

écrit

- 4 ont été affectés à des organismes de recherche (C.N.R.S., D.G.R.S.T.) ;
- 1 sera nommé ingénieur-élève d'une Grande Ecole ;
- 2 ont été maintenus dans l'enseignement supérieur privé.

3.7. Influence de la mixité du concours

La mixité des concours de recrutement d'enseignants a gagné peu à peu les diverses disciplines : elle est le lot commun depuis cette année. En ce qui concerne l'agrégation de mathématiques, alors qu'il y avait jusqu'ici un concours féminin et un concours masculin (avec jurys séparés, mais mêmes sujets d'épreuves écrites), le concours de 1976 était pour la première fois commun aux candidats des deux sexes.

Le tableau suivant permet de comparer les situations de 1975 et 1976 (F et H se rapportent respectivement aux hommes et aux femmes ; τ désigne $\frac{100 F}{F+H}$; on a tenu compte des candidats français et étrangers) :

	1976			1975			1973
	F	H	τ	F	H	τ	τ
Inscrits	1 052	1 768	37	1 044	1 858	36	36
Admissibles	116	359	24	176	316	36	33
Admis	60	159	28	87	129	40	36

Si l'on ajoute qu'en 1976 les cinq premières candidates ont obtenu les numéros de classement 6, 19, 24, 35 et 41, il semble que la mixité ait été assez nettement favorable aux candidats hommes, et ceci malgré la persistance d'un meilleur comportement des femmes à l'oral.

Il peut d'ailleurs s'agir là d'un fait accidentel (la comparaison est déjà moins défavorable aux candidates si l'on prend 1973 pour année de référence de l'ancien régime) et une seule expérience ne suffit pas pour porter un jugement définitif. Attendons donc, les résultats de 1977.

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

Sujet : (durée : 6 heures)

INTRODUCTION

On se fixe pour tout le problème un espace vectoriel euclidien E de dimension finie ≥ 4 . Par « vecteur » on entend « élément de E ». Si x et y sont deux vecteurs, on note xy leur produit scalaire (qui est un nombre réel). Si x est un vecteur, on note $|x|$ sa norme \sqrt{xx} . Si x et y sont deux vecteurs non nuls, on note \widehat{xy} leur angle, c'est-à-dire l'unique nombre réel θ tel que $0 \leq \theta \leq \pi$ et que $\cos \theta = \frac{xy}{|x| \cdot |y|}$.

On convient d'appeler réflexion une symétrie hyperplane orthogonale de E , c'est-à-dire un élément ρ du groupe orthogonal $O(E)$ de E tel que $\rho^2 = 1_E$ et que l'ensemble $\text{Ker}(\rho - 1_E)$ des points fixes de ρ soit un hyperplan de E . Si x est un vecteur non nul, ρ_x désigne l'unique réflexion telle que $\rho_x(x) = -x$. On appelle similitude le composé d'une transformation orthogonale (élément de $O(E)$) et d'une homothétie (centrée en l'origine de E) de rapport $\neq 0$. Deux parties A et B de E sont dites semblables s'il existe une similitude σ telle que $\sigma(A) = B$.

Un cristal est une partie non-vide X de E telle que pour tout couple (x, y) d'éléments de X (éventuellement égaux), on ait :

$$y \neq 0, \quad y \neq 2x, \quad \frac{2xy}{yy} \in Z \quad \text{et} \quad \rho_y(x) \in X.$$

PREMIÈRE PARTIE

1° Soient x et y deux vecteurs, avec $y \neq 0$. On pose alors :

$$n(x, y) = 2 \frac{xy'}{yy'}$$

Démontrer la formule :

$$p_y(x) = x - n(x, y)y.$$

2° Démontrer que si deux vecteurs x et y appartiennent à un même cristal, on a les inégalités :

$$0 \leq n(x, y)n(y, x) \leq 4 \quad \text{et} \quad -3 \leq n(x, y) \leq 3.$$

3° Démontrer l'existence d'une partie Ω de \mathbf{R}^4 , de cardinal 12, telle que si x et y sont deux vecteurs non orthogonaux appartenant à un même cristal, on ait :

$$\left(n(x, y), n(y, x), \left| \frac{y'}{x} \right|, \widehat{x, y} \right) \in \Omega.$$

(Par exception, il est nécessaire de traiter complètement cette question, c'est-à-dire de disposer d'un tel ensemble Ω par la liste de ses 12 éléments, pour pouvoir résoudre la suite du problème. En règle générale, il suffit en effet, pour pouvoir répondre à une question, d'admettre les résultats énoncés dans les questions qui la précèdent.)

4° On dit que deux vecteurs non nuls x et y forment un angle aigu si $0 < \widehat{x, y} < \frac{\pi}{2}$.

Démontrer que si deux vecteurs x et y appartiennent à un même cristal X et forment un angle aigu, alors leur différence $y - x$ appartient à X .

5° Soient X et Y deux cristaux, F un sous-espace vectoriel de E , λ un nombre réel > 0 , S_λ la « sphère » formée des vecteurs de norme λ . Démontrer que $X \cap Y$, $X \cap F$ et $X \cap S_\lambda$ sont, ou bien vides, ou bien des cristaux.

6° Soient X_1, \dots, X_p ($p \geq 2$) une famille finie de cristaux deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire tels que tout vecteur de X_i soit orthogonal à tout vecteur de X_j , pour $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq p$, $i \neq j$.

Démontrer que la réunion $X = X_1 \cup \dots \cup X_p$ est un cristal (on dira que X est la réunion orthogonale des cristaux X_1, \dots, X_p).

7° Un cristal Y est dit indécomposable s'il n'existe pas de cristaux Y_1 et Y_2 tels que Y soit la réunion orthogonale de Y_1 et de Y_2 .

Démontrer que tout cristal non indécomposable X est réunion ortho-

gonale d'une famille finie X_1, \dots, X_p de cristaux indécomposables, et que ces cristaux X_1, \dots, X_p sont parfaitement déterminés par X , à l'ordre près.

8° Si P est un ensemble formé de vecteurs non nuls, on note $W(P)$ le sous-groupe du groupe orthogonal $O(E)$ engendré par les réflexions p_2 , lorsque x décrit P .

Démontrer que si un vecteur x appartient à un cristal indécomposable X , alors, d'une part l'orbite de x sous l'action de $W(X)$ et d'autre part l'ensemble X engendrent le même sous-espace vectoriel de E .

9° Si P est une partie de E , on note $|P|$ l'ensemble des normes $|x|$ lorsque x décrit P .

Démontrer que si X est un cristal indécomposable, l'ensemble $|X|$ possède 1 ou 2 éléments.

10° Soit X un cristal indécomposable, et soit λ le plus petit élément de $|X|$. Démontrer que si x et y sont deux vecteurs distincts de X , on a : $|x - y| \geq \lambda$.

11° Démontrer que tout cristal est fini.

12° Démontrer que si X est un cristal, le groupe $W(X)$ est fini.

13° On appelle rang d'un cristal X la dimension du sous-espace vectoriel $\mathbf{R}X$ engendré par X .

Démontrer qu'à similitude près il n'existe qu'un seul cristal de rang 1, noté A_1 , et qu'il est indécomposable.

DEUXIÈME PARTIE

*Les résultats de cette deuxième partie
ne sont pas indispensables par la suite*

1° Démontrer qu'à similitude près, il n'existe qu'un seul cristal de rang 2, noté S_2 , qui ne soit pas indécomposable et dont tous les vecteurs aient même norme. Dessiner S_2 (dans le plan euclidien $\mathbf{R}S_2$).

2° Démontrer que dans un cristal X indécomposable de rang 2, on peut trouver deux vecteurs x et y formant un angle aigu. Si de plus $|X|$ possède deux éléments, démontrer qu'on peut imposer la condition supplémentaire : $|y| > |x|$.

3° Démontrer qu'à similitude près, il n'existe qu'un seul cristal de rang 2, noté A_2 , qui soit indécomposable et dont tous les vecteurs aient même norme. Dessiner A_2 .

4° Démontrer qu'à similitude près, il n'existe, outre le cristal A_2 , que deux autres cristaux indécomposables de rang 2, notés B_2 et C_2 , de cardinaux respectifs 8 et 12.

Dessiner ces deux cristaux.

TROISIÈME PARTIE

1° Démontrer la non-vacuité de l'ensemble $\mathcal{C}(X)$ des vecteurs t qui ne sont orthogonaux à aucun des vecteurs d'un cristal donné X .

2° Soit X un cristal et $t \in \mathcal{C}(X)$. Notons X_t^+ l'ensemble des vecteurs de X qui forment un angle aigu ou nul avec t . Notons enfin B_t^+ l'ensemble des vecteurs de X_t^+ qui ne peuvent pas s'écrire comme somme de deux éléments de X_t^+ . Démontrer que tout élément de X_t^+ est combinaison linéaire d'éléments de B_t^+ à coefficients entiers ≥ 0 .

3° On dit que deux vecteurs non nuls x et y forment un angle *obtus* si $\pi < \angle(x, y) < \pi$. Soit X un cristal et $t \in \mathcal{C}(X)$; démontrer que les éléments de B_t^+ forment entre eux des angles obtus ou droits.

4° On appelle *demi-espace* (sous-entendu : strict) l'image réciproque de l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$ par une forme linéaire non nulle $E \rightarrow \mathbb{R}$. Démontrer que si des vecteurs sont situés dans un même demi-espace et forment entre eux, deux à deux, des angles droits ou obtus, alors ils forment une famille libre.

5° Une partie $B = \{b_1, \dots, b_r\}$ d'un cristal X est dite une *base cristalline* de X si c'est une famille libre, et si pour tout x dans X , il existe un élément $(\varepsilon_i \nu_i, \dots, \nu_r)$ dans le produit cartésien $\{-1, +1\} \times \mathbb{N}^r$ tel que $x = \varepsilon_1 \nu_1 b_1 + \dots + \nu_r b_r$.

Cette définition étant posée, soit X un cristal et $t \in \mathcal{C}(X)$; démontrer que B_t^+ est une base cristalline de X .

6° Soit B une base cristalline d'un cristal X .

Démontrer qu'il existe un vecteur $t \in \mathcal{C}(X)$ tel que $tb = 1$ pour tout $b \in B$, et que, pour un tel vecteur t , on a $B = B_t^+$.

7° Soit B une base cristalline d'un cristal X . On note alors $X^+(B)$ l'ensemble des vecteurs *positifs* de X relativement à B , c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $x \in X$ qui sont combinaisons linéaires à coefficients ≥ 0 des éléments de B .

Démontrer que si $b \in B$, la réflexion ρ_b laisse globalement invariant l'ensemble $X^+(B)$ privé de b .

8° Soit B une base cristalline d'un cristal X . Notons s_B^X la demi-somme des vecteurs de X qui sont positifs relativement à B .

Démontrer que pour tout b dans B , on a : $\rho_b(s_B^X) = s_B^X - b$.

9° Soit x un vecteur d'un cristal X de rang ≥ 2 .

Démontrer qu'il existe un vecteur u orthogonal à x , et donc à $-x$, mais non orthogonal aux autres vecteurs de X .

10° Soient x, X et u comme à la question précédente; et soit v un vecteur tel que $vx > 0$. Posons :

$$\varepsilon = \min_{y \in X, y \neq \pm x} |uy|, \quad M = \max_{y \in X} |uy|, \quad t = u + \frac{\varepsilon}{2M} v.$$

Démontrer que $t \in \mathcal{C}(X)$, et que $x \in B_t^+$.

11° Soit B une base cristalline d'un cristal X , et soit $t \in \mathcal{C}(X)$. Soit $\varphi \in W(B)$ tel que le produit scalaire $s_B^X \varphi(t)$ soit maximal (lorsque φ décrit le groupe $W(B)$).

Démontrer que $\varphi(t)$ forme un angle aigu ou nul avec tous les vecteurs de B .

12° Soient A et B deux bases cristallines d'un même cristal.

Démontrer qu'il existe φ dans $W(B)$ tel que $\varphi(A) = B$.

13° Soit B une base cristalline d'un cristal X .

Démontrer que $W(B) = W(X)$.

14° Démontrer que si deux cristaux ont une base cristalline en commun, alors ils sont égaux.

15° Démontrer qu'à similitude près, il n'existe qu'un nombre fini de cristaux indécomposables.

QUATRIÈME PARTIE

Dans cette partie on se fixe une base orthornormale e_1, \dots, e_N ($N \geq 4$) de l'espace euclidien E.

1° Soit r un entier tel que $1 \leq r \leq N - 1$, et soit A_r l'ensemble des $r(r+1)$ vecteurs de la forme $e_i - e_j$, avec $i \neq j$, $1 \leq i \leq r+1$, $1 \leq j \leq r+1$.

Démontrer que A_r est un cristal.

2° Démontrer que les r vecteurs $e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_r - e_{r+1}$ constituent une base cristalline de A_r .

3° Trouver le nombre d'éléments du groupe $W(A_r)$.

4° Soit r un entier tel que $2 \leq r \leq N$. On considère d'une part les $2r$ vecteurs $\pm e_i$ ($1 \leq i \leq r$), et d'autre part les $2r(r-1)$ vecteurs $\pm e_i \pm e_j$ ($1 \leq i < j \leq r$), où les signes \pm sont choisis indépendamment. Soit B_r l'ensemble de ces $2r^2$ vecteurs.

Démontrer que B_r est un cristal.

5° Démontrer que les r vecteurs

$$e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{r-1} - e_r, e_r$$

constituent une base cristalline de B_r .

6° Soit \mathfrak{J} l'inversion de centre l'origine de E et de puissance 2, c'est-à-dire l'application qui à tout vecteur non nul x associe l'unique vecteur y colinéaire à x tel que $xy = 2$.

Démontrer que si X est un cristal, alors $\mathfrak{J}(X)$ est un cristal.

7° Démontrer que si B est une base cristalline du cristal X, alors $\mathfrak{J}(B)$ est une base cristalline du cristal *inverse* $\mathfrak{J}(X)$.

8° Démontrer que les cristaux A_r, B_r et $C_r = \mathfrak{J}(B_r)$ sont tous indécomposables.

9° Démontrer que, pour $1 \leq r \leq N - 1$, on a l'égalité $\mathfrak{J}(A_r) = A_r$, et que les deux cristaux B_2 et C_2 sont semblables.

10° Démontrer que les cristaux A_r ($1 \leq r \leq N - 1$), B_r ($2 \leq r \leq N$), C_r ($3 \leq r \leq N$) sont deux à deux non semblables.

11° Trouver deux cristaux indécomposables non semblables X et Y tels que $W(X) = W(Y)$.

CINQUIÈME PARTIE

Les questions 20, 30, 40 et 50 de cette cinquième partie sont indépendantes des deuxième, troisième et quatrième parties

10 Un groupe G est dit *cristallographique* si c'est un sous-groupe fini du groupe orthogonal $O(E)$, s'il n'est pas réduit à son élément neutre, si en outre il est engendré par des réflexions, et si enfin il existe une *base de rationalité* pour G, c'est-à-dire une base de E (non nécessairement orthogonale) telle que les matrices des éléments de G par rapport à cette base soient toutes à coefficients rationnels.

Démontrer que si X est un cristal, le groupe $W(X)$ est cristallographique.

20 Soit A une base de rationalité pour un groupe cristallographique G. Soit T le sous-groupe du groupe additif de E engendré par la réunion $D = \cup \varphi(A)$.

$$\varphi \in G$$

Démontrer qu'il existe un nombre réel $\epsilon > 0$ tel que le seul vecteur de T de norme $< \epsilon$ soit le vecteur nul. (On conserve ces notations dans les questions 30, 40 et 50 ci-dessous).

30 Démontrer que si γ est un vecteur non nul tel que la réflexion ρ_γ appartienne à G, alors le groupe $T \cap \mathbf{R}_\gamma$ (formé des vecteurs de T colinéaires à γ) est cyclique.

40 Soit X l'ensemble des vecteurs non nuls x tels que $\rho_x \in G$ et que x soit un générateur du groupe cyclique $T \cap \mathbf{R}_x$.

Démontrer que X est un cristal.

50 Démontrer que $G = W(X)$.

60 Soient ρ et σ deux réflexions appartenant à un même groupe cristallographique.

Démontrer que $(\rho \circ \sigma)^{12} = 1_E$.

70 Soit φ un élément d'un groupe cristallographique. Considérant φ comme un endomorphisme de l'espace vectoriel E, démontrer que son polynôme caractéristique est à coefficients entiers.

80 Donner un exemple de sous-groupe fini de $O(E)$, non réduit à l'élément neutre, engendré par des réflexions, mais qui ne soit pas cristallographique.

90 Démontrer qu'à isomorphie près, il n'y a qu'un nombre fini de groupes cristallographiques.

Sauf pour sa dernière question, cette partie est indépendante de la cinquième partie

1° Soit B une base cristalline d'un cristal indécomposable X (les notations des questions 1, 2 et 3 se suivent).

Démontrer que si x et y sont dans B , le nombre $\widehat{\cos x, y}$ ne peut prendre que 4 valeurs.

2° Désormais, X est de rang 3.

Démontrer que $B = \{a, b, c\}$, avec a non orthogonal à b et b non orthogonal à c .

3° Posons $\alpha = \frac{a}{|a|}$, $\beta = \frac{b}{|b|}$, $\gamma = \frac{c}{|c|}$. En exprimant que le carré scalaire de chacun des trois vecteurs $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha + \sqrt{2}\beta + \gamma$ et $\widehat{\cos \alpha, \beta}$, $\widehat{\cos \beta, \gamma}$, $\widehat{\cos \gamma, \alpha}$ ne peut prendre que trois valeurs.

4° Démontrer que les trois cristaux A_3 , B_3 et C_3 sont, à similitude près, les seuls cristaux indécomposables de rang 3.

5° Soient ρ , σ et τ trois réflexions appartenant à un même groupe cristallographique.

Démontrer que $(\rho \circ \sigma \circ \tau)^{18} = 1_E$.

1. Thème du sujet

● Ce problème est une introduction à la théorie des systèmes de racines réduits, appelés ici **cristaux**, à leur classification et aux groupes qui leur sont associés. Pour les tenants et aboutissants de ces questions, se reporter à la notice historique des chapitres 4, 5 et 6 de *Groupes et Algèbres de Lie* de Nicolas BOURBAKI (pages 234 à 240).

● Voici quelques indications sur les questions les plus difficiles :

Question I-8 : la méthode la plus naturelle est d'observer que les sous-espaces vectoriels engendrés par les diverses orbites déterminées dans X par l'action de $W(X)$ sont orthogonaux et intersectent donc X en une réunion orthogonale de cristaux.

Question I-9 : étant donnés deux vecteurs x et y de X , on peut, d'après la question précédente, trouver y' dans l'orbite de y tel que x et y' ne soient pas orthogonaux. On n'utilise ensuite que $\widehat{\cos y', y}$ égale $|y|$.

Question III-1 : le problème était de montrer que E ne peut être réunion d'un nombre fini d'hyperplans. Cela se voit bien, mais le jury chagrin ne se contenta pas de cette affirmation exacte. On peut invoquer le théorème de Baire : dans un espace métrique complet, toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide. Utilisant le principe des tiroirs on peut prouver que si un espace vectoriel F sur un corps K est réunion d'un nombre fini n de sous-espaces vectoriels stricts, c'est que le corps K est fini, de cardinal $\leq n$. Enfin on peut appliquer la décomposition des variétés algébriques en sous-variétés irréductibles (l'espace affine est irréductible), ou plus simplement, l'intégrité de l'anneau $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$: un produit de formes linéaires non nulles sur E est non nul. Ces remarques s'appliquent aussi à la question III-9.

Question III-4 : l'idée «à avoir» est que toute relation de dépendance linéaire peut s'écrire $\sum_j \lambda_j x_j = \sum_j \mu_j y_j$, avec les λ_j et μ_j positifs. On dit ensuite que le produit scalaire du membre de gauche et de celui de droite est à la fois positif et négatif.

Question III-6 : c'est question n'est facile qu'à la lumière de l'isomorphisme canonique entre un espace vectoriel euclidien et son dual.

Question III-15 : un cristal indécomposable, de base cristalline $\{b_1, \dots, b_r\}$ est déterminé, à similitude près, par les nombres $n(b_j, b_j) \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

Question IV-7 : c'est peut-être la question la plus difficile du problème. Le plus élégant est de remarquer que la réunion des demi-droites portées par les éléments

de B constitue les points extrémaux du cône convexe engendré par $X^+(B)$, lequel cône est invariant par l'inversion.

Les cinquième et sixième parties, plus faciles que les deux précédentes, n'ont presque pas été traitées.

Pour la dernière question, le candidat idéal aurait prouvé ceci : soit G le groupe engendré par les trois réflexions ρ , σ et τ ; soit $\varphi \in G$ et H un sous-groupe de G . Alors on a $\varphi^4 = 1$, $\varphi^6 = 1$, et l'ordre de H divise 48.

2. Observations des correcteurs

● Le texte était long. Mais le candidat qui aurait traité complètement la seule première partie aurait obtenu la note totale de 40 sur 60. Par contre, les six premières questions ne constituaient qu'une simple mise en condition (la première difficulté était de prouver l'unicité dans la septième question). La plupart des candidats n'ont donc traité que quelques-unes de ces six premières questions, ainsi que les premières questions de la lointaine quatrième partie.

● Analysons quelques fautes courantes dans ces copies « faibles ». Pour montrer, dans la quatrième question, que $y - x$ appartient à X , on se donne un z dans X et on établit plus ou moins que $y - x \neq 2z$, $n(y - x, z) \in Z$ et $\rho_z(y - x) \in X$. Cela ne prouve rien, l'idée sous-jacente étant probablement de montrer que la réunion $X \cup \{y - x\}$ est un cristal. Ceci ne serait probant que si les cristaux étaient « maximaux » : cette antinomie si déroutante et si répandue pourrait vouloir dire que la structure de cristal — si « pleine » à défaut d'être « maximale » — est dans l'inconscient collectif du peuple étudiant !

Voici une autre faute usuelle, qui étonne en notre époque d'ensembliste scholastique : dans la cinquième question, pour vérifier $y \neq 2x$, pour les éléments x et y d'un certain ensemble ($X \cap Y$ par exemple), on se croit obligé de démontrer au préalable que cet ensemble possède au moins deux éléments.

Dans cette même cinquième question, les candidats ont peiné pour établir que $X \cap S_\lambda$, supposé non vide, est un cristal. Et pourtant, il suffisait de se souvenir de la définition du groupe orthogonal : comme $\rho_y \in O(E)$, on a $|\rho_y(x)| = |x| = \lambda$. Ordinairement, on calcule laborieusement $|\rho_y(x)|$, ou plutôt son carré.

Passons directement à la quatrième partie, comme les candidats « faibles ». Cela suppose un flair exercé (ou dévoyé) et beaucoup de temps perdu. Prenons la première question. Pour prouver aisément l'axiome $\rho_y(\rho_x(x)) \in A_\gamma$, il suffisait de dire que

$\rho_{e_i} - e_j$ échange e_j et e_j et laisse les autres vecteurs de base invariants. Cette méthode livre d'ailleurs le résultat de la troisième question : le groupe (de Weyl) $W(A_\gamma)$ s'identifie au groupe des permutations de e_1, \dots, e_{r+1} , et possède donc $(r+1)!$ éléments. Au lieu de cela, le candidat maladroit cherche à montrer par un calcul direct que $\rho_{e_i} - e_j$ ($e_k - e_j$) est de la forme $e_m - e_n$ en distinguant les innombrables cas ($k = i$, etc.), en sorte qu'il en oublie. Cette méthode appliquée à B_γ est encore plus désastreuse.

● D'une façon générale, les candidats n'ont pas vu la nature géométrique des transformations et configurations dont il s'agit dans ce problème.

3. Les notes (sur 60)

Nombre de copies corrigées : 2 382

Répartition des notes :

0	3,84 %
1 à 4	35,52 %
5 à 8	23,65 %
9 à 12	11,87 %
13 à 16	8,02 %
17 à 20	5,66 %
21 à 24	4,35 %
25 à 28	2,24 %
29 à 32	1,10 %
33 à 36	0,97 %
37 à 40	0,38 %
41 à 48	1,73 %
48 à 60	0,68 %