\tau}^{t} (\nu + i\alpha \tilde{r}(s))ds\right] \right\} d\tau$$

tend vers 0 quand $t \to +\infty$. Or cette différence est majorée par :

$$2\,\|\theta\| \int_{-\infty}^{t} e^{-\nu(t-\tau)} \sin\left[\frac{\alpha}{2} \int_{\tau}^{t} (r(s) - \tilde{r}(s))\,ds\right] d\tau$$

$$= 2\,\|\theta\| \int_{0}^{+\infty} e^{-\nu\sigma} \sin\left[\frac{\alpha}{2} \int_{t-\sigma}^{t} (r(s) - \tilde{r}(s))\,ds\right] d\sigma$$

expression qui tend vers 0 quand $t \to +\infty$, car l'intégrale intérieure tend vers 0 quand $t \to +\infty$, uniformément par rapport à σ appartenant à tout intervalle compact, en raison de (10).

6 – **Stabilité de la solution bornée relativement au moment** *(f, g, h)*

Soient $(\tilde{r}, \tilde{\pi})$, $(\tilde{r}_1, \tilde{\pi}_1)$ les solutions bornées qui correspondent aux données (f, g, h), (f_1, g_1, h_1). De (8) on déduit :

$$|\tilde{r} - \tilde{r}_1| = \left|\int_{-\infty}^{t} e^{-\mu(t-s)} (h(s) - h_1(s))ds\right| < \frac{1}{\mu} \operatorname{Sup}_s |h(s) - h_1(s)|$$

d'où : $\|\tilde{r} - \tilde{r}_1\| \leqslant \frac{1}{\mu} \|h - h_1\|$, et de (9) :

$$\tilde{\pi} - \tilde{\pi}_1 = \int_{-\infty}^{t} (\theta - \theta_1) \exp\left[-\int_{\tau}^{t} (\nu + i\alpha\tilde{r}(s))\,ds\right] d\tau$$

$$+ \int_{-\infty}^{t} \theta_1 \left\{ \exp\left[-\int_{\tau}^{t} (\nu + i\alpha\tilde{r}(s))\,ds\right] - \exp\left[-\int_{\tau}^{t} (\nu + i\alpha\tilde{r}_1(s))\,ds\right] \right\} d\tau$$

d'où :

$$|\tilde{\pi}(t) - \tilde{\pi}_1(t)| \leqslant \int_{-\infty}^{t} |\theta(\tau) - \theta_1(\tau)| \exp[-\nu(t-\tau)]\,d\tau$$

$$+ \int_{-\infty}^{t} |\theta_1(\tau)|\, |\exp[-\nu(t-\tau)]|\, \left|\exp\left(-\int_{\tau}^{t} i\alpha\tilde{r}(s)\,ds\right) - \exp\left(-\int_{\tau}^{t} i\alpha\tilde{r}_1(s)\,ds\right)\right| d\tau$$

Compte tenu de $|e^{i\epsilon} - 1| < |\epsilon|$, ϵ réel, il vient :

$$\|\tilde{\pi} - \tilde{\pi}_1\| \leqslant \frac{1}{\nu} \|\theta - \theta_1\| + 2\int_{-\infty}^{t-l} |\theta_1(\tau)|\, e^{-\nu(t-\tau)} d\tau + \alpha l \int_{t-l}^{t} |\theta_1(\tau)|\, d\tau \,.\, \|\tilde{r} - \tilde{r}_1\| \qquad (11)$$

ou :

$$\|\tilde{\pi} - \tilde{\pi}_1\| \leqslant \frac{1}{\nu} \|\theta - \theta_1\| + \frac{2}{\nu} e^{-\nu l} \|\theta_1\| + \alpha l^2 \|\theta_1\|\, \|\tilde{r} - \tilde{r}_1\|$$

formule d'après laquelle s'établit aisément la propriété de continuité.

On considère maintenant le cas où f, g, h sont telles que

$$|||f||| = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(s)|\, ds < +\infty \qquad \text{etc.}$$

Il convient de remarquer que les formules (8), (9) ont un sens et définissent une solution de (2), (3), (4) bornée sur la droite réelle.

Partant de (8) on a :

$$|\tilde{r} - \tilde{r}_1| = \left|\int_{-\infty}^{t} e^{-\mu(t-s)} (h(s) - h_1(s))ds\right| < \int_{+\infty}^{+\infty} |h(s) - h_1(s)|\, ds = |||h - h_1|||$$

d'où : $\|\tilde{r} - \tilde{r}_1\| \leqslant |||h - h_1|||$

et de (9) l'on obtient, en suivant le raisonnement qui a conduit à (11) :

$$\|\tilde{\pi} - \tilde{\pi}_1\| \leqslant |||\theta - \theta_1||| + 2e^{-\nu l}\, |||\theta_1||| + \alpha l\, |||\theta_1||| \cdot \|\tilde{r} - \tilde{r}_1\|$$

d'où la conclusion.

7 – On peut représenter

$$\tilde{r}(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{\mu\sigma}\, h(t+\sigma)\, d\sigma \qquad (12)$$

$$\tilde{\pi}(t) = \int_{-\infty}^{0} \theta(t+\sigma) \exp\left[-\int_{\sigma}^{0} (\nu + i\alpha\tilde{r}(t+s))\,ds\right] d\sigma$$

d'où il suit que si h et θ sont périodiques en t de période T, $\tilde{r}(t)$ et $\tilde{\pi}(t)$ seront aussi périodiques de même période.

Il est clair que si l'excitation périodique prend naissance à partir d'un instant t_0, la solution $r(t\,;t_0, r_0, \pi_0), \pi(t\,;t_0, r_0, \pi_0)$ du système (2), (3), (4) tend, lorsque $t \to +\infty$, d'après les conclusions antérieures, vers la solution $\tilde{r}(t), \tilde{\pi}(t)$ du même système, qu'on peut définir après qu'on a prolongé dans le sens des t négatifs, par périodicité, les termes qui définissent l'excitation c'est-à-dire h et θ.

8.– Si f, g, h, c'est-à-dire h et θ sont quasi périodiques, on peut écrire $h = \mathrm{H}(t,\dots, t)$, $\theta = \Theta(t, \dots, t)$, $\mathrm{H}(t_1, t_2 \dots t_p)$, $\Theta(t_1, \dots, t_q)$ périodiques en t_i, t_j respectivement de période $\mathrm{T}_i, \mathrm{T}'_j$. Il est clair qu'on peut toujours, par un jeu d'écriture, ne considérer que le cas où $p = q = m$ et $\mathrm{T}_i = \mathrm{T}'_i$. Des formules (12) et (13) on obtient :

$\tilde{r}(t) = \tilde{\mathrm{R}}(t, \dots, t)$, $\tilde{\pi}(t) = \tilde{\Pi}(t, \dots, t)$ avec :

$$\tilde{\mathrm{R}}(t_1, \dots, t_m) = \int_{-\infty}^{0} e^{\mu\sigma}\, \mathrm{H}(t_1 + \sigma, t_2 + \sigma, \dots, t_m + \sigma / d\sigma$$

$$\tilde{\Pi}(t_1, \dots, t_m) = \int_{-\infty}^{0} \Theta(t_1 + \sigma, \dots, t_m + \sigma) \exp\left[-\int_{\sigma}^{0} (\nu + i\alpha \tilde{\mathrm{R}}(t_1 + s, \dots, t_m + s)) ds\right] d\sigma$$

d'où il suit que $\tilde{r}(t)$ et $\tilde{\theta}(t)$ sont quasi périodiques avec les mêmes fréquences fondamentales.

Si $(f, g, h) \in \mathrm{G}_{\mathbf{R}}^{3}$, il est clair que $(\tilde{r}, \tilde{\pi}) \in \mathrm{G}_{\mathbf{C}}^{2}$ en vertu des propriétés de continuité établies au § 6.

II

1. Calculant la vitesse de $\vec{\xi}_i = \sum_j c_{ij} \vec{x}_j$, de deux manières, on obtient :

$$\frac{d\vec{\xi}_i}{dt} = \sum_j \frac{dc_{ij}}{dt} \vec{x}_j = \vec{\omega} \wedge \vec{\xi}_i = \sum_l p_l \vec{\xi}_l \wedge \vec{\xi}_i = \sum_{k,l} \epsilon_{kli} p_l \vec{\xi}_k = \sum_{k,l,j} \epsilon_{k,l,i} p_l c_{k,j} \vec{s}_j$$

d'où : $$\frac{dc_{ij}}{dt} = \sum_{k,l} \epsilon_{i,k,l}\, p_l\, c_{k,j}$$

c'est-à-dire : $$\frac{d\mathrm{X}}{dt} = \Omega(t)\,\mathrm{X} \qquad (14)$$

avec $$\mathrm{X} = \left\{c_{ij}\right\}, \quad \Omega = \left\{\sum_l \epsilon_{ikl}\, p_l\right\} \qquad (15)$$

L'équation (14) et la condition initiale $\mathrm{X}(0) = \mathrm{I}$ (qui postule qu'on a choisi pour système de référence x_1, x_2, x_3 le système $\xi_1\, \xi_2\, \xi_3$ dans sa position à l'instant 0) définissent de manière unique la matrice $\mathrm{X}(t)$.

Il est évident de $\epsilon_{ikl} = -\epsilon_{kil}$ que : $\Omega + \Omega^{tr} = 0$.

D'autre part, on peut écrire :

$$\frac{d\,\mathrm{X}^{tr}\mathrm{X}}{dt} = \frac{d\mathrm{X}^{tr}}{dt}\mathrm{X} + \mathrm{X}^{tr}\frac{d\mathrm{X}}{dt} = \mathrm{X}^{tr}(\Omega^{tr} + \Omega)\mathrm{X} = 0$$

et par conséquent $\mathrm{X}^{tr}\mathrm{X} = \mathrm{I}$, puisque $\mathrm{X}^{tr}(0) = \mathrm{X}(0) = \mathrm{I}$.

De ce résultat on déduit que $|\,\mathrm{dét}\ \mathrm{X}\,| = 1$ et puisque $\mathrm{X}(t)$ est à valeurs réelles, continue et $\mathrm{X}(0) = \mathrm{I}$, on peut assurer que dét $\mathrm{X}(t) = 1$.

La matrice $\mathrm{X}(t)$ est inversible ; multipliant à gauche $\mathrm{X}^{tr}\mathrm{X} = \mathrm{I}$ par X, on obtient $(\mathrm{X}\mathrm{X}^{tr} - \mathrm{I})\,\mathrm{X} = 0$ et par multiplication à droite par X^{-1} : $\mathrm{X}\mathrm{X}^{tr} = \mathrm{I}$.

Aussi la matrice $\mathrm{X}(t)$ est unitaire (résultat auquel on s'attendait compte tenu de sa définition géométrique).

On suppose désormais que $\Omega(t)$ est périodique en t de période T (ce qui sera le cas pour la solution asymptotique, si l'excitation est périodique).

La relation : $\mathrm{X}(t + \mathrm{T}) = \mathrm{X}(t)\,\mathrm{X}(\mathrm{T})$ (16)

résulte du fait que $\mathrm{X}(t + \mathrm{T})$, $\mathrm{X}(t)\,\mathrm{X}(\mathrm{T})$ sont solutions de (14) et prennent pour $t = 0$ même valeur ; l'égalité suit du théorème d'unicité.

La matrice $\mathrm{X}(\mathrm{T})$ étant unitaire, réelle et de déterminant égal à $+1$, a pour valeurs propres $1, e^{i\sigma\mathrm{T}}, e^{-i\sigma\mathrm{T}}$, avec σ réel et peut être rendue diagonale ; c'est dire qu'il existe une matrice K, inversible, à éléments complexes telle que :

$$K^{-1} . X(T) . K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\sigma T} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\sigma T} \end{pmatrix} \qquad (17)$$

Avec

$$Y(t) = K \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\sigma t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\sigma t} \end{pmatrix} . K^{-1} \qquad (18)$$

On note que : $Y^{-1}(t) = Y(-t)$, $Y(t+s) = Y(t).Y(s)$ et avec (16) que :

$X(t+T)Y^{-1}(t+T) = X(t)X(T)Y(-t-T) = X(t)X(T)Y(-T)Y(-t)$.

Mais par (17) et (18) on a : $X(T)Y(-T) = I$, de sorte que :

$X(t+T)Y^{-1}(t+T) = X(t)Y^{-1}(t), \forall t$.

La matrice $Q(t) = X(t).Y^{-1}(t)$ est donc périodique de période T, et l'on obtient la représentation : $X(t) = Q(t).Y(t)$.

D'après (18), $Y(t)$ est périodique de période $\dfrac{2\pi}{\sigma}$ (Y est constante si $\sigma = 0$).

La matrice $X(t)$ est donc quasi périodique avec deux périodes fondamentales T et $\dfrac{2\pi}{\sigma}$ $(\sigma \neq 0)$.

2. a) Il existe au plus une fonction $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ satisfaisant à :

$$\Delta_x \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0, \ \forall (x_1, x_2, x_3) \in U \qquad (19)$$

$$\frac{d\varphi}{dn} = (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) . \vec{n} \quad , \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \partial U \qquad (20)$$

Il suffit de montrer que $\Delta_x \tilde{\varphi} = 0$ dans U et $\dfrac{d\tilde{\varphi}}{dn} = 0$ sur ∂U, implique $\tilde{\varphi} =$ const. ; partant de :

$$\int_U \tilde{\varphi} \Delta_x \tilde{\varphi}\, dx + \int_U (\vec{\text{grad}}_x \tilde{\varphi})^2 dx = \int_U \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) dx$$

$$= \int_{\partial U} \sum_j \tilde{\varphi} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_j} n_j \, d\sigma = \int_{\partial U} \tilde{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{dn} d\sigma = 0.$$

Il reste : $\displaystyle\int_U (\vec{\text{grad}}_x \tilde{\varphi})^2 dx = 0$ qui entraîne $\text{grad}_x \tilde{\varphi} = 0$ dans U et $\tilde{\varphi} =$ const.

b) Puisque la transformation de coordonnées $x \to \xi$ est orthogonale, il y a invariance du Laplacien de sorte que, φ exprimé à l'aide des coordonnées ξ_1, ξ_2, ξ_3, t

vérifie : $\displaystyle\Delta_\xi \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_3^2} = 0.$

Avec $\vec{\omega} = \sum_j p_j \vec{\xi}_j$, on cherche une représentation de φ sous la forme :

$\varphi = \vec{\omega} . \vec{\psi} = p_1 \psi_1 + p_2 \psi_2 + p_3 \psi_3$, avec $\psi_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, ne dépendant que des variables ξ_1, ξ_2, ξ_3 et non de t.

Interprétant (20) : $\dfrac{d\varphi}{dn} = \vec{\omega} \dfrac{d\vec{\psi}}{dn} = \vec{\omega} . (\vec{r} \wedge \vec{n})$, l'on voit qu'on satisfait à (19) et (20) en définissant $\psi_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ comme la solution unique de :

$$\Delta \psi_j = 0 \quad \text{dans } U \qquad (21)$$

$$\frac{d\psi_j}{dt} = (\vec{r} \wedge \vec{n}) . \vec{\xi}_j \quad \text{sur } \partial U \qquad (22)$$

c) Avec $\vec{n} = \sum_l \nu_l \vec{\xi}_l$, on a :

$$\int_{\partial U} \psi_i \frac{d\psi_j}{dn} d\sigma = \int_{\partial U} \sum_l \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi_l} \nu_l \, d\sigma = \int_U \sum_l \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left(\psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi_l}\right) d\xi$$

$$= \int_U \sum_l \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi_l} \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi_l} d\xi \text{, en raison de } \Delta \psi_j = 0$$

d'où la relation de symétrie :

$$\int_{\partial U} \psi_i \frac{d\psi_j}{dn} d\sigma = \int_{\partial U} \psi_j \frac{d\psi_i}{dn} d\sigma$$

d) On calcule le moment cinétique du fluide :

$$\vec{H} = \rho \int_U \vec{OM} \wedge \vec{\text{grad}}\ \varphi\, d\xi\ ;$$

on peut écrire :

$$\vec{H}.\vec{\xi}_i = \rho \int_U \sum_{j,k} \epsilon_{ijk}\, \xi_j \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_k}\, d\xi = \rho \int_U \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial \xi_k} (\epsilon_{ijk}\, \xi_j \varphi)\, d\xi$$

$$= \rho \int_{\partial U} \sum_{j,k} \epsilon_{ijk}\, \xi_j\, \varphi \nu_k\, d\sigma = \rho \int_{\partial U} (\vec{r} \wedge \vec{n}) . \vec{\xi}_i \varphi\, d\sigma$$

c'est-à-dire, d'après (22) :

$$\text{H}.\xi_i = \rho \int_{\partial U} \frac{d\psi_i}{dn} \varphi d\sigma = \sum_j (\rho \int_{\partial U} \frac{d\psi_i}{dn} \psi_j\, d\sigma)\, p_j$$

ou avec : $\text{I}_{ij} = \dfrac{\rho}{2} \displaystyle\int_{\partial U} (\psi_i \frac{d\psi_j}{dn} + \psi_j \frac{d\psi_i}{dn})\, d\sigma,$

$$\vec{H}.\vec{\xi}_i = \sum_j \text{I}_{ij}\, p_j \tag{23}$$

L'énergie cinétique est :

$$2\,\text{T} = \rho \int_U (\vec{\text{grad}}\, \xi \varphi)^2 d\xi = \rho \int_U (\sum_j p_j \vec{\text{grad}}\ \psi_j)(\sum_l p_l \vec{\text{grad}}\ \psi_l)\, d\xi$$

$$= \sum_{j,l} \rho\, p_j p_l \int_U \vec{\text{grad}}\ \psi_j\ \vec{\text{grad}}\ \psi_l\, d\xi .$$

En outre :

$$\int_U \vec{\text{grad}}\ \psi_j\ \vec{\text{grad}}\ \psi_l\, d\xi = \int_U \sum_k \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi_k} \frac{\partial \psi_l}{\partial \xi_k}\, d\xi = \int_U \sum_k (\frac{\partial}{\partial \xi_k} (\psi_j \frac{\partial \psi_l}{\partial \xi_k}) - \psi_j \frac{\partial^2 \psi_l}{\partial \xi_k^{\,2}})\, d\xi$$

$$= \int_{\partial U} \sum_k \psi_j \frac{\partial \psi_l}{\partial \xi_k} \nu_k\, d\sigma = \int_{\partial U} \psi_j \frac{d\psi_l}{dn}\, d\sigma = \rho^{-1}\, \text{I}_{jl}$$

d'où : $$2\,\text{T} = \sum_{j,l} \text{I}_{jl}\, p_j\, p_l \tag{24}$$

Les formules (23) et (24) montrent que du point de vue dynamique, le liquide enfermé dans la cavité U se comporte comme un corps solide dont le tenseur d'inertie relativement aux axes ξ est I_{ij} et la rotation par rapport aux axes de référence est $\vec{\omega}$.

e) Par le théorème de composition des vitesses il est clair que : $\vec{\text{grad}}\,\varphi = \vec{u} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$, $\vec{u}$ désignant la vitesse, par rapport au système ξ, de la particule fluide qui à l'instant t est en (ξ_1, ξ_2, ξ_3)

De cette formule on déduit :

$$0 = \Delta_\xi \varphi = \text{div}_\xi\, \text{grad}_\xi \varphi = \text{div}_\xi\, \vec{u} + \text{div}_\xi\, \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

Mais $\text{div}_\xi\, (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = 0$, d'où $\displaystyle\sum_i \frac{\partial u_i}{\partial \xi_i} = 0.$

Partant de $\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \vec{\text{grad}}\,\varphi - \vec{u}$, on obtient :

$$\int_U \rho (\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2 d\xi = \int_U \rho (\vec{\text{grad}}\,\varphi)^2 d\xi + \int_U \rho \vec{u}^2 d\xi - 2 \int_U \rho\, \vec{\text{grad}}\,\varphi . \vec{u}\, d\xi .$$

Mais $$\int_U \vec{\text{grad}}\,\varphi . \vec{u}\, d\xi = \int_U \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} u_i\, d\xi = \int_U \sum_i \frac{\partial (\varphi u_i)}{\partial \xi_i}\, d\xi$$

$$= \int_{\partial U} \varphi . (\vec{u} . \vec{n})\, d\sigma$$

et, puisqu'en raison de (20), on a $\vec{u} . \vec{n} = 0$ sur ∂U, il vient :

$$\int_U \rho (\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2 d\xi = \int_U \rho\, (\vec{\text{grad}}\,\varphi)^2 d\xi + \int_U \rho \vec{u}^2 d\xi$$

d'où : $$\int_U \rho (\vec{\omega} \wedge \vec{r})^2 d\xi > \int_U \rho\, (\vec{\text{grad}}\,\varphi)^2 d\xi .$$

Ainsi l'énergie cinétique du fluide est inférieure à celle qu'aurait un corps solide homogène de même densité remplissant la cavité.

III

1. Utilisant les équations d'Euler on obtient :

$$\frac{dp}{dt} - a\,q\,r = m + \mu\,\omega^2 \qquad (25)$$

$$\frac{dq}{dt} + b\,r\,p = 0 \qquad (26)$$

$$\frac{dr}{dt} - c\,p\,q = 0 \qquad (27)$$

avec a, b, c, m, μ positifs et $\vec{\omega} = p\,\vec{\xi} + q\,\vec{\eta} + r\,\vec{\zeta}$.

Introduisant la variable φ définie par $d\varphi = pdt$, (26) et (27) deviennent :

$$\frac{dq}{d\varphi} + br = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d^2q}{d\varphi^2} + bcq = 0\,,\ bc > 0$$

$$\frac{dr}{d\varphi} - cq = 0$$

et les représentations :

$$q = \delta\sqrt{b}\cos\left(\sqrt{bc}\,\varphi + \sigma_0\right)$$

$$r = \delta\sqrt{c}\sin\left(\sqrt{bc}\,\varphi + \sigma_0\right).$$

2. Dans le cas où $\delta = 0$, on a $q = r = 0$, $\dfrac{dp}{dt} = m + \mu p^2$.

Ainsi $\vec{\omega}\,\Lambda\left(\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{\xi\eta\zeta} = 0$ et puisque $\left(\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{\xi\eta\zeta} = \left(\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{xyz}$,

l'on voit que $\vec{\omega}\,\Lambda\left(\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{xyz} = 0$, d'où il suit que la direction du vecteur rotation, identique à celle de l'axe principal ξ, est invariable par rapport aux axes de référence. Le solide exécute ainsi un mouvement de rotation autour d'un axe de direction invariable. La mesure de cette rotation s'obtient en intégrant l'équation $\dfrac{dp}{dt} = m + \mu p^2$, dont la solution générale est : $p = \sqrt{\dfrac{m}{\mu}}\ tg\left[\sqrt{\mu}\,m\,(t - t_0)\right]$.

3. On suppose désormais $\delta \neq 0$.

Partant de (25) avec $\dfrac{dp}{dt} = \dfrac{d}{dt}\ \dfrac{d\varphi}{dt}$, on obtient :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \mu\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = m + \frac{\delta^2 a\sqrt{bc}}{2}\sin\left(2\sqrt{bc}\,\varphi + 2\sigma_0\right)$$

$$+ \mu\delta^2\left[b\cos^2\left(\sqrt{bc}\,\varphi + \sigma_0\right) + c\sin^2\left(\sqrt{bc}\,\varphi + \sigma_0\right)\right] \qquad (28)$$

4. Compte tenu des notations du texte on transforme aisément (28) en :

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} - \mu_1\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 = k + \sin\theta \qquad (29)$$

5. Avec $u = \left(\dfrac{d\theta}{d\tau}\right)^2$, $\dfrac{du}{d\theta} = 2\dfrac{d^2\theta}{d\tau^2}$, on obtient à partir de (29) l'équation linéaire :

$$\frac{du}{d\theta} - 2\mu_1 u = 2k + 2\sin\theta \qquad (30)$$

dont la solution générale est :

$$u = G(\theta) = f(\theta) - g(\theta)\,,\ \text{avec}\ f(\theta) = Ce^{2\mu_1\theta}$$

$$g(\theta) = \frac{k}{\mu_1} + \frac{2\cos\theta}{1+4\mu_1^2} + \frac{4\mu_1\sin\theta}{1+4\mu_1^2}\,.$$

On détermine ensuite $\theta(\tau)$ au moyen de :

$$\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 = G(\theta)\,.$$

Les valeurs admissibles pour θ sont telles que $G(\theta) = f(\theta) - g(\theta) \geqslant 0$; On les déterminera aisément, considérant les représentations de f et g, respectivement fonction exponentielle, fonction sinusoïdale de valeur moyenne $\dfrac{k}{\mu_1} > 0$.

Plusieurs cas peuvent être considérés, qui dépendent des conditions initiales, mais sans entrer dans une discussion complète on peut prévoir la possibilité de mouvements oscillatoires si $G(\theta) > 0$ pour $\theta \in]\theta_1, \theta_2[$ et change de signe dès que θ sort de cet intervalle.

La période de mouvement est alors : $T = 2\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{G(\theta)}}$.

On obtient une solution stationnaire $\theta = \theta_0$ en exprimant que $G(\theta_0) = 0$; $G'(\theta_0) = 0$; en outre la condition de stabilité est : $G''(\theta_0) < 0$. Ainsi l'on écrit :

$$G(\theta_0) = Ce^{2\mu_1\theta_0} - [\frac{k}{\mu_1} + \frac{2\cos\theta_0}{1+4\mu_1^2} + \frac{4\mu_1 \sin\theta_0}{1+4\mu_1^2}] = 0$$

$$G'(\theta_0) = 2\mu_1 Ce^{2\mu_1\theta_0} - [-\frac{2\sin\theta_0}{1+4\mu_1^2} + \frac{4\mu_1\cos\theta_0}{1+4\mu_1^2}] = 0$$

$$G''(\theta_0) = 4\mu_1^2 Ce^{2\mu_1\theta_0} + [\frac{2\cos\theta_0}{1+4\mu_1^2} + \frac{4\mu_1 \sin\theta_0}{1+4\mu_1^2}] < 0.$$

Eliminant C entre les deux premières équations on a : $k + \sin\theta_0 = 0$, (31)
qui définit θ_0 sous réserve que $k < 1$, résultat conforme à ce qu'on aurait pu obtenir directement de (29).

D'autre part, éliminant C avec l'aide de $G(\theta_0) = 0$, la condition de stabilité devient : $4\mu_1 k + 2\cos\theta_0 + 4\mu_1 \sin\theta_0 < 0$, c'est-à-dire compte tenu de (31) : $\cos\theta_0 < 0$ (32).

6. Revenant à (29), on se propose d'étudier quantitativement les mouvements voisins d'une position d'équilibre.

A cette fin on pose $\theta = \theta_0 + \chi$, d'où :

$$\frac{d^2\chi}{d\tau^2} - \mu_1 (\frac{d\chi}{d\tau})^2 = k + \sin\theta_0 \cos\chi + \cos\theta_0 \sin\chi$$

qu'on peut écrire, notant $\omega_0^2 = -\cos\theta_0$:

$$\frac{d^2\chi}{d\tau^2} + \omega_0^2 \chi = \mu_1 (\frac{d\chi}{d\tau})^2 + F(\chi) \qquad (33)$$

avec : $F(\chi) = k + \sin\theta_0 \cos\chi + \cos\theta_0 \sin\chi - \cos\theta_0 . \chi$

d'où : $F(\chi) = \beta_2 \chi^2 + \beta_3 \chi^3 + \ldots$ avec

$$\beta_2 = -\frac{\sin\theta_0}{2}, \ \beta_3 = -\frac{\cos\theta_0}{6}, \text{ etc.}$$

Pour représenter les solutions périodiques de (33) voisines de $\chi = 0$, on introduit un paramètre η , qui mesure en quelque sorte leur amplitude et sert à définir la condition initiale:

$$\chi(0) = \eta \qquad \frac{d\chi(0)}{d\theta} = 0. \qquad (34).$$

L'équation (33) étant autonome, on peut choisir arbitrairement l'origine des temps, en particulier à un instant où χ atteint un maximum.

La période du mouvement est inconnue *a priori* ; pour le calculer, on fait le changement de variable $\tau \to s$: $\tau = \frac{s}{\omega_0}(1 + h_1\eta + h_2\eta^2 + \ldots)$

où $h_1, h_2, \ldots$ sont des inconnues que le calcul devra permettre de déterminer, la solution recherchée étant périodique en s de période 2π.

Il vient ainsi :

$$\frac{d^2\chi}{ds^2} + (1 + h_1\eta + h_2\eta^2 + \ldots)^2\chi = \mu_1\left(\frac{d\chi}{ds}\right)^2 + (1 + h_1\eta + h_2\eta^2 + \ldots)^2(\beta_2\chi^2 + \beta_3\chi^3 + \ldots)$$

et on en cherche la solution vérifiant (34) sous la forme :

$$\chi = \eta\cos s + \eta^2\chi_2(s) + \eta^3\chi_3(s) + \ldots$$

$\chi_2, \chi_3, \ldots$ étant périodiques en s de période 2π et satisfaisant aux conditions initiales :

$$\chi_j(0) = \frac{d\chi_j(0)}{ds} = 0, j \geqslant 2.$$

Au premier ordre en η, l'équation obtenue est identiquement vérifiée. Au second ordre en η on trouve :

$$\frac{d^2\chi_2}{ds^2} + \chi_2 = \frac{\mu_1 + \beta_2}{2} - 2h_1 \cos s + \frac{\beta_2 - \mu_1}{2} \cos 2s.$$

Pour que cette équation ait une solution $\chi_2(s)$, périodique en s de période 2π, il faut que le terme en $\cos s$ du second membre disparaisse, ce qui oblige de prendre $h_1 = 0$.

On obtient alors :

$$\chi_2 = \frac{\mu_1 + \beta_2}{2} - \frac{\beta_2 - \mu_1}{2} \cos 2s + a_2 \cos s + b_2 \sin s$$

où a_2 èt b_2 sont des constantes qu'on détermine par :

$$\chi_2(0) = \frac{d\chi_2(0)}{ds} = 0.$$

ou :

$$a_2 + \mu_1 = 0$$

$$b_2 = 0.$$

Finalement on obtient :

$$\chi_2(s) = \frac{2\mu_1 - \sin\theta_0}{4} + \frac{\sin\theta_0 + 2\mu_1}{12} \cos 2s - \mu_1 \cos s$$

et l'on peut poursuivre le calcul aux ordres supérieurs de la même façon.

3. Observations des correcteurs

Les résultats sont médiocres ; il est surprenant qu'aient été si nombreux les candidats qui, incapables d'exprimer correctement la solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec condition initiale, n'ont pu avancer si peu que ce soit dans l'analyse du problème.

Le mouvement discuté dans la partie I était régi par un système d'équations non linéaire, assez simple en vérité puisque le calcul de ses solutions pouvait être réduit à l'intégration successive de deux équations différentielles linéaires ; mais faute d'avoir reconnu le caractère non linéaire de ce système, beaucoup de candidats ont abordé l'analyse des propriétés de continuité des applications définies au § I,6 en considérant celles-ci comme linéaires et ont été ainsi conduits à des calculs complètement inexacts ; par ailleurs les quelques copies dont les auteurs ont compris le sens de la question posée, présentent des développements maladroits et incomplets qui jamais n'ont permis d'obtenir une réponse satisfaisante.

Les propriétés de périodicité ou de quasi périodicité du mouvement énoncées aux I. 7, 8 et II. 1 ont été assez généralement incomprises ; les calculs proposés au II 2 en vue d'exprimer le moment et l'énergie cinétique du liquide remplissant la cavité U ont été effleurés par certains candidats sans qu'ait été expliqué pourquoi du point de vue dynamique, l'on pouvait substituer au liquide un solide fictif ayant des propriétés inertielles convenables.

Quant à la partie III l'on peut signaler quelques tentatives, souvent infructueuses, pour intégrer l'équation différentielle du mouvement qui, d'ailleurs, était donnée dans le texte ; mais les questions de stabilité et de calcul asymptotique des solutions périodiques ont totalement échappé à l'attention des candidats.

4. Les notes (sur 40)

Nombre de copies corrigées : 230

Moyenne : 7,32 (en excluant les copies nulles : 9,98)

Répartition des notes :

0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 40
60	44	54	42	19	11