programme, enfin que l'on a renoncé à dénombrer les points de vue ou formules concernant les polynômes de Tchebycheff, de sorte que tout candidat les a entendu évoquer plusieurs fois au long de sa scolarité. Force est donc de constater qu'il ne reste pas grand chose d'un tel enseignement.

4. Les notes (sur 60)

Nombre de copies corrigées : 2231
Répartition des notes :

0	13,19 %
1 à 4	29,33 %
5 à 8	16,22 %
9 à 12	12,25 %
13 à 16	8,81 %
17 à 20	6,37 %
21 à 24	4,56 %
25 à 28	3,12 %
29 à 32	2,58 %
33 à 36	1,40 %
37 à 40	0,72 %
41 à 48	0,86 %
49 à 60	0,59 %

ANALYSE NUMÉRIQUE

AVERTISSEMENT

Les candidats sont priés de respecter les notations et la numérotation de l'énoncé. Les notations ou abréviations abusives risquent de ne pas être comprises.

Les démontrations et présentations concises, claires et soignées seront particulièrement bien appréciées.

NOTATIONS

Tous les espaces vectoriels considérés sont réels.

Si X est un espace normé, $\mathcal{L}(X)$ désigne l'espace vectoriel des applications linéaires continues de X dans lui-même, muni de la norme usuelle.

Soit O un ouvert de $\mathbf{R}^n$; $\mathcal{C}^0(O\,;X)$ (resp. $\mathcal{C}^k(O\,;X)$) désigne l'espace des fonctions continues (resp. k fois continûment différentiables) de O dans X.

Si K est un compact de $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{C}^0(K\,;X)$ (resp. $\mathcal{C}^k(K\,;X)$ est l'espace des restrictions à K des fonctions de $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}^n\,;X)$ (resp. de $\mathcal{C}^k(\mathbf{R}^n\,;X)$) muni (à l'exception de certains cas signalés) de la topologie usuelle de la convergence uniforme (resp. de la convergence uniforme pour l'ensemble des dérivées d'ordre $\leqslant k$) sur K.

Si $X = \mathbf{R}$, on notera $\mathcal{C}^k(O)$ (resp. $\mathcal{C}^k(K)$) au lieu de $\mathcal{C}^k(O\,;\mathbf{R})$ (resp. $\mathcal{C}^k(K\,;\mathbf{R})$).

PARTIE I

On considère $\Omega =]\,0\,,1\,[$. Soit $L^2(\Omega)$ l'espace de Hilbert des (classes de) fonctions de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue sur Ω.

On note

$$(u,v)_0 = \int_\Omega u(x)v(x)dx\ , \qquad \|u\|_0 = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

le produit scalaire et la norme dans $L^2(\Omega)$.

On introduit l'espace $H^m(\Omega)$, complété de $\mathscr{C}^m(\overline{\Omega})$ pour la norme

$$\varphi \longmapsto \|\varphi\|_m = \left(\sum_{j=0}^{m} \|\varphi^{(j)}\|_0^2 \right)^{1/2}$$

où $\varphi^{(j)}$ désigne pour $j = 1, \ldots, m$ la dérivée d'ordre j de φ et $\varphi^{(0)} = \varphi$.

On rappelle que toute forme linéaire continue sur un espace de Hilbert se représente à l'aide d'un produit scalaire de manière unique.

Soit

$$\mathscr{C}_0^m(\overline{\Omega}) = \{ \varphi \in \mathscr{C}^m(\overline{\Omega}) \ ; \quad \varphi^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}(1) = 0 , \qquad 0 \leqslant k \leqslant m-1 \}.$$

On rappelle que cet espace est dense dans $L^2(\Omega)$.

On dira que $u \in L^2(\Omega)$ *admet une dérivée faible d'ordre* k, $k \geqslant 1$, *dans* $L^2(\Omega)$ si la forme $\varphi \longmapsto (-1)^k \int_\Omega u(x)\varphi^{(k)}(x)dx$ définie sur $\mathscr{C}_0^k(\overline{\Omega})$ est continue pour la topologie induite par celle de $L^2(\Omega)$.

Ainsi, il existe $v_k \in L^2(\Omega)$, telle que pour tout $\varphi \in \mathscr{C}_0^k(\overline{\Omega})$, on ait :

$$(-1)^k \int_\Omega u(x)\varphi^{(k)}(x)\,dx = \int_\Omega v_k(x)\varphi(x)\,dx$$

et l'on note :

$$v_k = D^k u \qquad \text{(dérivée faible d'ordre } k, \quad k \geqslant 1, \quad \text{de } u).$$

Q. 1 *a.* Vérifier que toute fonction $\varphi \in \mathscr{C}^m(\overline{\Omega})$ a des dérivées faibles dans $L^2(\Omega)$ jusqu'à l'ordre m inclus et que l'on a :

(1) $$D^k\varphi = \varphi^{(k)}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m .$$

b. Montrer que tout $u \in H^m(\Omega)$ est dans $L^2(\Omega)$ et admet des dérivées faibles jusqu'à l'ordre m dans $L^2(\Omega)$.

On admettra pour la suite que $H^m(\Omega)$ est exactement l'espace des (classes de) fonctions $u \in L^2(\Omega)$ ayant des dérivées faibles jusqu'à l'ordre m dans $L^2(\Omega)$, espace de Hilbert pour la norme associée au produit scalaire

$$((u, v))_m = \sum_{j=0}^{m} (D^j u, D^j v)_0 , \quad u, v \in H^m(\Omega).$$

Q. 2 Soit $t \in \overline{\Omega}$. Montrer qu'il existe une constante $C_0 > 0$ (indépendante de t) telle que l'on ait :

(2) $$|\varphi(t)| \leqslant C_0 \|\varphi\|_1 , \qquad \text{pour tout } \varphi \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega}) .$$

En déduire que pour tout $u \in H^1(\Omega)$, on peut définir $u(t)$ et que l'on a :

(3) $H^1(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ (où $\hookrightarrow$ désigne l'injection continue).

On définit :

(4) $$H_0^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) \ ; \quad u(0) = u(1) = 0 \}$$

qui est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$.

On admettra, pour la suite, que $H_0^1(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathscr{C}_0^1(\overline{\Omega})$ pour la norme $u \longmapsto \|u\|_1$.

Établir :

(5) $$\|u\|_0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \|Du\|_0 , \qquad \text{pour tout } u \in H_0^1(\Omega)$$

(avec $D = D^1$).

En déduire que $u \longmapsto \|u\| = \|Du\|_0$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme $u \longmapsto \|u\|_1$.

On notera :

(6) $$((u, v)) = \int_\Omega Du(x)\,Dv(x)\,dx , \qquad \text{pour } u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Q. 3 Soit B un borné de $H^1(\Omega)$.

Établir que si $\varphi \in B$ il existe une constante $C_B > 0$ telle que l'on ait

(7) $$|\varphi(t) - \varphi(t')| \leqslant C_B |t - t'|^{1/2} \qquad \text{pour tout } \varphi \in B \text{ et tout } t, t' \in \overline{\Omega}.$$

En déduire que B est relativement compact dans $L^2(\Omega)$.

Étendre les résultats de ***Q. 2*** et ***Q. 3*** à $H^m(\Omega)$.

Q. 4 Soit $\rho \geqslant 0$ et $f \in L^2(\Omega)$ donnés.

On considère le problème

$$(P_\rho) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ vérifiant :} \\ (8) \quad ((u, v)) + \rho(u, v)_0 = (f, v)_0 , \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega) . \end{array} \right.$$

Montrer que si (P_ρ) admet une solution u, celle-ci est unique et que l'on a :

(9) $$u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) .$$

Observant que l'application $\varphi \longmapsto (f, \varphi)_0$ est continue sur $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $u \longmapsto \left(\|u\|^2 + \rho \|u\|_0^2 \right)^{1/2}$, établir l'existence d'une solution de (P_ρ).

Q. 5 On pose : $V = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ et on définit l'opérateur A_ρ par :

$$A_\rho v = -D^2 v + \rho v, \quad \text{pour tout } v \in V. \tag{10}$$

Montrer que $v \longmapsto \|v\|_V = \|A_\rho v\|_0$ est une norme sur V et que A_ρ est une bijection bicontinue de V ainsi normé sur $L^2(\Omega)$.

A_ρ^{-1} désignant l'opérateur inverse de A_ρ, montrer que l'image d'un borné de $L^2(\Omega)$ par A_ρ^{-1} est un ensemble relativement compact de $L^2(\Omega)$.

Partie II

Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert (produit scalaire $(\,,)_{\mathcal{H}}$, norme $\|\ \|_{\mathcal{H}}$) et $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, on dira que $\mathcal{A}$ est de classe $(\mathcal{K})$ si l'image par $\mathcal{A}$ d'un borné de $\mathcal{H}$ est un ensemble relativement compact dans $\mathcal{H}$.

On rappelle que $\mathcal{A}$ est un opérateur autoadjoint de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ si

$$(\mathcal{A}u, v)_{\mathcal{H}} = (u, \mathcal{A}v)_{\mathcal{H}}, \text{ pour tout } u, v \in \mathcal{H}.$$

On utilisera, sans démonstration, le résultat suivant :

Soit $\mathcal{A}$ autoadjoint de classe $(\mathcal{K})$. Si F est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ différent de $\{0\}$, alors la restriction de $\mathcal{A}$ à F admet un vecteur propre dans F relatif à une valeur propre non nulle.

Q. 6 *a.* On considère encore $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, autoadjoint, de classe $(\mathcal{K})$ et on suppose que les valeurs absolues de toutes les valeurs propres distinctes λ_n de $\mathcal{A}$ constituent une suite.

Soit

E_{λ_i} le sous-espace propre associé à λ_i et $G = \operatorname{Ker} \mathcal{A} \oplus \bigoplus_{\lambda_i \neq 0} E_{\lambda_i}$

Montrer que G est dense dans $\mathcal{H}$.

b. Application : Montrer que A_ρ [défini dans I-***Q. 5***] admet une suite $\mu_n(\rho)$, $n \geq 1$ strictement croissante de valeurs propres, avec $\lim_{n \to \infty} \mu_n(\rho) = +\infty$ et déterminer les vecteurs propres correspondants, Φ_n, normés dans $L^2(\Omega)$.

Vérifier que Φ_n et $\Phi_{n'}$, $n \neq n'$, sont orthogonaux dans $L^2(\Omega)$ et dans $H_0^1(\Omega)$.

Enfin (en utilisant A_ρ^{-1}) établir que $\{\Phi_n\}_{n \geq 1}$ constitue une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$.

Dans la suite, on se limitera au cas $\rho = 0$, et on posera $\mu_n(0) = \mu_n$.

Q. 7 T étant un réel positif, on pose $\Omega_T =]0, T[\times \Omega$.

On se donne :

- $f \in L^2(\Omega)$, $\quad f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \Phi_k$ (convergence dans $L^2(\Omega)$),

  f_k constantes telles que : $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 < +\infty$

- $u_0 \in L^2(\Omega)$, $\quad u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{0k} \Phi_k$,

  α_{0k} constantes telles que : $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{0k})^2 < +\infty$.

Soit V_m le sous-espace de V engendré par $(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m)$.

On considère le problème :

$$(\Pi_m) \begin{cases} \text{Soit } \alpha_0 > 0 \text{ donné ;} \\ \text{Trouver } u_m : t \longmapsto u_m(t) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) \Phi_k \in V_m, \\ t \in [0, T], \quad \text{vérifiant le système différentiel :} \\ (S_m) \begin{cases} \alpha_0 \left(\dfrac{d u_m(t)}{dt}, \Phi_j \right)_0 + ((u_m(t), \Phi_j)) = (f, \Phi_j)_0. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 1 \leq j \leq m \\ u_m(0) = u_{0m} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{0k} \Phi_k \end{cases} \end{cases}$$

Montrer que :

— (Π_m) admet une solution unique $u_m \in \mathcal{C}^p([0, T]; V_m)$ pour tout $p \geq 0$;

— u_m converge dans $\mathcal{C}^0([0, T]; L^2(\Omega))$ vers une fonction u, avec $u(0) = u_0$ et que $u \in \mathcal{C}^\infty(]0, T[; L^2(\Omega))$.

Établir ensuite que, pour tout $t \in]0, T[$, $u(t) \in V$.

Q. 8 Montrer que la fonction u obtenue en ***Q. 7*** est solution du problème :

$$(\Pi) \begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathcal{C}^1(]0, T[; L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^0([0, T] ; L^2(\Omega)) \text{ tel que :} \\ i) \ \text{Pour tout } t \in]0, T[, \quad u(t) \in V ; \\ ii) \ \text{Pour tout } t \in]0, T[: \\ \quad \alpha_0 \left(\dfrac{du}{dt}(t), \varphi\right)_0 + ((u(t), \varphi)) = (f, \varphi)_0, \\ \quad \text{pour tout } \varphi \in H_0^1(\Omega) ; \\ iii) \ u(0) = u_0 ; \end{cases}$$

et satisfait à

$$(11) \quad \frac{\alpha_0}{2} \|u(t)\|_0^2 - \frac{\alpha_0}{2} \|u_0\|_0^2 + \int_0^t \|u(\sigma)\|^2 d\sigma = \int_0^t (f, u(\sigma))_0 d\sigma.$$

Établir que (Π) a au plus une solution et vérifier que « l'erreur de troncature » :

$$\varepsilon_{im} = \int_0^T \|u_m(t) - u(t)\|_i^2 \, dt, \qquad i = 0, 1$$

satisfait à

$$(12) \qquad \varepsilon_{im} = O\left(\frac{1}{m^{1-i}}\right) \text{ quand } m \to +\infty, \quad i = 0, 1 .$$

Q. 9 *a.* Établir que pour $t \in]0, T[$, $u(t) : x \longmapsto u(t, x)$ admet une dérivée faible d'ordre 2 dans $L^2(\Omega)$ vérifiant :

$$(13) \qquad -D^2 u(t) = f - \alpha_0 \frac{du}{dt}(t) .$$

b. $\dfrac{\partial^2}{\partial \zeta^2}$ désignant l'opérateur de dérivée partielle usuel par rapport à la variable ζ, montrer que pour tout $t \in]0, T[$ on a :

$$(14) \qquad D^2 u(t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t)$$

et que, si

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \alpha_0 \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \text{on a :}$$

$$(15) \qquad \begin{cases} Lu(t) = -f, & \text{pour tout } t \in]0, T[; \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{p.p. en } x \in \Omega . \end{cases}$$

c. A quelle condition portant sur la suite $\{\alpha_{0k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ a-t-on $u_0 \in H_0^1(\Omega)$?

Comment sont modifiés les résultats de ***Q. 7*** à ***Q. 9*** dans ce cas ?

Partie III

On considère l'opérateur différentiel à coefficients réels constants $\mathcal{A}$ de nature « parabolique » défini pour u suffisamment régulier par

$$\mathcal{A} u = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \frac{\partial^{2n-k} u}{\partial x^{2(n-k)} \partial t^k}$$

auquel on associe le polynôme $E(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \alpha^{n-k}$, et l'on suppose que les coefficients a_k sont tels que $E(\alpha) = 0$ admet n racines distinctes strictement positives $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Pour $i = 1, 2, \ldots, n$, on introduit l'opérateur

$$L_i = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \alpha_i \frac{\partial}{\partial t}$$

et l'on note que $\mathcal{A}$ se factorise sous la forme du produit d'opérateurs :

$$\mathcal{A} = L_1 . L_2 . \ldots L_n .$$

On se donne n fonctions $\varphi_i \in \mathscr{C}_0^{\,2n-2(i-1)}(\overline{\Omega})$, $i=1,\dots,n$ et l'on pose le problème :

$$(\mathrm{P})\begin{cases} \text{Trouver U vérifiant :} \\ (17)\quad \mathcal{A}\,\mathrm{U}=0 \quad \text{dans } \Omega_{\mathrm{T}}\,; \\ (18)\quad \dfrac{\partial^{2i-2}}{\partial x^{2i-2}}\mathrm{U}(t,0)=\dfrac{\partial^{2i-2}}{\partial x^{2i-2}}\mathrm{U}(t,1)=0, \\ \qquad \text{pour tout } t\in[0,\mathrm{T}],\ i=1,2,\dots,n\,; \\ (19)\quad \dfrac{\partial^{i-1}}{\partial t^{i-1}}\mathrm{U}(0,x)=\varphi_i(x), \quad \text{pour tout } x\in\overline{\Omega}, \end{cases}$$

$$i=1,\dots,n.$$

Q. 10 *a.* Noter que si U_i vérifie $\mathrm{L}_i(\mathrm{U}_i)=0$, alors $\mathrm{U}=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{U}_i$ vérifie (17). En déduire une solution du problème (P) sous la forme explicite :

$$(20)\begin{cases} \mathrm{U}(t,x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k(t)\,\Phi_k(x) \\ \Lambda_k(t)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathrm{C}_i\, e^{-\frac{k^2\pi^2 t}{\alpha_i}}\quad\left[\text{ou }\exp\left(-\dfrac{k^2\pi^2 t}{\alpha_i}\right)\right] \\ \text{où l'on déterminera les } \mathrm{C}_i. \end{cases}$$

Vérifier que $u\in\mathscr{C}^\infty(\Omega_{\mathrm{T}})$.

b. Établir que le problème (P) admet une solution et une seule dans $\mathscr{C}^\infty(\Omega_{\mathrm{T}})$.

Q. 11 On se propose d'approcher le problème (P) à l'aide d'une méthode de différences finies.

A cet effet, on se donne deux entiers positifs m et r destinés à tendre vers $+\infty$ et l'on pose :

$$h=\frac{1}{m}, \qquad l=\frac{\mathrm{T}}{r}.$$

On définit : $\mathrm{P}_{ik}\in\overline{\Omega}_{\mathrm{T}}$ de coordonnées $(t_i,x_k)=(il,kh)$

$$i=0,1,\dots,r$$
$$k=0,1,\dots,m.$$

On note :

$$\Omega_{lh}=\{\mathrm{P}_{ik}\,;\ i=1,\dots r,\ k=1,\dots,m-1\}$$
$$\overline{\Omega}_{lh}=\{\mathrm{P}_{ik}\,;\ i=0,1,\dots,r,\ k=0,1,\dots,m\}.$$

On désigne par u_{ik} une approximation de $\mathrm{U}(t_i,x_k)$ où U est une solution du problème (P).

On considère l'approximation $\mathcal{A}_{lh}$ de l'opérateur $\mathcal{A}$ définie par :

$$\mathcal{A}_{lh}=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu a_\nu\,\frac{\Delta_t^\nu}{l^\nu}\cdot\frac{\delta_x^{2(n-\nu)}}{h^{2(n-\nu)}}$$

où Δ_t^r et δ_x^{2s} sont les opérateurs de « différences finies » :

$$\begin{cases} \Delta_t^r\, u_{ik}=\displaystyle\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\binom{r}{j}u_{i+r-j,\,k}, \quad r=1,2,\dots. \\ \Delta_t^0\, u_{ik}=u_{ik}, \quad \Delta_t^1=\Delta_t \\ \delta_x^{2s}\, u_{ik}=\displaystyle\sum_{j=-s}^{+s}(-1)^{j+s}\binom{2s}{j+s}u_{i,\,k+j}, \quad s=1,2,\dots. \\ \delta_x^0\, u_{ik}=u_{ik} \end{cases}$$

($\binom{n}{m}$ est le coefficient du binôme C_n^m).

On pose alors le problème approché en dimension finie :

$$(\mathrm{P}_{l,h})\begin{cases} (21)\quad \mathcal{A}_{lh}\,u_{ik}=0 \qquad \text{dans } \Omega_{lh} \\ (22)\ \begin{cases} u_{i,0}=u_{i,m}=0 \\ u_{i,-k}=-u_{ik} \\ u_{i,m+k}=-u_{i,m-k}, \\ \quad i=0,1,\dots,r, \quad k=1,\dots,m-1. \end{cases} \\ (23)\quad \dfrac{\Delta_t^{s-1}}{l^{s-1}}=\varphi_s(x_k) \\ \qquad s=1,\dots,n, \quad k=1,\dots,m-1 \end{cases}$$

et l'on pose :

$$\mathcal{L}_j=\frac{\delta_x^2}{h^2}-\alpha_j\frac{\Delta_t}{l}, \quad j=1,\dots,n.$$

Montrer que le problème $(\mathrm{P}_{l,h})$ admet une solution unique donnée par :

$$(24)\quad \begin{cases} u_{ik} = \displaystyle\sum_{p=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n} \beta_{pj} (\gamma_{jp})^i \Phi_p(x_k) \\ \gamma_{jp} = 1 - \dfrac{4l}{h^2 \alpha_j} \sin^2 \dfrac{ph\pi}{2} \end{cases}$$

où les β_{pj} sont à déterminer.

Q. 12 Pour approcher la solution du problème $(\mathrm{P}_{l,h})$ on utilise l'algorithme suivant :

On pose $\mathcal{L}_j(u_{ik}^{(n-j)}) = u_{ik}^{(n-j+1)}$, $j = 1, 2, \dots, n$
avec $u_{ik}^{(n)} = 0$, on prend $u_{ik} = u_{ik}^{(0)}$
et l'on résout alternativement les n problèmes à un pas :

$$(\tilde{\mathrm{P}}) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \begin{cases} \mathcal{L}_j(u_{ik}^{(n-j)}) = u_{ik}^{(n-j+1)} \quad \text{dans } \Omega_{l,h} \\ u_{i,0}^{(n-j)} = u_{i,m}^{(n-j)} = 0, \\ \qquad\qquad i = j-1, \dots, r-(n-j) \\ u_{j-1,k}^{(n-j)} = \mathrm{F}_{n-j}(x_k), \quad k = 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

où l'on a posé :

$$(25)\quad \left\{ \mathrm{F}_{n-j}(x_k) = \begin{cases} \mathcal{L}_{j+1} \dots \mathcal{L}_n(u_{j-1,k}), & \text{si } j = 1, \dots, n-1 \\ \displaystyle\sum_{\mu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\mu} l^{n-\mu-1} \varphi_{n-\mu}(x_k), & \text{si } j = n. \end{cases} \right.$$

Introduisant dans $\mathbf{R}^{m-1}$ les vecteurs :

$\vec{\mathrm{U}}_s^{(n-j)}$ de composantes $u_{s,k}^{(n-j)}$, $k = 1, \dots, m-1$

$\vec{\mathrm{F}}_{(n-j)}$ de composantes $\mathrm{F}_{n-j}(x_k)$, $k = 1, \dots, m-1$,

on notera que $(\tilde{\mathrm{P}}_j)$ s'écrit sous la forme :

$$(26)\quad \begin{cases} \vec{\mathrm{U}}_{i+1}^{(n-j)} = \mathrm{B}_j \vec{\mathrm{U}}_i^{(n-j)} - \dfrac{1}{\alpha_j} \vec{\mathrm{U}}_i^{(n-j+1)} \\ \vec{\mathrm{U}}_{j-1}^{(n-j)} = \vec{\mathrm{F}}_{(n-j)} \end{cases}$$

où B_j est une matrice tridiagonale symétrique.

On utilisera les normes

$$\|\vec{u}_i\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq m-1} |u_{ik}|, \quad \|\mathrm{A}\|_\infty = \|\{a_{ij}\}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m-1} \sum_{j=1}^{m-1} |a_{ij}|.$$

où $\vec{u}_i$ est le vecteur de composantes u_{ik} $k = 1, 2, \dots, m-1$.

a. Montrer que le schéma (26) est stable si, et seulement si, l et h vérifient :

$$(27)\quad l \leqslant \frac{h^2}{\alpha} \quad \text{où } \alpha = \max(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

b. On introduit les vecteurs de $\mathbf{R}^{m-1}$,

$$\vec{\varepsilon}_i \quad i = 1, 2, \dots,$$

de composantes :

$$\{ u_{ik} - \mathrm{U}(il, hk) \}, \quad k = 1, \dots, m-1$$

et l'on suppose la condition (27) satisfaite.

Montrer que lorsque $\begin{cases} h \to +0 \\ l \to +0 \end{cases}$, $\|\vec{\varepsilon}_i\|_\infty = \mathrm{O}(l + h^2)$, $i = 1, \dots,$

Q. 13 *a.* Comment se trouve modifiée (20) lorsque l'équation $\mathrm{E}(\alpha) = 0$ admet :

i. Une seule racine d'ordre n : $\alpha = 1$?

ii. ν racines α_j d'ordre n_j, $j = 1, \dots, \nu$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{\nu} n_j = n$?

b. Reprendre les questions ***Q. 11***, ***Q. 12*** dans les deux cas considérés en ***Q. 13***.-*a.*

RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE NUMERIQUE

1. Thème du sujet

Le sujet de cette année portait sur l'étude de l'approximation des solutions de certains problèmes paraboliques d'évolution (méthodes de Fourier – Galerkin et de différences finies). Il attirait l'attention sur d'importantes applications de l'analyse qui sont couramment utilisées pour la résolution de problèmes pratiques dans des disciplines très variées (physique, mécanique, biologie, ...)

2. Observations générales

Comme cela a déjà été signalé dans des rapports antérieurs, cette année encore, la première impression qui se dégage de la lecture des copies est que, pratiquement, aucun candidat n'a la moindre idée des utilisations de l'analyse mathématique, alors que ce sont justement elles qui ont motivé le développement des grandes théories, notamment hilbertiennes.

Fait des plus curieux, pour cette matière optionnelle – sans programme précis il est vrai ! – on a le sentiment que les candidats répugnent à se placer dans des situations concrètes en se désintéressant totalement du moindre calcul, fut-il élémentaire, au profit de bavardages totalement inutiles !

En fait les copies révèlent que la plupart de leurs auteurs n'avait aucune motivation particulière pour l'analyse numérique, plus de la moitié d'entre eux accusant par ailleurs une très grande faiblesse en analyse.

Nous ne pouvons que conseiller à ceux des candidats qui opteront à l'avenir pour cette épreuve de se motiver, en suivant par exemple un cours de maîtrise d'analyse numérique.

3. Observations détaillées

La première partie du problème introduit le cadre fonctionnel des espaces de Sobolev, en dimension d'espace égale à 1, pour rester élémentaire. Elle met en évidence les principales propriétés des Espaces «d'Energie» $H^1(\Omega)$ en $H^1_0(\Omega)$ ($\Omega =]0,1[$); le but de cette partie est d'établir que l'opérateur auto-adjoint A_ρ défini par $A_\rho\ u = D^2 u + \rho u$ sur $D(A_\rho) = H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ possède un inverse continu sur $L^2(\Omega)$ et compact.

Bien entendu, aucune connaissance sur la théorie des distributions, les espaces de Sobolev et les opérateurs compacts n'est requise.

Toutes les démonstrations des propriétés demandées sont élémentaires à partir des définitions ou des résultats admis dans l'énoncé; elles ne nécessitent que l'utilisation de la densité d'espaces de fonctions régulières dans $L^2(\Omega)$, la technique d'intégration par parties, l'inégalité de Schwarz et la théorie du prolongement des applications linéaires continues dans un espace normé.

Les correcteurs ont été très surpris de constater que très peu de candidats savent tirer partie des raisonnements de densité. En particulier la quasi totalité des copies (y compris les meilleures!) montre que la notion de complétion d'un espace normé n'a pas été assimilée.

C'est ainsi que :

– Dans [$Q_1 - a$] la majorité des candidats se contente d'affirmer que $D^k \varphi = \varphi^{(k)}$, $1 \leqslant k \leqslant m$ pour $\varphi \in \mathcal{C}^m(\bar{\Omega})$.

– Dans [$Q_1 - b$] la presque totalité des solutions commence ainsi :
«Soit $\mu \in H^m(\Omega)$ complété de $\mathcal{C}^m(\bar{\Omega})$ pour la norme
$$\varphi \mapsto \left(\sum_{j=0}^{m} \|\varphi^{(j)}\|_0^2\right)^{1/2}$$
alors il existe $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^m(\bar{\Omega})$ suite de Cauchy pour cette norme et donc vérifiant :
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \text{ tel que } n > N_\epsilon \Rightarrow \sum_{j=0}^{m} \|\mu_m^{(j)} - u^{(j)}\|_0^2 < \epsilon \text{»}$$
Que signifie donc $\mu^{(j)}$ pour $\mu \in H^m(\Omega)$?

– Dans [Q_2] une multitude de candidats trouve dans l'inégalité (2), une constante C_0 dépendant de φ !
Trop peu se donnent la peine de montrer que l'injection de $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \to \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ se prolonge en une injection de $H^1(\Omega) \to \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$

L'inégalité (3) a arrêté bon nombre de candidats ; il suffisait pourtant de noter que pour tout $\mu \in \mathcal{C}^1_0(\bar{\Omega})$ on a :
$$x \in]0,1[\qquad \mu(x) = \int_0^x \mu'(\sigma)\, d\sigma$$
l'inégalité de Schwarz conduisant au résultat pour les fonctions de $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$: la densité de cet espace dans $H^1_0(\Omega)$ permettait d'achever la démonstration de cette inégalité.

Notons cependant que les questions $Q_3 - Q_4 - Q_5$ ont été généralement assez bien traitées lorsqu'elles ont été abordées.

La deuxième partie étudiait une formulation faible du problème de la «Chaleur» en dimension d'espace 1 par la méthode de Fourrier–Galerkin.

Pour cela le but de la question [Q_6] était d'établir que les factions propres $\{\Phi_n : x \to \sqrt{2} \sin n\pi x\}$ de l'opérateur A_0 («Laplacien à une dimension») formait une base hilbertienne de $L^2(]0, 1[)$, ce qui résulte du fait (cf. Q_5) que A_0^{-1} est continue sur $L^2(\Omega)$ autoadjoint et compact

Après avoir donné la définition des opérateurs compacts (de classe (K) dans le texte) et autoadjoints dans un espace de Hilbert, on demandait, afin d'alléger la tâche des candidats, d'admettre une propriété classique des opérateurs autoadjoints compacts dont l'énoncé s'est trouvé, dans la rédaction définitive du sujet, entaché d'un lapsus qui n'a gêné personne, (deux candidats ont d'ailleurs rectifié d'eux-mêmes).

Il convient donc de lire :

«Soit $\mathcal{A}$ autoadjoint de classe (K). Si $\mathbb{F}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$, stable pour $\mathcal{A}$ et différent de $\mathcal{A}^{-1}\{0\}$, alors la restriction de $\mathcal{A}$ à $\mathbb{F}$ admet un vecteur propre dans $\mathbb{F}$ relatif à une valeur propre non nulle !

[$Q_6 - a$] a donc été bien traitée lorsqu'elle a été abordée ; mais il n'en a pas été de même de l'application [$Q_6 - b$].

Il s'agissait pourtant de se rendre compte que Φ_n était donnée par l'équation différentielle linéaire du second ordre à cœfficients constants $y'' - \lambda y = 0$ avec les conditions aux limites $y(0) = y(1) = 0$.

Il est inquiétant de constater que le résultat exact ne se trouve que dans une infime minorité de copies !

Les questions Q_7 à Q_9 ont été abordées avec des fortunes diverses uniquement dans les meilleures copies. Aucune parmi elles ne traite de manière très satisfaisante la question [Q_9] un peu plus délicate.

La troisième partie proposait l'approximation par une méthode de discrétisation (différences finies) d'un problème de type parabolique dont on obtenait d'abord une représentation explicite de la solution, l'opérateur $\mathcal{A}$ se factorisant en produit d'opérateurs du type étudiée dans II.

Aucune copie n'a sans doute par manque de temps, abordé sérieusement cette partie qui a ainsi été pratiquement exclue du barème.

4. Les notes (sur 40)

Nombre de copies corrigées : 1064

Moyenne : 7,42

100 copies ont atteint la moyenne ; plus de la moitié des notes sont inférieures à 4.

Répartition des notes :

0 à 4	5 à 9	10 à 14	15 à 19	20 à 24	25 à 29	30 à 34	35 à 40
541	204	138	81	46	28	17	9