COMPOSITION D'ANALYSE

Sujet : (durée : 6 heures)

Préliminaires

1° **K** désigne **R** ou **C**. Si Ω est un ouvert non vide de $\mathbf{R}^2$, et n un entier positif ($n \in \mathbf{N}$), on note $\mathscr{C}^n(\Omega, \mathbf{K})$ l'ensemble des applications de classe C^n (*en tant que fonctions de deux variables réelles*) de Ω dans **K**. En particulier $\mathscr{C}^0(\Omega, \mathbf{K})$ est l'ensemble des applications continues de Ω dans **K**.

On note $\mathscr{C}^\infty(\Omega, \mathbf{K})$ l'ensemble $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \mathscr{C}^n(\Omega, \mathbf{K})$.

Lorsque la première (resp. seconde) variable est notée x (resp. y), $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\text{resp. } \dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ désigne l'opérateur de dérivation partielle par rapport à la première (resp. seconde) variable, et Δ désigne alors l'opérateur $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$. Si Ω est un ouvert non vide de $\mathbf{R}^2$, et k un entier positif, on note $\mathscr{H}^k(\Omega, \mathbf{K})$ l'ensemble des éléments f de $\mathscr{C}^\infty(\Omega, \mathbf{K})$ tels que $\Delta^k f = 0$. On a ainsi $\mathscr{H}^0(\Omega, \mathbf{K}) = \{0\}$. Un élément f de $\mathscr{H}^k(\Omega, \mathbf{K})$ (plus spécialement de $\mathscr{H}^1(\Omega, \mathbf{K})$) est dit « polyharmonique » [d'ordre k, de Ω dans **K**] (plus spécialement « harmonique » [de Ω dans **K**]). On admet *sans démonstration* que $\mathscr{H}^1(\Omega, \mathbf{K})$ est fermé dans l'espace $\mathscr{C}^0(\Omega, \mathbf{K})$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Ω.

2° On identifiera parfois $\mathbf{R}^2$ et **C** en utilisant la variable complexe $x + iy$. Si celle-ci est notée z [$x = \mathrm{Re}(z)$; $y = \mathrm{Im}(z)$], on désigne par

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\text{resp. } \frac{\partial}{\partial \bar z}\right)$$

l'opérateur de dérivation $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\left(\text{resp. } \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\right)$.

On rappelle alors les formules :

$$a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} = c\frac{\partial}{\partial z} + \bar c\frac{\partial}{\partial \bar z} \quad \text{si} \quad c = a + ib\ ;$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\circ\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{\partial}{\partial \bar z}\circ\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{4}\Delta\ ; \quad df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar z}d\bar z, \quad \text{et le résultat suivant :}$$

Si f est une fonction holomorphe d'un ouvert non vide Ω de **C** dans **C**, on a $\dfrac{\partial f}{\partial \bar z}(z) = 0$ et $f'(z) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(z)$ pour tout z dans Ω.

3° Si a est un complexe, ρ un réel strictement positif, $D(a, \rho)$ (resp. $\overline{D}(a, \rho)$) désigne le disque ouvert (resp. fermé) de **C** de centre a, de rayon ρ. Pour Ω *disque* ouvert non vide de **C**, on admet *sans démonstration* que les éléments de $\mathscr{H}^1(\Omega, \mathbf{R})$ (resp. $\mathscr{H}^1(\Omega, \mathbf{C})$) sont exactement les parties réelles des fonctions holomorphes de Ω dans **C** (resp. les fonctions $f + \bar g$, où f, g sont des fonctions holomorphes de Ω dans **C**).

4° On désigne par λ la mesure de Lebesgue de $\mathbf{R}^2$ (ou **C**). Les locutions « λ-intégrable », « λ-mesurable », « λ-presque partout », etc. sont usuelles. On désigne par $\mathscr{L}$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes, définies λ-presque partout dans **C**, et λ-intégrables. Si f appartient à $\mathscr{L}$, son intégrale est notée indifféremment

$$\int f(z)\, d\lambda(z)\ , \qquad \int f(\zeta)\, d\lambda(\zeta)\ , \qquad \iint f(x, y)\, dx\, dy \quad \text{etc.}$$

Si K est un compact de **C**, $\mathscr{L}_K$ désigne l'ensemble des éléments de $\mathscr{L}$ qui sont nuls λ-presque partout dans $\mathbf{C}\setminus K$. On note plus spécialement, R étant un réel strictement positif, $\mathscr{L}_R$ pour $\mathscr{L}_{\overline{D}(0,\, R)}$. Enfin $\mathscr{L}_C$ désigne $\bigcup_{R > 0} \mathscr{L}_R$.

5° Si U est une partie de **C**, si f est une application de U dans **K**, on note $P[f]$ l'application de **C** dans **K** telle que

$(\forall z \in U)\,(P[f](z) = f(z))$ et $(\forall z \in \mathbf{C})\ (z \notin U \Rightarrow P[f](z) = 0)$.

6° Toute définition ou résultat intervenant dans le texte est réputé acquis pour toute la suite. Les parties II et III sont indépendantes de la partie I. On peut aborder la partie III en admettant les résultats sur les fonctions normales de la partie II.

I. *Fonctions polyharmoniques sur un disque ouvert*

Dans cette partie, R désigne un réel strictement positif.

1° Si $a = (a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbf{N}^2}$ est une suite double de complexes, montrer l'équivalence des énoncés :

(*i*) La série double de terme général $a_{m,n} z^m \bar z^n$ converge absolument pour tout z élément de $D(0, R)$.

(*ii*) Pour tout réel ρ élément de l'intervalle $[0, R[$, l'ensemble des complexes $a_{m,n}\,\rho^{m+n}$ est borné.

Dans la suite, on note $\mathcal{A}_R$ l'ensemble des suites doubles a qui vérifient (*i*) ou (*ii*).

2° Si a appartient à $\mathcal{A}_R$, on note F_a l'application de $D(0, R)$ dans $\mathbf{C}$ définie par $F_a(z) = \sum\sum a_{m,n}\, z^m \bar{z}^n$. Montrer que F_a appartient à $\mathcal{C}^\infty(D(0, R), \mathbf{C})$ et expliciter $\dfrac{\partial F_a}{\partial z}$, $\dfrac{\partial F_a}{\partial \bar{z}}$, ΔF_a.

3° Montrer que l'application $a \longmapsto F_a$ de $\mathcal{A}_R$ dans $\mathcal{C}^\infty(D(0, R), \mathbf{C})$ est injective; on note dans ce qui suit $\mathcal{F}_R$ l'image de cette application.

Montrer : $\mathcal{H}^1(D(0, R), \mathbf{C}) \subset \mathcal{F}_R$.

4° Montrer que Δ induit une application surjective de $\mathcal{F}_R$ dans lui-même.

En déduire que l'on a : $\mathcal{H}^k(D(0, R), \mathbf{C}) \subset \mathcal{F}_R$ pour k entier supérieur à 1.

Caractériser les éléments a de $\mathcal{A}_R$ tels que F_a appartienne à $\mathcal{H}^k(D(0, R), \mathbf{C})$.

5° Soit A un réel. Montrer que les éléments de $\mathcal{H}^k(D(0, R), \mathbf{C})$ sont exactement les sommes $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} (A^2 - r^2)^j\, u_j$, où $u_0, \ldots, u_{k-1}$ appartiennent à $\mathcal{H}^1(D(0, R), \mathbf{C})$, et où r désigne l'application $z \longmapsto |z|$. [On pourra faire d'abord $A = 0$].

6° Soient k un entier supérieur à 1 et f_n une suite dans $\mathcal{H}^k(D(0, R), \mathbf{C})$ qui converge, lorsque n tend vers $+\infty$, uniformément sur tout compact de $D(0, R)$, vers une fonction f.

a. Soit A réel tel que $0 < A < R$. Montrer qu'il existe une suite g_n dans $\mathcal{H}^{k-1}(D(0, R), \mathbf{C})$, une suite h_n dans $\mathcal{H}^1(D(0, R), \mathbf{C})$ telles que $(\forall n \in \mathbf{N})\ (f_n = (A^2 - r^2)\, g_n + h_n)$.

Montrer que la suite h_n converge, lorsque n tend vers $+\infty$, uniformément sur tout compact de $D(0, A)$, vers une fonction h élément de $\mathcal{H}^1(D(0, A), \mathbf{C})$.

b. Déduire de ce qui précède que f appartient à $\mathcal{H}^k(D(0, R), \mathbf{C})$.

II. *Transformation* $\widehat{\ }$ *et fonctions normales*

Si f est un élément de $\mathcal{L}$, z un complexe, et si la fonction

$$\zeta \longmapsto \operatorname{Log}\left(\frac{1}{|z-\zeta|}\right) f(\zeta)$$

est λ-intégrable, on note $\hat{f}(z)$ le scalaire

$$\int \operatorname{Log}\left(\frac{1}{|z-\zeta|}\right) f(\zeta)\, d\lambda(\zeta).$$

On dit alors que $\hat{f}(z)$ « existe » (ou « est défini »). On admettra le résultat suivant :

Si f est de plus de classe C^∞ sur un ouvert ω de $\mathbf{C}$, $\hat{f}(z)$ existe pour tout z élément de ω, et définit sur ω une fonction de classe C^∞ qui vérifie $\Delta\hat{f}(z) = -2\pi f(z)$.

1° Soient r un réel strictement positif, z un complexe. Calculer

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Log}\left(\frac{1}{|z - re^{i\theta}|}\right) d\theta \qquad \text{pour} \qquad |z| > r$$

[on pourra utiliser le développement de $\operatorname{Log}(1-u)$ pour $|u| < 1$], puis pour $|z| < r$. Que se passe-t-il pour $|z| = r$?

2° Soient r un réel strictement positif, et χ_r l'application de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{R}$ égale à 1 sur $D(0, R)$, à 0 ailleurs. Ainsi χ_r appartient à $\mathcal{L}$.

Montrer que $\hat{\chi}_r(z)$ existe pour tout complexe z, et expliciter sa valeur.

3° *a.* Soient R et r des réels strictement positifs, f un élément de $\mathcal{L}_R$.

En remarquant que $(z, \zeta) \longmapsto \operatorname{Log}\left(\dfrac{1}{|z-\zeta|}\right)$ est minorée sur les compacts de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$, montrer que l'application

$$(z, \zeta) \longmapsto \operatorname{Log}\left(\frac{1}{|z-\zeta|}\right) \chi_r(z)\, f(\zeta)$$

est intégrable pour la mesure de Lebesgue de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$. En déduire que $\hat{f}(z)$ est défini pour λ-presque tout z, que $\hat{f}$ est λ-mesurable, que $\chi_r \cdot \hat{f}$ appartient à $\mathcal{L}$.

b. Plus généralement, soient f, g des éléments de $\mathcal{L}_C$. On suppose g borné.

Montrer que $\hat{f} \cdot g$ et $f \cdot \hat{g}$ appartiennent à $\mathcal{L}$ et que

$$\int \hat{f}(z)\, g(z)\, d\lambda(z) = \int f(z)\, \hat{g}(z)\, d\lambda(z).$$

4° Soient K un compact de $\mathbf{C}$, Ω un ouvert de $\mathbf{C}$ contenant K, f un élément de $\mathcal{L}_K$, φ une application continue de Ω dans $\mathbf{C}$.

Montrer $P[\varphi] . f \in \mathcal{L}$.

On appelle *fonction normale* tout élément f de $\mathcal{L}_C$, *à valeurs réelles*, qui vérifie

$$\int \varphi(z) f(z)\, d\lambda(z) = 0$$

quelle que soit la fonction holomorphe φ de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$.

5° Soient R un réel strictement positif, et f un élément de $\mathcal{L}_R$, à valeurs réelles.

a. Montrer l'équivalence des énoncés :

(i) f est normale,

(ii) $(\forall n \in \mathbf{N}) \quad \left(\int z^n f(z)\, d\lambda(z) = 0\right)$,

(iii) Quels que soient l'ouvert Ω de $\mathbf{C}$ contenant $\overline{D}(0, R)$, et la fonction harmonique φ de Ω dans $\mathbf{C}$, on a

$$\int P[\varphi](z) f(z)\, d\lambda(z) = 0.$$

b. Montrer que $\hat{f}(z)$ existe pour tout complexe z vérifiant $|z| > R$ et que l'application

$$z \longmapsto \hat{f}(z) + \left(\int f(\zeta)\, d\lambda(\zeta)\right) \operatorname{Log}|z| \quad \text{de} \quad \mathbf{C} \setminus \overline{D}(0, R) \quad \text{dans } \mathbf{R}$$

est la partie réelle d'une fonction holomorphe dont on précisera le développement en série de Laurent.

6° Soit f un élément de $\mathcal{L}_C$, à valeurs réelles.

Montrer : f est normale $\Leftrightarrow \hat{f} \in \mathcal{L}_C$.

7° Soient ρ un réel strictement positif, ω un ouvert de $\mathbf{C}$ contenant $\overline{D}(0, \rho)$, f une fonction normale élément de $\mathcal{L}_\rho$, u un élément de $\mathcal{C}^\infty(\omega, \mathbf{C})$.

Montrer

$$\int P[u](z) f(z)\, d\lambda(z) = -\frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(z)\, P[\Delta u](z)\, d\lambda(z).$$

[On pourra utiliser en particulier les questions II. 3° (*b*) et II. 5°.]

III. *Exemples de fonctions normales*

On note B l'ensemble des complexes ζ tels que $0 < \operatorname{Re}(\zeta) < \pi$, et γ l'application $\zeta \longmapsto \cos \zeta$ de B dans $\mathbf{C}$.

1° *a.* Montrer que γ est injective, et déterminer l'image $\Gamma = \gamma(B)$ de B par γ.

b. On note δ l'application de Γ dans $\mathbf{C}$ telle que

$$(\forall \zeta \in B) \qquad (\delta(\gamma(\zeta)) = \zeta).$$

Montrer que δ est holomorphe, et préciser la valeur de $\delta(x)$ si x réel appartient à l'intervalle $]-1, 1[$.

c. Si n appartient à $\mathbf{N}$, montrer que l'application

$$Q_n : z \longmapsto \cos(n\delta(z)) \text{ de } \Gamma \text{ dans } \mathbf{C}$$

est une fonction polynôme de degré n, à coefficients réels, de même parité que n.

Jusqu'à la fin de cette partie, α désigne un réel strictement positif.

2° On note E_α l'ensemble des complexes z tels que

$$\frac{[\operatorname{Re}(z)]^2}{1 + \alpha^2} + \frac{[\operatorname{Im}(z)]^2}{\alpha^2} < 1,$$

et l'on pose, pour n élément de $\mathbf{N}$, $A(n, \alpha) = \int_{E_\alpha} Q_n(z)\, d\lambda(z)$, où la fonction à intégrer est définie λ-presque partout dans E_α.

Calculer $A(0, \alpha)$ (on a ainsi $A(0, \alpha) > 0$);

— montrer $A(0, \alpha) + 2A(2, \alpha) = 0$;

— montrer $A(n, \alpha) = 0$ pour $n = 1$, ou n entier $\geqslant 3$.

3° On note φ_α l'application de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{R}$ égale à $\dfrac{1}{A(0, \alpha)}$ sur E_α, à 0 ailleurs (on a ainsi $\varphi_\alpha \in \mathcal{L}$). Si β est un réel strictement positif, montrer que $\varphi_\alpha - \varphi_\beta$ est une fonction normale.

4° On note μ_α la mesure de Radon $\varphi_\alpha . \lambda$. Si α_n est une suite de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$, montrer que la suite μ_{α_n} converge vaguement, lorsque n tend vers $+\infty$, vers une mesure de Radon μ que l'on déterminera.

IV. *Fonctions associées*

Si f est un élément de $\mathcal{L}_C$, à valeurs réelles, ω un ouvert non vide de $\mathbf{C}$, u un élément de $\mathcal{C}^0(\omega, \mathbf{C})$, on dit que f est *associé* à u s'il existe un disque fermé D de $\mathbf{C}$ tel que

(1) $$f \in \mathcal{L}_D .$$

(2) Pour toute similitude directe (bijective) S vérifiant $S(D) \subset \omega$,
$$\int P[u]\,(S(z))\, f(z)\, d\lambda(z) = 0 .$$

1° Soient f une fonction normale, ω un ouvert non vide de $\mathbf{C}$, u un élément de $\mathcal{H}^1(\omega, \mathbf{C})$. Montrer que f est associé à u.

2° On note $\mathfrak{N}_1$ l'ensemble des fonctions normales, et l'on définit par récurrence, pour n entier $\geqslant 2$, $\mathfrak{N}_n$ comme l'ensemble des éléments f de $\mathcal{L}_C$, à valeurs réelles, tels que $\widehat{f}$ appartienne à $\mathfrak{N}_{n-1}$.

a. Si f appartient à $\mathfrak{N}_n$, montrer
$$\iint x^p y^q f(x, y)\, dx\, dy = 0$$
pour p, q entiers vérifiant $0 \leqslant p$; $0 \leqslant q$; $p + q \leqslant 2n - 1$.
[On pourra utiliser II. 7°].

b. En déduire que, si f appartient à $\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} \mathfrak{N}_n$, f est λ-négligeable.

3° Soient ω un ouvert non vide de $\mathbf{C}$, u un élément de $\mathcal{C}^\infty(\omega, \mathbf{C})$, f un élément de $\mathcal{L}_C$, à valeurs réelles. On suppose f associé à u.

a. Soit n un entier positif tel que $\int z^n f(z)\, d\lambda(z) \neq 0$.

Montrer $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n u = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^n u = 0$.

[On pourra utiliser un développement de Taylor au voisinage d'un point quelconque de ω].

b. On suppose que f n'est pas λ-négligeable. Montrer que u est polyharmonique dans ω.

4° Soient ω un ouvert non vide de $\mathbf{C}$, u un élément de $\mathcal{C}^0(\omega, \mathbf{R})$, $\mathcal{S}$ l'ensemble des similitudes directes (bijectives) S vérifiant $S(D) \subset \omega$, où D est le disque fermé $\overline{D}(0, 1)$, $\mathcal{E}$ l'ensemble, lorsque S décrit $\mathcal{S}$, des applications $z \longmapsto u(S(z))$ de D dans $\mathbf{R}$. Montrer l'équivalence des énoncés suivants :

(*i*) u est polyharmonique (de ω dans $\mathbf{R}$).

(*ii*) L'espace vectoriel engendré par $\mathcal{E}$ n'est pas dense dans l'espace $\mathcal{C}(D, \mathbf{R})$ des applications continues de D dans $\mathbf{R}$, muni de la topologie de la convergence uniforme.

[On pourra, par des procédés de régularisation, se ramener au cas où u est de classe C^∞, et aussi remplacer des mesures de Radon par des éléments de $\mathcal{L}_C$].

RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE

1. Thème du sujet

L'idée centrale du problème est une propriété générale de moyenne, caractéristique des fonctions polyharmoniques dans le disque unité ouvert D du plan $\mathbf{R}^2$: pour qu'une fonction f continue réelle dans D soit polyharmonique, il faut et il suffit qu'il existe une mesure de Radon réelle **non nulle** μ à support compact **associée** à f au sens suivant : pour toute similitude directe σ vérifiant $\sigma(\mathrm{supp}\,\mu) \subset \mathrm{D}$, on a $\int f\, d(\sigma\mu) = 0$ (supp μ désigne le support de μ et $\sigma\mu$ l'image de μ par σ).

Ce résultat peut s'étendre au cas de n dimensions, mais le cas $n = 2$ est plus facile à traiter que le cas $n \geqslant 3$, car on peut alors utiliser les éléments de la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe. Le cas $n = 1$ est beaucoup plus simple.

Si on prend pour μ la mesure réelle constituée par la masse -1 en un point z_0 et par la répartition homogène de la masse $+1$ sur un cercle de centre z_0 on obtient la propriété de moyenne de Gauss qui est, comme on sait, caractéristique des fonctions harmoniques. Si on prend pour μ la mesure constituée par la répartition homogène de la masse $+1$ sur l'intérieur d'une ellipse E et la répartition homogène de la masse -1 sur l'intérieur d'une seconde ellipse homofocale à E, on obtient une propriété beaucoup moins connue des fonctions harmoniques (voir par exemple l'ouvrage classique de COURANT et HILBERT).

Dans l'énoncé de la propriété générale on peut supposer que la mesure μ est absolument continue, autrement dit on peut remplacer «mesure associée à f» par «fonction (intégrable au sens de Lebesgue, presque partout nulle hors d'un compact) associée à f». On se limitait à ce cas dans l'énoncé du problème, car la notion de mesure de Radon non positive ne figure pas explicitement au programme de l'agrégation.

Le résultat en vue s'obtient en utilisant des développements de Taylor pour f lorsque cette fonction est supposée indéfiniment dérivable. Quelques préliminaires concernant les fonctions harmoniques et le potentiel logarithmique sont nécessaires. Le cas où f est seulement supposée continue s'obtient par régularisation, en utilisant le fait que toute limite uniforme de fonctions polyharmoniques d'ordre $\leqslant k$ dans un ouvert Ω est polyharmonique d'ordre $\leqslant k$ dans Ω.

Le problème était divisé en quatre parties : la première (préliminaires sur les fonctions polyharmoniques) avait pour but d'étudier la structure locale des fonctions polyharmoniques d'ordre k dans un disque ouvert (théorème d'Almansi) et d'en déduire que $\mathcal{H}^k(\mathrm{D}(\mathrm{O},\mathrm{R}),\ \mathbf{C})$ est fermé dans $\mathcal{C}(\mathrm{D}(\mathrm{O},\mathrm{R}),\mathbf{C})$. La seconde partie était l'étude des fonctions «normales», *i.e.* des fonctions réelles dans le potentiel logarithmique est identiquement nul hors d'un compact ; ce sont aussi les fonctions orthogonales aux fonctions harmoniques (en un sens bien précisé). Entre ces deux parties préliminaires et la quatrième partie, consacrée à la démonstration du résultat en vue, on avait ajouté une troisième partie, qui était l'étude d'un exemple concret de fonction normale ; cet exemple fournit, pour les fonctions harmoniques, la propriété de moyenne déjà signalée relative à des ellipses homofocales. La quatrième partie se terminait par une application du théorème général de moyenne à la construction de systèmes totaux de fonctions continues.

2. Observations générales

Sans doute le problème était-il un peu trop long, mais il ne comportait pas de très grandes difficultés, sauf peut-être dans la quatrième partie, abordée par très peu de candidats. Il fallait maîtriser plusieurs parties du programme d'analyse (théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe, intégrale de Lebesgue, etc.) et surtout être vraiment familier avec les techniques usuelles : séries (doubles), convergence uniforme, dérivation terme à terme, développements de Taylor (pour fonctions de plusieurs variables), etc. D'autre part, une lecture attentive du texte permettait de repérer un certain nombre de questions qu'on pourrait presque qualifier de «questions de cours», par exemple les questions I 1°, II 1°, III 1°, etc. Le barème était tel qu'un candidat qui se serait limité à les traiter à fond aurait été fort bien placé pour une éventuelle admissibilité. Comme il a déjà été dit dans des rapports précédents, si les textes proposés sont longs (mais certains candidats brillants en traitent la plus large partie) il est en fait surtout demandé d'en traiter solidement, sans bluff ni fébrilité, une partie limitée.

- Il serait sans doute lassant de répéter ici les remarques qu'on peut trouver dans les rapports précédents concernant la présentation des copies et ce qu'on peut appeler les «non raisonnements» : «donc» abusifs ou intempestifs, «on sait bien...» quelque résultat commode localement mais faux, sans oublier les classiques invocations magiques : «d'après LEBESGUE», «d'après FUBINI», etc. Trop de candidats ne font pas la distinction entre une démonstration et un galimatias destiné à duper le correcteur. A l'inverse les correcteurs ont eu le plaisir de lire quelques très bonnes copies ; trois d'entre elles, particulièrement brillantes, ont obtenu des notes voisines du maximum.

3. Remarques particulières

PREMIERE PARTIE

Le but de cette partie est de donner la structure locale des fonctions polyharmoniques (ici dans un disque ouvert centré en O) et de démontrer que pour k entier $\geqslant 1$, $\mathcal{H}^k(\mathrm{D}(\mathrm{O},\mathrm{R}),\mathbf{C})$ est fermé dans $\mathcal{C}_c(\mathrm{D}(\mathrm{O},\mathrm{R}),\mathbf{C})$, résultat que les préliminaires rappelaient pour k égal à 1.

1° Cette «question de cours» est en général fort mal traitée. Dans le sens *(i)* ⇒ *(ii)* il suffisait évidemment de dire que, pour une famille sommable de réels **positifs,** chaque terme est majoré par la somme de la dite famille. Mais il n'en va pas ainsi dans la plupart des copies ! : raisonnements par l'absurde des plus fumeux, confusion entre «fini en tout point» et «borné» (ce qui est proprement scandaleux), utilisation de ce que l'on a : $\lim_{m,n} |a_{m,n}| \rho^{m+n} = 0$, et de ce que le complémentaire dans $\mathbf{N}^2$ de $]\mathrm{N},\rightarrow[^2$ ne serait autre que $[0,\mathrm{N}]^2$ pour conclure (cette dernière erreur, des plus vulgaires, est reproduite par trop de copies au I 4° et I 5° ...) etc. Pour *(ii)* ⇒ *(i)*, on se ramenait immédiatement à : $\sum\sum_{m,n} \sigma^{m+n} < +\infty$ pour σ réel dans $[0,1[$, mais même ce dernier point est souvent fort mal prouvé.

Signalons enfin que cette question a donné lieu à une débauche de quantifications délirantes — il ne saurait être trop conseillé d'écrire en français «basique» ce que l'on ne sait pas quantifier.... — et que très peu de candidats ont fait d'eux-mêmes la remarque que l'appartenance de a à $\mathcal{A}_\mathrm{R}$ donne la convergence uniforme compacte dans $\mathrm{D}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ de la série double de fonctions $\sum\sum a_{m,n}\, z^m\, \bar{z}^{\,n}$.

Pour terminer, il n'était nul besoin pour être efficace d'utiliser la notion de filtre de sections ou des résultats élaborés concernant les familles sommables !

2° Cette question était l'occasion rêvée pour accumuler toutes les erreurs signalées dans les remarques générales ; les trop rares copies qui comportent à ce sujet quelque chose de sensé et d'honnête, sans même parvenir à une solution complète, ont été fortement récompensées.

Voici ce que le jury pouvait, en gros, attendre comme solution : si a appartient à $\mathcal{A}_\mathrm{R}$, F_a est continue d'après une remarque précédente, et les suites doubles b et c de complexes définies par : $b_{m,n} = (m+1)\ a_{m+1,n}$ et $c_{m,n} = (n+1)\, a_{m,n+1}$ appartiennent à $\mathcal{A}_\mathrm{R}$ (en montrant par exemple *(ii)* du 1° à leur sujet), de sorte que les séries doubles $\Sigma\Sigma\, b_{m,n}\, z^m \bar{z}^{-n}$ et $\Sigma\Sigma\, C_{m,n}\, z^m \bar{z}^{-n}$ convergent normalement sur tout compact de $D(O,R)$; il en est de même de toutes leurs combinaisons linéaires ; de là, $\Sigma\Sigma \frac{\partial}{\partial x}(a_{m,n}\, z^m \bar{z}^{-n}$ et aussi $\Sigma\Sigma \frac{\partial}{\partial y}(a_{m,n}\, z^m \bar{z}^{-}$ convergent uniformément sur tout compact de $D(O,R)$; ainsi, d'une part F_a est partiellement dérivable par rapport à x (resp. y) dans $D(O,R)$, avec dérivation terme à terme, les dérivées partielles sont continues, donc F_a est φ^1, d'autre part, par recombinaison linéaire, on a bien : $\frac{\partial F_a}{\partial z}(z) = \Sigma\Sigma\, b_{m,n}\, z^m \bar{z}^{-n}$ (de même pour $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ ...). On achève par une récurrence immédiate, qui donne en particulier ΔF_a, $\Delta^k F_a$, $\frac{\partial^{p+q}}{\partial_z{}^p \partial_{\bar{z}}{}^q} F_a$ etc...

Citons les erreurs relevées le plus fréquemment :

La convergence normale, ou uniforme, voire absolue, d'une série de fonctions $\mathcal{C}^\infty$, entraîne que la somme est $\mathcal{C}^\infty$, et l'on peut donc, en outre, dériver terme à terme. (Ce serait en effet bien commode !) ;

Puisque z et $\bar{z}$ sont, **grosso modo**, des «variables indépendantes» (ceci malgré les extrêmes scrupules de langage des préliminaires !), l'on peut donc se préoccuper exclusivement des opérateurs $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sans revenir un instant aux variables x et y ;

L'existence de dérivées partielles de tous ordres en x et y (voire même seulement des dérivées partielles de la forme $\frac{\partial^p}{\partial x^p}$. et $\frac{\partial^q}{\partial y^q}$. ...) suffit à assurer le caractère $\mathcal{C}^\infty$.

Signalons encore des essais infructueux pour montrer que F_a est $\mathbf{C}$-analytique, à l'aide de sommations adéquates, et de ce que z et $\bar{z}$ n'ont quelque rapport que lorsque cela est bien utile...,

3° Le caractère injectif de $a \mapsto F_a$ est souvent bien vu, même si la formule liant $\frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial \bar{z}^q} F_a(0)$ et $a_{p,q}$ est parfois inexacte. Dans le «sottisier» déjà bondé de l'agrégation, ajoutons : «la famille $(z^m \bar{z}^n)_{(m,n) \in \mathbf{N}^2}$ est libre, d'où le résultat» ; «Si $\Sigma\Sigma a_{m,n}\, z^m \bar{z}^n = 0$ dans $D(O,R)$, on a : $a = 0$, par prolongement analytique».

L'inclusion $\mathcal{H}^1(D(O,R), \mathbf{C}) \subset \mathcal{F}_R$ ne demandait qu'un peu de soin à partir du résultat cité au 3° des préliminaires. Encore convenait-il d'expliquer pourquoi la suite double, qui s'imposait alors, était dans $\mathcal{A}_R$, ce que peu de candidats ont su bien faire.

4° Quitte à paraître insister lourdement, « Δ induit une surjection de $\mathcal{F}_R$ sur lui-même» signifie, et dans cet ordre : « $\Delta(\mathcal{F}_R) \subset \mathcal{F}_R$» et «pour tout f élément de $\mathcal{F}_R$, il existe g dans $\mathcal{F}_R$ qui vérifie : $\Delta g = f$». Il suffisait bien entendu, en transmuant par la bijection $a \mapsto F_a$ de $\mathcal{A}_R$ sur $\mathcal{F}_R$, de raisonner en termes de $\mathcal{A}_R$.

Pour l'inclusion $\mathcal{H}^k \subset \mathcal{F}_R$ (brièvement écrite), où l'on souhaitait voir apparaître le mot «récurrence», suivi d'une démonstration (au lieu de l'expression «et ainsi de suite», suivie d'aucune) l'essentiel des erreurs rencontrées consistait à penser que le caractère surjectif précédemment dévoilé signifiait en fait : bijectif ! Enfin, pour la caractérisation des éléments a de $\mathcal{A}_R$ tels que $\Delta^k F_a = 0$, on a pu assister à une lutte sévère entre «et» et «ou» qu'il s'agit de glisser entre : «pour tout $m \geqslant k$ », «pour tout $n \geqslant k$ »... , la version défectueuse faisant jeu égal avec la correcte. Comme il a été dit plus haut, ceci n'est pas sans lien avec l'emploi non maîtrisé des quantificateurs, et la croyance que $\mathbf{N}^2$ est la réunion disjointe de $[0, N]^2$ et $]N, \rightarrow[^2$.

5° Certains candidats n'ont pas saisi l'importance du mot «exactement» (égalité d'ensembles, i-e double inclusion). Une inclusion était évidente avec 4°. Pour l'autre, il s'agissait de sommer «habilement» pour faire apparaître les puissances de $z\bar{z}$; mais, en fait, un dessin aidait puissamment, si besoin, la formulation théorique ; ce dessin bien simple n'a été aperçu que dans de trop rares copies. Pour passer enfin au cas A quelconque, que de difficultés dans les copies, alors qu'il n'y en a là vraiment aucune.

6° Un nombre infime de copies voit qu'il suffit de montrer (pour a.) que h_n est uniformément de Cauchy sur les compacts de $D(O, A)$ et, pour ce faire, de mettre en œuvre le principe du maximum (ou un quelconque succédané).

Pour b. il est bien rare qu'une fois mis en place les débuts d'une nécessaire récurrence, on indique clairement qu'il s'agit d'abord de choisir un compact K de $D(O,R)$,

puis A tel que $O< A<R$, et $K\subset D(O,A)$, **puis, donc,** g_n , h_n telles que etc., pour aboutir à la conclusion. Le jury a toutefois peu tenu compte des rédactions légèrement défectueuses à ce sujet.

DEUXIEME PARTIE

Signalons d'abord deux rectifications typographiques à apporter au texte (ces erreurs n'ont en fait pas gêné les candidats) : il convient de glisser un indice c ($\mathcal{L}_c$ au lieu de $\mathcal{L}$) dans le «chapeau», et de remplacer un R intempestif par r dans 2°. Le chapeau demandait donc d'admettre la formule de Poisson ($\Delta\hat{f}=-2\pi f$,si...), utile pour 7° ; cette partie était, il convient de le souligner, rédigée en termes de densités, en ce sens que les fonctions f , éléments de $\mathcal{L}_c$, remplacent ici les mesures $f\,.\,d\lambda$, et ne sont qu'un cas particulier des mesures de Radon complexes sur $\mathbf{C}$ à support compact. On faisait étudier quelques propriétés élémentaires du potentiel $\hat{f}$, en particulier le principe de symétrie (3° b), la caractérisation des fonctions normales (6°), qui remplacent donc ici les mesures à support compact, **réelles**, dont tous les moments complexes sont nuls (5° a (*ii*)). Bref, cette partie servait à entasser tous les outils nécessaires à la partie IV.

1° Que d'erreurs ! Certains candidats mal inspirés ne suivent pas l'indication de l'énoncé, et s'embourbent dans des valeurs moyennes donnant lieu à des résultats numériques incongrus. Un rapide test concernant le comportement asymptotique à l'infini aurait pourtant permis d'éliminer les formules les plus folkloriques.

La plupart des candidats ont de très grosses difficultés avec les déterminations du logarithme complexe, ou de l'argument. Il ne s'agissait ici, après une réduction immédiate (elle-même déjà source d'erreurs !), que de la détermination principale ; encore convenait-il de ne pas faire semblant de confondre Log $(1-u)$ et Log $|1-u|$, de connaître le développement en série entière de Log $(1-u)$ dans $D(0,1)$ [dont le jury souligne qu'il n'est ni $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} \dfrac{u^n}{n}$ ni $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+l}u^n}{n}$, que k ou l soient égaux à 1 ou 0 !, et qu'il ne converge pas uniformément dans $D(0,1)$!], enfin d'employer à bon escient une interversion des signes Σ et $\int$ dans un cas parfaitement élémentaire, ne nécessitant aucunement de recourir à la théorie de Lebesgue !

Le jury se doit d'insister sur le fait qu'il tient pour inquiétant qu'un très grand nombre de candidats ne traite pas correctement cette partie de la question.

Enfin, pour $|z|=r$, une ou deux copies seulement utilisent les résultats précédents, et, par exemple, le théorème de convergence monotone ; on trouve par contre quelques démonstrations sérieuses (mais assez longues) qui montrent à la main que Log $\left(\dfrac{1}{|z-re^{i\theta}|}\right)$ donne lieu pour $|z|=r$ à une intégrale impropre de Riemann convergente, puis calculent des intégrales de Log (sin θ) etc. pour aboutir au résultat souhaité. Evidemment, un grand nombre fait la remarque curieuse que l'intégrale «n'existe pas», puisque la fonction à intégrer «n'est pas toujours définie» ou «devient infinie» etc., ce qui ne l'empêchera pas de disserter doctement sur le «presque partout» dans les questions suivantes !

2°, 3°, 4 °. Sauf rares exceptions les candidats ne connaissent pas ou ne savent pas utiliser les théorèmes de Fubini (Fubini–Lebesgue, Fubini–Fatou ou Tonelli).

Il est de la sorte à peu près vain de commenter très à fond ces questions, qui demanderaient, outre une vigilante honnêteté sur l'emploi du mot «donc», quelque habileté. Très peu de candidats ont en fait compris l'utilité de la remarque sur la mémoration locale de Log $\left(\dfrac{1}{|z-\zeta|}\right.$, qui permettait de se ramener au cas des fonctions positives... ; très peu de candidats également ont vu que l'essentiel du 4° était la λ-mesurabilité de $P[\varphi]\,.\,f$, ou encore de $P[\varphi]$ (le reste étant enfantin) ; mais il convenait encore pour ce dernier point d'être rigoureux et il n'est peut-être pas inutile de rappeler ici que la frontière d'un ouvert n'est pas toujours λ-négligeable...

TROISIEME ET QUATRIEME PARTIE

Des candidats en très petit nombre abordent la quatrième partie ; la plupart fournissent des copies brillantes, et donnent, en partie ou totalité, la solution des questions qu'ils traitent.

En ce qui concerne la partie III, le jury s'alarme de la masse écrasante d'erreurs, d'approximations, de médiocrités dont les rédactions du III 1° sont en général parsemées. Il convient sans doute de rappeler que le cosinus complexe, usuellement restreint, fournit l'un des premiers exemples de transformation conforme, que les théorèmes de la transformation conforme peuvent être considérés comme faisant partie du programme, enfin que l'on a renoncé à dénombrer les points de vue ou formules concernant les polynômes de Tchebycheff, de sorte que tout candidat les a entendu évoquer plusieurs fois au long de sa scolarité. Force est donc de constater qu'il ne reste pas grand chose d'un tel enseignement.

4. Les notes (sur 60)

Nombre de copies corrigées : 2231
Répartition des notes :

0	13,19 %
1 à 4	29,33 %
5 à 8	16,22 %
9 à 12	12,25 %
13 à 16	8,81 %
17 à 20	6,37 %
21 à 24	4,56 %
25 à 28	3,12 %
29 à 32	2,58 %
33 à 36	1,40 %
37 à 40	0,72 %
41 à 48	0,86 %
49 à 60	0,59 %

ANALYSE NUMÉRIQUE

AVERTISSEMENT

Les candidats sont priés de respecter les notations et la numérotation de l'énoncé. Les notations ou abréviations abusives risquent de ne pas être comprises.

Les démontrations et présentations concises, claires et soignées seront particulièrement bien appréciées.

NOTATIONS

Tous les espaces vectoriels considérés sont réels.

Si X est un espace normé, $\mathcal{L}(X)$ désigne l'espace vectoriel des applications linéaires continues de X dans lui-même, muni de la norme usuelle.

Soit O un ouvert de $\mathbf{R}^n$; $\mathcal{C}^0(O\,;X)$ (resp. $\mathcal{C}^k(O\,;X)$) désigne l'espace des fonctions continues (resp. k fois continûment différentiables) de O dans X.

Si K est un compact de $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{C}^0(K\,;X)$ (resp. $\mathcal{C}^k(K\,;X)$ est l'espace des restrictions à K des fonctions de $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}^n\,;X)$ (resp. de $\mathcal{C}^k(\mathbf{R}^n\,;X)$) muni (à l'exception de certains cas signalés) de la topologie usuelle de la convergence uniforme (resp. de la convergence uniforme pour l'ensemble des dérivées d'ordre $\leqslant k$) sur K.

Si $X = \mathbf{R}$, on notera $\mathcal{C}^k(O)$ (resp. $\mathcal{C}^k(K)$) au lieu de $\mathcal{C}^k(O\,;\mathbf{R})$ (resp. $\mathcal{C}^k(K\,;\mathbf{R})$).

PARTIE I

On considère $\Omega =]0\,,1[$. Soit $L^2(\Omega)$ l'espace de Hilbert des (classes de) fonctions de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue sur Ω.

On note

$$(u, v)_0 = \int_\Omega u(x)v(x)dx\ , \qquad \|u\|_0 = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

le produit scalaire et la norme dans $L^2(\Omega)$.