enseignements
pré-élémentaire
et élémentaire

CATALOGUES 1975

enseignements
secondaires
et supérieurs

DES PUBLICATIONS

publications
administratives

Ces 3 catalogues
présentent les publications des différents services
de l'Institut National de Recherche
et de Documentation Pédagogiques
(Services Centraux,
Centres Régionaux de Recherche et de Documentation Pédagogiques
et Centres Départementaux de Documentation Pédagogique).

envoi gratuit sur demande
aux C.R.D.P. et C.D.D.P.
(voir liste, en page 3 de couverture)

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION

DIRECTION DES LYCÉES

Agrégation Mathématiques

Rapport de MM. RAMIS et RICHE
Inspecteurs généraux de l'Instruction publique
Présidents du jury masculin et du jury féminin

1975

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE
ET DE DOCUMENTATION PÉDAGOGIQUES

AGREGATION DE MATHEMATIQUES

Session de 1975

I – DEROULEMENT DES CONCOURS

I.1. COMPOSITION DES JURYS

I.1.1. AGREGATION HOMMES

M.	RAMIS,	*Inspecteur général de l'Instruction publique, Président;*
M.	BERRARD,	*Inspecteur général de l'Instruction publique, Vice-président;*
M.	ARTOLA,	*Professeur à l'Université de Bordeaux I ;*
M.	BLONDEL,	*Professeur à l'Université de Bordeaux I ;*
M.	COPODANNO,	*Professeur à l'Université de Besançon ;*
M.	GENET,	*Professeur à l'Université des Pays de l'Adour ;*
M.	GIORGIUTTI,	*Professeur à l'Université de Rennes ;*
M.	KAROUBI,	*Professeur à l'Université de Paris VII ;*
M.	KREE,	*Professeur à l'Université de Paris VI ;*
M.	LEBORGNE,	*Professeur à l'Université de Nantes ;*
M.	RIVET,	*Professeur à l'I.N.S.A. de Rennes ;*
M.	ROSEAU,	*Professeur à l'Université de Paris VI ;*
M.	ZISMAN,	*Professeur à l'Université de Paris VII ;*
M.	ARCANGELI,	*Maître de conférences à l'Université des Pays de l'Adour ;*
Mme	EL-KAROUI,	*Maître de conférences à l'Université du Mans ;*
M.	RUGET,	*Maître de conférences à l'Université de Paris VII ;*
M.	SOUBLIN,	*Maître de conférences à l'Université de Marseille ;*
M.	GEORGE,	*Chargé de cours à l'Université de Nancy I ;*
M.	EXBRAYAT,	*Maître-assistant à l'Université de Paris VI ;*
M.	KERKYACHARIAN,	*Maître-assistant à l'Université de Nancy I ;*
M.	REINHARD,	*Maître de conférences à l'école Polytechnique ;*
M.	CARPENTIER,	*Professeur au lycée Carnot de Dijon ;*
M.	DESCHAMPS,	*Professeur au lycée Louis-le-Grand à Paris ;*
M.	FOREST,	*Professeur au lycée Saint-Louis à Paris ;*
M.	FRAYSSE,	*Professeur au lycée Fermat à Toulouse ;*
M.	GONTARD,	*Professeur au lycée du Parc à Lyon ;*
M.	PAINTANDRE,	*Professeur au lycée Fermat à Toulouse ;*
M.	SIMON,	*Professeur au lycée Jacques Decour à Paris ;*
M.	WARUSFEL,	*Professeur au lycée Louis-le-Grand à Paris ;*
M.	WIRTH,	*Professeur au lycée Saint-Louis à Paris.*

I.1.2. AGREGATION FEMMES

M.	RICHE,	*Inspecteur général de l'Instruction publique, Président ;*
M.	SCHIFFMANN,	*Professeur à l'Université de Strasbourg, Vice-président ;*
M.	ARTOLA,	*Professeur à l'Université de Bordeaux I;*
M.	BLONDEL,	*Professeur à l'Université de Bordeaux I;*
M.	CAPODANNO,	*Professeur à l'Université de Besançon;*
M.	COEURE,	*Professeur à l'Université de Nancy ;*
M.	DENY,	*Professeur à l'Université de Paris XI ;*
M.	DESQ,	*Professeur à l'Université de Toulouse ;*
M.	GENET,	*Professeur à l'Université des Pays de l'Adour ;*
M.	ROSEAU,	*Professeur à l'Université de Paris VI ;*
M.	ARCANGELI,	*Maître de conférences à l'Université des Pays de l'Adour ;*
M.	LETAC,	*Maître de conférences à l'Université de Toulouse ;*
M.	VAN CUTSEM,	*Maître de conférences à l'Université de Grenoble ;*
M.	BAILLE,	*Maître-assistant à l'Université de Grenoble ;*
M.	KAPLAN,	*Maître-assistant à l'Université de Nancy I ;*
M.	KERKYACHARIAN,	*Maître-assistant à l'Université de Nancy I ;*
M.	MAZET,	*Maître-assistant à l'Université de Paris VI ;*
M.	HEE,	*Assistant à l'Université de Paris XI ;*
M.	BLANCHARD,	*Professeur de Mathématiques Supérieures au lycée Saint-Louis à Paris ;*
M.	BOUSQUET,	*Professeur honoraire de Mathématiques Spéciales ;*
M.	CARSIQUE,	*Professeur de Mathématiques Spéciales au lycée Saint-Louis à Paris ;*
M.	DELASSUS,	*Professeur de Mathématiques Spéciales au lycée C. Guérin à Poitiers ;*
M.	MONESTIER,	*Professeur de Mathématiques Spéciales au lycée Chaptal à Paris.*

I.2. CALENDRIER DES EPREUVES

I.2.1. EPREUVES PREPARATOIRES (écrit)

- Elles ont eu lieu aux dates suivantes :
  Mathématiques générales : mercredi 7 mai de 8 à 14 heures ;
  Analyse : vendredi 9 mai de 8 à 14 heures ;
  Mathématiques appliquées : samedi 10 mai de 8 à 14 heures.

Conformément au règlement du concours, les candidats avaient dû préciser l'option de leur choix lors de leur inscription au concours.

- Les listes d'admissibilité ont été affichées :
  – le 19 juin pour l'agrégation masculine (Ministère et lycée Saint-Louis) ;
  – le 12 juin pour l'agrégation féminine (Ministère et lycée Montaigne).

I.2.2. EPREUVES DEFINITIVES (oral)

- Elles se sont déroulées à Paris:
  – du 26 juin au 23 juillet, au lycée La Fontaine pour l'agrégation masculine;
  – du 21 juin au 24 juillet, au lycée Montaigne pour l'agrégation féminine.

- Les résultats définitifs ont été affichés le 25 juillet (candidats et candidates).

I.3. STATISTIQUES DIVERSES

I.3.1. RESULTATS GENERAUX

	Candidats	Candidates
Postes mis au concours.	170	115
Candidats inscrits (l'astérisque correspond aux étrangers)	1 824+ 34*	1 043+ 1*
Candidats présents à la première épreuve	1 587	870
Candidats présents à la dernière épreuve	1 366	752
Admissibles	311+ 5*	175+ 1*
Admis à l'agrégation	125+ 4*	87+ 0*
Equivalences des épreuves pratiques du CAPES	4	4
Equivalences des épreuves complètes du CAPES	0	0

I.3.2. REPARTITION ENTRE LES OPTIONS

	Analyse numérique		Mécanique		Probabilités	
	Femmes	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes	Hommes
Ont composé	342	671	73	167	337	528
Admissibles	65(12)	163(60)	10(1)	26(0)	101(40)	127(34)
Admis	26(8)	71(21)	4(0)	4(0)	57(29)	54(16)

(entre parenthèses est indiqué le nombre des candidats appartenant aux Grandes Ecoles).

I.3.3. SITUATION UNIVERSITAIRE DES CANDIDATS

Les candidats et candidates sont séparés en groupes désignés par les abréviations suivantes :

U ou J : Elèves de l'E.N.S. Ulm ou de l'E.N.S. Jourdan ;
C ou F : Elèves de l'E.N.S. Saint-Cloud ou de l'E.N.S. Fontenay ;
T : Elèves de l'E.N.S.E.T. ;
A : Assistants de Faculté ;
P.C. : Professeurs certifiés ;
C.O. : Professeurs ou assistants en congé ou au Service national ;
C.P.R. : Professeurs stagiaires du C.P.R. ;
I.P.E.S. : Elèves des I.P.E.S.
E : Etudiants ;
D : Personnel autre que certifiés et enseignement privé ;
O.M. : Professeurs détachés ou en coopération ;
Et. : Candidates étrangères.

Candidats	U	C	T	A	PC	CO	CPR	IPES	E	D	OM	Total
Inscrits .	36	18	48	54	585	90	383	171	215	221	37	1 858
Admissibles	34	18	42	16	59	5	53	44	30	7	8	316
Admis	30	15	22	4	18	2	14	13	9	1	1	129

Candidates	J	F	T	A	PC	CO	CPR	IPES	E	D	Et	Total
Inscrites	27	20	6	15	273	8	322	136	129	107	1	1 044
Admissibles	27	20	6	7	20	2	36	41	12	5	1	176
Admises	20	14	3	5	6	1	16	16	3	3	0	87

I.3.4. REPARTITION SUIVANT LES CENTRES D'ECRIT

Centres / Candidats	Aix-Marseille	Amiens	Besançon	Bordeaux-Pau	Caen	Clermont	Dijon	Grenoble	Lille	Limoges	Lyon-St.Etienne	Montpellier	Nancy-Metz
Inscrits	89	48	26	87	34	19	36	70	184	20	78	54	81
Ayant composé	83	37	25	75	29	17	27	63	162	18	71	48	66
Admissibles	6	3	3	16	11	6	2	6	12	4	9	3	9
Admis	3	2	0	4	3	1	1	1	3	1	3	0	1

Centres / Candidats	Nantes	Nice-Ajaccio	Orléans-Tours	Paris	Poitiers	Reims	Rennes-Brest	Rouen	Strasbourg	Toulouse	Etranger et DOM
Inscrits	73	68	32	455	39	38	58	49	47	70	103
Ayant composé	53	58	26	394	34	28	51	43	43	58	78
Admissibles	7	8	3	154	6	5	11	4	9	6	13
Admis	2	2	0	91	1	1	1	2	1	2	3

Centres / Candidates	Aix-Marseille	Amiens	Besançon	Bordeaux	Caen	Clermont	Dijon	Grenoble	Lille	Limoges	Lyon	Montpellier	Nancy-Metz
Inscrites	47	21	21	19	15	15	11	58	58	14	51	39	40
Ayant composé	41	16	19	16	10	14	10	53	46	11	41	38	29
Admissibles	2	2	1	2	4	3	0	4	5	2	4	0	4
Admises	0	0	1	2	0	2	0	3	2	0	3	0	4

Centres / Candidates	Nantes	Nice	Orléans-Tours	Paris	Poitiers	Reims	Rennes-Brest	Rouen	Strasbourg	Toulouse	Etranger - DOM
Inscrites	31	37	22	345	13	12	39	30	24	57	25
Ayant composé	17	33	19	294	13	7	34	25	20	46	19
Admissibles	3	5	2	111	0	0	8	1	4	7	2
Admises	1	1	1	61	0	0	3	1	1	1	0

I.3.5. *AFFECTATIONS DES AGREGES 1975*

Sur les 125 candidats et 87 candidates français admis :

53+ 19...	feront une année supplémentaire dans une E.N.S. ;
6+ 11...	ont été maintenus ou détachés dans l'enseignement supérieur ;
8+ 2...	ont obtenu des chaires préparatoires aux Grandes Ecoles ;
26+ 18...	ont obtenu des chaires de TC, TE ou TS dans les lycées ;
1+ 1...	ont été nommés dans des Ecoles normales d'instituteurs ;
17+ 19...	ont été nommés sur des chaires ordinaires de lycées ou de c.e.s. ;
13+ 3...	sont partis en coopération ou au service national ;
1+ 14...	suivront un stage de formation professionnelle.

II - ÉPREUVES ÉCRITES

II.1 TEXTE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES GENERALES

DURÉE : 6 heures

La partie I est indépendante des deux suivantes

I

n étant un élément de $\mathbf{N}^*$ (entier naturel non nul), on note $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbf{Q}^n$. La matrice d'une forme quadratique $\bar{q}$ relative à cette base est appelée matrice canonique de $\bar{q}$; $\bar{q}$ est dite positive si $\bar{q}(x) \geqslant 0$ pour tout x.

$\mathrm{M}_n(\mathbf{Q})$ (resp. $\mathrm{M}_n(\mathbf{Z})$) est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{Q}$ (resp. $\mathbf{Z}$). $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q})$ (resp. $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$) est le groupe multiplicatif des matrices inversibles de $\mathrm{M}_n(\mathbf{Q})$ (resp. inversibles de $\mathrm{M}_n(\mathbf{Z})$). I est la matrice unité de $\mathrm{M}_n(\mathbf{Q})$. ${}^t\mathrm{M}$ (resp. det M) est la transposée (resp. le déterminant) de la matrice M. Dans cette première partie, n ne prend que les valeurs 2 et 3.

1° Soit $\bar{q}$ une forme quadratique de $\mathbf{Q}^2$, de matrice canonique $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} u & v \\ v & w \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$. On pose $\delta = \det \mathrm{M}$. Montrer que, si $\bar{q}$ est non dégénérée, positive, alors $\delta = 1$.

2° On suppose toujours $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$ et, pour cette question et la suivante : $\delta = 1$. Montrer que l'une des deux formes $\bar{q}$ ou $-\bar{q}$ est non dégénérée, positive.

3° *a.* Admettant ici que $\bar{q}$ est non dégénérée, positive, démontrer, pour $u \neq 1$, l'existence d'une matrice $\mathrm{P} = \begin{bmatrix} -s & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$ telle que, si $\mathrm{M}' = {}^t\mathrm{PMP} = \begin{bmatrix} u' & v' \\ v' & w' \end{bmatrix}$, alors $0 < u' \leqslant \dfrac{u}{2}$.

b. En déduire l'existence de $\mathrm{N} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$ telle que $\mathrm{M} = {}^t\mathrm{NN}$. Énoncer une propriété relative à la décomposition de $\bar{q}$ en somme de deux carrés.

4° Jusqu'à la fin de cette première partie, $\bar{q}$ désigne une forme quadratique de $\mathbf{Q}^3$, non dégénérée, positive, dont la matrice canonique

$$M = \begin{bmatrix} m & p & q \\ p & m' & r \\ q & r & m'' \end{bmatrix}$$

est un élément de $GL_3(\mathbf{Z})$.

Que peut-on dire des signes de m, m', m'' et det M?

Montrer que, si M n'est pas égale à I, l'une des six inégalités suivantes est vérifiée :

$$|p| > \frac{m}{2}, \ |p| > \frac{m'}{2}, \ |q| > \frac{m}{2}, \ |q| > \frac{m''}{2}, \ |r| > \frac{m'}{2}, \ |r| > \frac{m''}{2}.$$

(on pourra séparer le cas $m = m' = m''$, puis le cas $m \geqslant m' \geqslant m''$, $m > m''$).

5° *a.* Déterminer une matrice triangulaire $P \in GL_3(\mathbf{Z})$ telle que $M_1 = {}^tPMP$ soit de même type que M, avec :

$$m_1 = m, \quad m'_1 \leqslant m' - 1, \quad m''_1 = m''.$$

b. En déduire l'existence de $N \in GL_3(\mathbf{Z})$ telle que $M = {}^tNN$.

Énoncer une propriété relative à la décomposition de $\bar{q}$ en somme de trois carrés.

c. Application numérique : $M = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (on se limitera à exhiber une matrice N).

6° Donner un exemple de matrice $M \in GL_3(\mathbf{Z})$, telle que ${}^tM = M$, que det $M = 1$ et qu'il n'existe aucune matrice $N \in GL_3(\mathbf{Z})$ vérifiant $M = {}^tNN$ (un exemple à coefficients dans $\mathbf{N}^*$ serait apprécié).

7° Retrouver les résultats de la question 3° à partir de ceux du 5°. Comparer les deux méthodes.

II

V est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbf{Q}$; H, H' ..., sont, par convention, des sous-groupes additifs de V (confondus, selon l'usage, avec les ensembles sous-jacents). $\mathcal{H}_0$ = Hom (H, $\mathbf{Z}$) est l'ensemble des morphismes de groupe de H vers $\mathbf{Z}$. $\widehat{H}$ est le sous-espace vectoriel de V engendré par H. La somme H + H' est le sous-groupe de V engendré par $H \cup H'$. Pour $\lambda \in \mathbf{Q}$, λH est l'image de H par l'homothétie de rapport λ.

Une $\mathbf{Z}$-base de H est une famille libre de vecteurs de V telle qu'un vecteur de V appartient à H si, et seulement s'il est combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs des vecteurs de la famille. Un réseau est un sous-groupe de V admettant au moins une $\mathbf{Z}$-base de cardinal n. L, L' ..., sont, par convention, des réseaux de V. Un sous-réseau est un réseau d'un sous-espace vectoriel de V.

1° Démontrer que $\widehat{L} = V$.

2° $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ étant une famille finie de vecteurs de V, on note B la matrice des coordonnées des vecteurs e_i, $(1 \leqslant i \leqslant p)$, dans une base (ω_j), $(1 \leqslant j \leqslant n)$, de V considérée comme fixe dans tout le problème : B est appelée matrice canonique de $\mathcal{B}$. Montrer que, B et B' étant les matrices canoniques d'une $\mathbf{Z}$-base $\mathcal{B}$ de L et d'une famille finie $\mathcal{B}'$ de vecteurs de L, $\mathcal{B}'$ est une $\mathbf{Z}$-base de L si, et seulement s'il existe $P \in GL_n(\mathbf{Z})$ telle que $B' = BP$. Montrer que le rationnel vol L = | det B | est indépendant du choix d'une $\mathbf{Z}$-base de L.

3° L' étant un réseau de V, montrer qu'il existe $d \in \mathbf{N}^*$ tel que $dL' \subset L$ et que $d^n \left(\dfrac{\text{vol } L'}{\text{vol } L}\right)$ est entier.

4° H étant un sous-groupe de L non réduit à $\{0\}$, montrer que H est un sous-réseau de V (on pourra, par exemple, considérer une $\mathbf{Z}$-base (e_i) de L, rechercher un élément a de $\mathbf{N}^*$, une application coordonnée ψ, un vecteur b tel que $\psi(b) = a$ et utiliser l'endomorphisme θ de H défini par :

$$\theta(x) = x - \frac{\psi(x)}{a} b \ .)$$

5° Montrer que l'intersection et la somme de deux réseaux de V sont des réseaux.

6° X et Y étant les matrices canoniques de deux vecteurs x et y de V, on note $(x \mid y) = {}^tXY$ (produit de x et de y), et $\| x \|^2 = {}^tXX$ (carré de x). Une partie A de V est dite bornée s'il existe un rationnel $\mathcal{A}$ tel que $\| x \|^2 \leqslant \mathcal{A}$ pour tout $x \in A$. Montrer que tout sous-groupe H de V dont l'intersection avec toute partie bornée de V est finie est un sous-réseau de V (on pourra considérer une famille libre maximale $(h_1, \ldots, h_r)$ de vecteurs de H, la partie Ω de V formée des vecteurs $\sum_{i=1}^{r} \mu_i h_i$, $\mu_i \in \mathbf{Q} \cap [0, 1]$, et associer au vecteur $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i h_i$, $\lambda_i \in \mathbf{Q}$, le vecteur

$\sum_{i=1}^{r} (\lambda_i - [\lambda_i]) h_i$, où le symbole [ ] représente la partie entière).

Démontrer la réciproque.

III

H étant un sous-groupe de V, on note H_0 l'ensemble des $x \in V$ tels que, pour tout $y \in H$, on ait $(x \mid y) \in \mathbf{Z}$. Un réseau L est dit r-modulaire (resp. unimodulaire) si $L_0 = rL$ (resp. $L_0 = L$); il est dit r-modulaire trivial s'il existe une $\mathbf{Z}$-base (e_i) de L orthogonale (c'est-à-dire vérifiant $(e_i \mid e_j) = 0$ pour $i \neq j$) et telle que $\| e_i \|^2 = \frac{1}{r}$ pour tout i $\left(\frac{1}{r}\right.$ s'appelle alors le carré de la $\mathbf{Z}$-base; cette dernière est dite orthonormale si $r = 1$). $\mathbf{F}_2$ est le corps à deux éléments.

1° *a.* Démontrer que, si L est un réseau de V, $\mathcal{L}_0 = \mathrm{Hom}\,(L, \mathbf{Z})$ est un réseau d'un certain espace vectoriel W de dimension n sur $\mathbf{Q}$ (on pourra utiliser la famille (e_i^0) de $\mathcal{L}_0$ définie par $e_i^0(e_j) = \delta_{ij}$).

b. Définir un isomorphisme α du groupe L_0 sur $\mathcal{L}_0$, indépendant de tout choix de $\mathbf{Z}$-base de L. En déduire que L_0 est un réseau de V, dont on explicitera une $\mathbf{Z}$-base à partir d'une $\mathbf{Z}$-base de L.

2° L et L′ étant deux réseaux de V, démontrer les égalités :

$$L_{00} = L, \quad (L + L')_0 = L_0 \cap L'_0, \quad (L \cap L')_0 = L_0 + L'_0,$$
$$(\mathrm{vol}\, L)\,(\mathrm{vol}\, L_0) = 1.$$

Calculer vol L dans le cas où L est r-modulaire.

3° On suppose jusqu'à la fin de cette partie que L est un réseau r-modulaire trivial. Montrer que L est r-modulaire, et qu'il existe une « similitude directe » (notion que l'on définira par analogie avec la structure euclidienne de $\mathbf{R}^n$) transformant le réseau fondamental Λ, sous-groupe engendré par la base canonique (ω_i) de V, en L.

4° *a.* On note Aut L l'ensemble des morphismes de groupe s de L dans lui-même tels que $(s(x) \mid s(y)) = (x \mid y)$ pour tout couple (x, y) de L^2. On considère une $\mathbf{Z}$-base (e_i) de L, orthogonale et de carré $\frac{1}{r}$. À tout élément s de Aut L, on associe la matrice S des coordonnées des vecteurs $e'_i = s(e_i)$ dans la $\mathbf{Z}$-base (e_i). Montrer qu'il existe un élément k de S_n (groupe des permutations de $[1, n]$) et une application ε de $[1, n]$ dans $\{-1, +1\}$ tels que l'élément (i, j) de S s'écrive sous la forme $s_{ij} = \varepsilon(j)\, \delta_{i,\, k(j)}$. Calculer le cardinal de Aut L.

b. Étudier l'ensemble U des $s \in$ Aut L auxquels on peut associer une application f de $[1, n]$ dans $\{-1, +1\}$ telle que l'élément (i, j) de S s'écrive $s_{ij} = f(i)\, \delta_{i,\, j}$; un tel s sera noté s_f. Comparer U et le groupe $(\mathbf{F}_2^n, +)$.

c. Étudier l'ensemble T des $s \in$ Aut L tels que, $k \in S_n$ étant défini comme en *a.* l'élément (i, j) de S s'écrive $s_{ij} = \delta_{i,\, k(j)}$; un tel s sera noté s_k.

Comparer T et le groupe $(S_n, \circ)$.

5° *a.* Montrer que tout $s \in$ Aut L se décompose, de manière unique, sous la forme $s = s_f \circ s_k$, $(s_f, s_k) \in U \times T$.

b. Déterminer un morphisme φ de T dans le groupe Aut U des automorphismes de groupe de U tel que $U \times T$, muni de la loi :

$$(s_f, s_k) \,\square\, (s_{f'}, s_{k'}) = (s_f \circ \varphi(s_k)(s_{f'}), \; s_k \circ s_{k'})$$

soit isomorphe à Aut L, muni de la loi $\circ$.

6° Déterminer une loi $*$ sur le produit cartésien $\mathbf{F}_2^n \times S_n$ telle qu'il existe un isomorphisme θ de ce produit sur Aut L. Caractériser, par analogie avec φ, un morphisme F de S_n dans le groupe linéaire de dimension n sur $\mathbf{F}_2$, en calculant la matrice de $F(k)$ relative à la base canonique de $\mathbf{F}_2^n$.

IV

On définit dans V les isométries (resp. les rotations), et les groupes matriciels correspondants $O_n(\mathbf{Q})$ (resp. $O_n^+(\mathbf{Q})$) par analogie avec les notions similaires des espaces euclidiens réels. Σ_n est l'ensemble des entiers m de la forme $m = \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2$, $\alpha_i \in \mathbf{Z}$.

1° Dans toute cette partie, L est un réseau unimodulaire de V. (e_i) étant une $\mathbf{Z}$-base quelconque de L, de matrice canonique B, on considère l'automorphisme λ de V de matrice canonique B, et la forme quadratique $\bar{q}$ définie par $\bar{q}(x) = \| \lambda(x) \|^2$. Que peut-on dire de la matrice canonique M de $\bar{q}$? de l'image $\bar{q}(\Lambda)$ du réseau fondamental Λ par $\bar{q}$?

2° Dans les questions suivantes (jusqu'à IV 5° incluse), on suppose $n = 3$. Montrer que $\bar{q}(\Lambda) = \Sigma_3$.

3° Démontrer que L est unimodulaire trivial. Caractériser, à l'aide des ensembles $O_3^+(\mathbf{Q})$ et $GL_3(\mathbf{Z})$, les matrices canoniques des $\mathbf{Z}$-bases des réseaux unimodulaires de V. Comment obtient-on ces réseaux à partir de Λ?

4° Résoudre l'équation matricielle ${}^tKK = {}^tBB$, où $K \in GL_3(\mathbf{Z})$ et B est définie au IV 1°. Dénombrer les solutions.

5° Si L′ est un réseau de V tel que $L' \subset L'_0$, démontrer l'existence d'un réseau unimodulaire trivial L tel que $L' \subset L \subset L'_0$ (on pourra considérer $(\Lambda + L') \cap L'_0$).

6° Indiquer brièvement ce que deviennent les questions précédentes pour $n = 2$.

V

$\mathbf{F}_p$ est le corps à p éléments (p : entier naturel premier). La notation p.g.c.d. (x, y, z) représente le plus grand commun diviseur, nécessairement positif, des entiers (x, y, z).

1° Démontrer que le triplet $(x, y, z) \in \mathbf{N}^3$ est solution de l'équation

$$xz - y^2 = 1$$

si, et seulement s'il existe $(a, b, c, d) \in \mathbf{Z}^4$ tels que :

$$ad - bc = 1, \quad a^2 + b^2 = x, \quad 0 \leqslant ac + bd = y, \quad c^2 + d^2 = z.$$

2° Démontrer que l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a de solutions dans $\mathbf{F}_p$ que si, et seulement si $p \in \Sigma_2$. Montrer qu'alors ou bien $p = 2$, ou bien il existe $q \in \mathbf{N}$ tel que $p = 4q + 1$.

3° S'il existe $q \in \mathbf{N}$ tel que $p = 4q + 1$ soit premier, démontrer (par exemple à l'aide du groupe multiplicatif de $\mathbf{F}_p$) que p divise $[(2q)!]^2 - (p-1)!$ et $[(2q)!]^2 + 1$. En déduire les éléments de Σ_2 qui sont des nombres premiers.

4° Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur la parité des exposants des diviseurs premiers d'un entier m, pour que $m \in \Sigma_2$. En déduire que, si $\bar{q}$ est la forme quadratique définie en IV 1°, pour $n = 2$, et si x et y sont des vecteurs de Λ tels que $\bar{q}(y)$ divise $\bar{q}(x)$, il existe alors $z \in \Lambda$ tel que $\bar{q}(x) = \bar{q}(y)\,\bar{q}(z)$.

La propriété analogue serait-elle vraie pour $n = 3$? (considérer par exemple le nombre 7.)

5° *a.* Soit m un entier; démontrer que l'équation

$$x^2 + y^2 = mz^2$$

n'a de solution $(x, y, z) \in \mathbf{N}^3$ autre que (0, 0, 0) que si, et seulement si $m \in \Sigma_2$. Déterminer alors toutes les solutions $(x, y, z) \in \mathbf{Q}^3$.

b. En déduire que l'équation :

$$\begin{vmatrix} 1 & p & q \\ p & 1 & r \\ q & r & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad (p, q, r) \in \mathbf{Z}^3$$

n'admet que la solution (0, 0, 0) (on pourra poser, par exemple, $m = p^2 - 1$).

6° *a.* Déduire des relations :

$$(x, y, z, t) \in \mathbf{N}^{*4}, \quad \text{p.g.c.d.}\,(x, y, z) = 1, \quad xz = y^2 + t^2$$

que x et tous les diviseurs premiers qui figurent dans x à une puissance impaire appartiennent à Σ_2.

b. Démontrer qu'il existe alors $B' \in GL_2(\mathbf{Q})$, $P \in M_2(\mathbf{Z})$, $N \in GL_2(\mathbf{Z})$ telles que :

$$M = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} = {}^tB'B' = {}^t(NP)NP.$$

7° Démontrer que le quadruplet $(x, y, z, t) \in \mathbf{N}^4$ est solution de l'équation $xz = y^2 + t^2$, $t \neq 0$ si, et seulement s'il existe $(a, b, c, d, \delta) \in \mathbf{Z}^5$ tels que :

$$x = \delta(a^2 + b^2), \quad y = \delta(ac + bd), \quad z = \delta(c^2 + d^2), \quad t = \delta(ad - bc) \neq 0,$$

δ étant le produit des nombres premiers p de la forme $4q + 3$ figurant dans x avec un exposant impair.

8° $M = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}$ étant une matrice de $GL_2(\mathbf{Q})$, démontrer qu'il existe $A \in M_2(\mathbf{Z})$ telle que $M = {}^tAA$ si, et seulement si $(x, y, z) \in \mathbf{Z}^3$, $\sqrt{xz - y^2} \in \mathbf{N}^*$, $x \in \Sigma_2$.

Examiner le cas où $M \in M_2(\mathbf{Q})$, $\det M = 0$.

9° ω appartenant à $\mathbf{Z}$, démontrer que le quadruplet $(x, y, z, t) \in \mathbf{Z}^4$ est solution de l'équation

$$xz = y^2 + \omega t^2$$

si, et seulement s'il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, g, p, q) \in \mathbf{Z}^7$ tel que :

$$\omega = \alpha\gamma - \beta^2, \quad x = d(\alpha p^2 + 2\beta pq + \gamma q^2), \quad y = dg(\beta p + \gamma q),$$
$$z = d g^2 \gamma, \quad t = dgp.$$

(On pourra par exemple se ramener au cas où p.g.c.d. $(t, y) = 1$, en posant : d = p.g.c.d. (x, y, z, t), $d\Delta$ = p.g.c.d. (t, y), $d\delta$ = p.g.c.d. $(d\Delta, x)$ et en exprimant y en fonction de t et z).

En déduire que le quadruplet $(x, y, z, t) \in \mathbf{Z}^4$ est solution de l'équation

$$xz = y^2 + t^2$$

si, et seulement s'il existe $(a, b, c, d, \delta) \in \mathbf{Z}^5$ tels que

$$x = \delta(a^2 + b^2), \ y = \delta(ac + bd), \ z = \delta(c^2 + d^2), \ t = \delta(ad - bc).$$

II.2 RAPPORT SUR L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES GENERALES

II.2.1. THEME DU SUJET

L'équation $xz - y^2 = t^2$, $(x, y, z, t) \in \mathbf{Z}^4$, possède plusieurs interprétations intéressantes. Elle correspond d'une part à la recherche des diviseurs des entiers de la forme $(y^2 + t^2)$; elle est donc liée à l'étude de l'ensemble Σ_2 des nombres de ce type. D'autre part, toute égalité matricielle de la forme :

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = {}^t\mathrm{NN},$$

donne les solutions particulières :

$$x = a^2 + b^2, \ z = c^2 + d^2, \ y = ac + bd, \ t = ad - bc$$

solutions que redonne immédiatement l'identité de Lagrange. Ce qui est assez remarquable, c'est que ces solutions particulières sont, en quelque sorte, les seules. Le problème de mathématiques générales de l'agrégation 1975 demandait, en effet, de démontrer que la solution générale de cette équation était de la forme :

$$x = \delta(a^2 + b^2), \ y = \delta(ac + bd), \ z = \delta(c^2 + d^2), \ t = \delta(ad - bc)$$

avec $(a, b, c, d, \delta) \in \mathbf{Z}^5$ – on peut même choisir δ de telle façon qu'aucun diviseur de δ n'appartienne à Σ_2. Ce résultat peut être interprété de la manière suivante : pour qu'une matrice de $\mathrm{M}_2(\mathbf{Q})$ puisse s'écrire sous la forme $\mathrm{M} = {}^t\mathrm{AA}$,

où $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_2(\mathbf{Z})$, il faut et suffit que $(x, y, z, \sqrt{xz - y^2}) \in \mathbf{Z}^4$, $x \in \Sigma_2 - \{0\}$ ou $(x = y = 0, z \in \Sigma_2)$.

● On peut obtenir ces résultats de manière très rapide, purement arithmétique, à l'occasion de l'étude de l'équation plus générale $xz - y^2 = \omega t^2$; la toute dernière question du problème, indépendante de ce qui précède, permettait de résoudre cette équation par la méthode de L.E. Dickson, dans son *«Introduction to the theory of numbers»*. Aussi bien le problème cité ci-dessus n'avait pas essentiellement pour but d'aboutir à une résolution assez banale, mais plutôt d'inviter les candidats à quelques excursions dans les domaines connexes des matrices à coefficients entiers – ici, symétriques et d'ordres 2 ou 3 –, des réseaux – c'est-à-dire des groupes abéliens libres de type fini – et des équations diophantiennes du second degré. Notons que l'on pouvait traiter intégralement ce problème en ne sortant pas de $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{Z}$; on sait qu'il est assez rare que des résultats d'arithmétique ne fassent peu ou prou, appel à $\mathbf{R}$, voire à $\mathbf{C}$ ou à la clôture algébrique de $\mathbf{Q}$, mais les résultats rassemblés par l'énoncé étaient à la vérité assez triviaux. Seul le fait de les réunir par le fil conducteur de l'équation $xz - y^2 = t^2$ leur donnait un certain intérêt.

● Le point le moins simple de l'étude de Σ_2 est certainement le fait qu'il est équivalent, pour un nombre premier p, d'appartenir à Σ_2 ou de déterminer un corps fini à p éléments où le polynôme X^2+1 est réductible. Ce point résulte ici très simplement du théorème selon lequel toute matrice de $\mathrm{M}_2(\mathbf{Z})$ de déterminant 1 est (à une multiplication par -1 près) de la forme ${}^t\mathrm{NN}$, $\mathrm{N} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$; un algorithme de recherche de N est même proposé par le texte. Que les conditions précédentes soient équivalentes à ($p = 2$ ou $p = 4q + 1$) résulte du théorème de Wilson ($(p-1)! \equiv -1 \ [p]$) et de la congruence : $(2q)!^2 \equiv (4q)! \ [4q+1]$. Parmi les propriétés de Σ_2, certaines sont très connues ; ainsi le fait qu'un nombre appartienne à Σ_2 si et seulement si tous ses diviseurs premiers de la forme $(4q+3)$ y figurent avec un exposant pair, et le fait que le produit de deux éléments de Σ_2 est encore une somme de deux carrés. Une réciproque partielle, due à Lagrange, est moins connue : si le quotient de deux éléments de Σ_2 est entier, il est lui-même somme de deux carrés. Le théorème analogue est faux pour Σ_3

$(7 = \dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2}{0^2 + 1^2 + 1^2} \notin \Sigma_3)$, mais évidemment exact pour Σ_4, car $\Sigma_4 = \mathbf{N}$.

● Une partie importante du problème concernait les réseaux, sous-groupes de

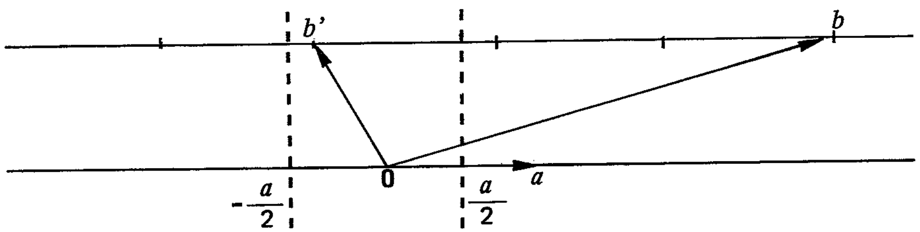
$\mathbf{Q}^n$ engendrés par une base de $\mathbf{Q}^n$. L étant un tel réseau on note L_0 l'ensemble des $x \in \mathbf{Q}^n$ tels que

$$\forall\, y \in \mathrm{L}\ ,\ (x\,|y) \in \mathbf{Z}.$$

Un réseau modulaire, c'est-à-dire tel que $\mathrm{L}_0 = \mathrm{L}$, peut être construit à partir de $\Lambda = \mathbf{Z}^n$ par une similitude directe quelconque. Pour $n \leqslant 3$, la réciproque est exacte. C'est ce résultat qui est utilisé dans la résolution de l'équation $xz - y^2 = t^2$, équation plus délicate que $xz - y^2 = 1$. Le rapport entre matrices et réseaux est clair ; notons que si B est la matrice de l'une des $\mathbf{Z}$–bases du réseau L, ${}^t\,\mathrm{B}^{-1}$ est celle de L_0, ce qui explique le lien entre matrices orthogonales et réseaux unimodulaires. Pour cette étude, il est nécessaire de connaître quelques propriétés des réseaux, concernant les sous-réseaux, (dont le théorème équivalant au résultat bien connu selon lequel tout sous-groupe de $\mathbf{Z}^n$ est du type $\mathbf{Z}^p$, corollaire du théorème classique sur les modules libres de type fini sur un anneau principal), les intersections et les sommes de deux réseaux, ainsi que les formules de «dualité» :

$$\mathrm{L}_{00} = \mathrm{L},\ \ (\mathrm{L} + \mathrm{L}')_0 = \mathrm{L}_0 \cap \mathrm{L}'_0\ ,\ (\mathrm{L} \cap \mathrm{L}')_0 = \mathrm{L}_0 + \mathrm{L}'_0.$$

• Il serait intéressant de savoir si, pour $n = 4$ par exemple, les réseaux unimodulaires sont tous semblables à Λ. Ceci serait exact si l'on pouvait démontrer que, pour toute forme quadratique $\overline{q}$ non dégénérée, positive, de discriminant 1 et de matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_4\,(\mathbf{Z})$, il existe $\mathrm{N} \in \mathrm{GL}_4\,(\mathbf{Z})$ telle que $\mathrm{M} = {}^t\,\mathrm{NN}$.
Pour $n = 2$ ou 3, le résultat analogue a été obtenu par des manipulations explicites sur les coefficients de M, manipulations d'origine géométrique ; il s'agit toujours de diminuer la valeur d'un produit scalaire $|(a\,|b)|$ en remplaçant le vecteur b par $b' = b - ka$, où $k \in \mathbf{Z}$; le schéma géométrique suivant montre comment obtenir k :



Une manipulation directe sur une matrice de $\mathrm{M}_4\,(\mathbf{Z})$ semble a priori pénible (ne serait-ce que parce que la formule donnant le déterminant comporte alors 17 termes !). Il faudrait utiliser des méthodes plus abstraites et plus puissantes qui s'écartent du caractère volontairement élémentaire du problème de 1975. Ceci pourrait déboucher sur l'étude bien connue de Σ_4.

II.2.2. OBSERVATIONS DES CORRECTEURS

• La correction du problème a été décevante. Seule une copie a prouvé chez son auteur une maîtrise complète de résultats dont l'analyse ci-dessus montre le caractère élémentaire ; le candidat n'a évidemment pu, faute de temps, résoudre toutes les questions posées, mais, en s'appuyant sur les réponses explicitement données dans l'intitulé de ces mêmes questions et en s'attaquant aux points forts du problème, il a montré au jury qu'il s'était attaché à comprendre l'agencement des différentes parties et qu'il avait dominé les difficultés essentielles.

• La très grande majorité des candidats (au moins 90 %) n'a obtenu quelques points à cette épreuve qu'en «grapillant» ça et là. Sous peine de produire un énoncé difficile, le jury ne peut — contrairement à ce qui était la règle au siècle dernier — que graduer ses questions, donc proposer une multitude de petits exercices fort simples (et par suite peu «rémunérés») qui conduisent aux véritables difficultés.
Un usage regrettable veut que les candidats esquivent les questions fondamentales pour se jeter sur tout ce qui leur paraît accessible. Les points obtenus de cette façon sont peu significatifs de la qualité mathématique de l'agrégatif 1975 ; tout au plus correspondent-ils à une mesure de l'aptitude à discerner, parmi 34 mini-problèmes, les points dont l'intérêt est le plus faible ! A privilégier ainsi les platitudes simplement posées là comme jalons menant vers les points importants, la quasi-unanimité des candidats en vient à s'empêcher délibérément d'apercevoir la forêt en choisissant de l'aborder par ses arbres plus épais.

Peut-être une épreuve réduite à deux ou trois pages d'énoncé et cinq ou six questions, donc plus proche de la simulation d'un réel problème mathématique, serait-elle mieux adaptée au but du concours. Certes de très nombreuses copies obtiendraient la note zéro ; mais il faut bien avouer que cela fournirait l'exacte signification des actuels 2/60, 4/60,..., 10/60 ; des totaux aussi bas demandent beaucoup de temps aux correcteurs, mais ils ne servent guère les candidats quant au résultat final, même si des échafaudages de points ainsi obtenus permettent à certains d'atteindre de justesse le droit de prouver à l'oral une faiblesse qu'on ne leur pardonne pas.

• Une analyse complète du problème de 1975 est impossible. Signalons cependant les erreurs les plus souvent rencontrées dans les parties abordées par un nombre non négligeable de candidats :

1re partie : Confusion entre «forme définie» et «forme non dégénérée» ; confusion entre les propositions :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{Q}^2 \quad \bar{q}\,(x,y) \geqslant 0 \;;\; \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \quad \bar{q}\,(x,y) \geqslant 0.$$

[Ou bien il fallait ici étudier directement la notion non classique de forme rationnelle, ou bien il fallait évoquer une propriété équivalente à la densité de $\mathbf{Q}^2$ dans $\mathbf{R}^2$] ; oubli de la condition $u' > 0$ ($u' \geqslant 0$ étant triviale) ; oubli du cas particulier $u = 1$; affirmation tranquille du fait que les restrictions de la forme $\bar{q}$ du 4° aux sous-espaces de dimension 2 engendrés par (π_1, π_2), (π_2, π_3) et (π_3, π_1) satisfont aux conditions du 1° ; abus (involontaire ?) consistant à écrire $(m > 0)$ à la fin d'un raisonnement prouvant simplement $(m \geqslant 0)$; impossibilité, parfois bien déguisée, de passer de la conclusion du 5° a) au résultat du 5° b).

2e partie : Extension non motivée aux modules de résultats sur les vectoriels, essentiellement l'invariance du cardinal d'une $\mathbf{Z}$–base ; confusion entre $GL_n(\mathbf{Z})$ et ensemble des matrices de $M_n(\mathbf{Z})$ admettant un inverse... dans $GL_n(\mathbf{Q})$; substitution d'un énoncé vague et généralement faux aux constructions effectivement demandées par l'énoncé du 4° ; démonstrations optimistes du 5° par confusion entre réseau et sous-réseau ; oubli de la vérification du caractère borné de Ω au 6°.

3e partie : Définition floue de W au 1° ; bluff dans la preuve de l'égalité $(L \cap L')_0 = L_0 + L'_0$, difficile à démontrer directement (mais conséquence triviale de l'égalité duale).

5e partie : Oubli des conditions $ad - bc > 0$, $ac + bd \geqslant 0$ dans l'utilisation des résultats du I 3° b.

II.2.3. LES NOTES (sur 60)

• *Candidats :* (1 587 copies)

0	7,13 %	25 à 28	2,97 %
1 à 4	41,41 %	29 à 32	1,14 %
5 à 8	19,57 %	33 à 36	0,88 %
9 à 12	9,47 %	37 à 40	0,38 %
13 à 16	7,32 %	41 à 44	0,32 %
17 à 20	5,62 %	45 à 48	0,25 %
21 à 24	2,90 %	49 à 60	0,63 %

• *Candidates :* (870 copies)

0	66	26 à 30	43
1 à 5	259	31 à 35	31
6 à 10	135	36 à 40	15
11 à 15	119	41 à 50	16
16 à 20	103	51 à 60	4
21 à 25	79		

II.3 TEXTE DE L'EPREUVE D'ANALYSE

ANALYSE

DURÉE : 6 heures

Préambule

Les propriétés suivantes de la fonction Γ *pourront être utilisées sans démonstration; elles n'interviennent pas dans la première partie du problème.*

Soit s un nombre complexe; on note Re(s) sa partie réelle, Im(s) sa partie imaginaire. Pour Re(s) > 0, on pose :

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{s-1}\, dt\,.$$

La fonction Γ est holomorphe dans le demi-plan Re(s) > 0. Elle se prolonge en une fonction méromorphe dans $\mathbf{C}$ dont les pôles sont les entiers négatifs ou nuls. Ces pôles sont simples, et le résidu de Γ au point $s = -p$, $(p \in \mathbf{N})$, est $\dfrac{(-1)^p}{p\,!}$.

Si s n'est pas un pôle, on a : $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$, et : $\Gamma(s) \neq 0$.

Soient σ_1, σ_2 des nombres réels tels que $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$, et m un entier positif; on a : $\lim\limits_{|t| \to +\infty} |\, t^m\, \Gamma(\sigma + it)\,| = 0$, uniformément pour σ élément de $[\sigma_1, \sigma_2]$.

Enfin, si c et x sont des nombres réels strictement positifs, on a :

$$e^{-x} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{Re}(s) = c} x^{-s}\, \Gamma(s)\, ds\;,$$

la droite $\mathrm{Re}(s) = c$ étant orientée dans le sens des ordonnées croissantes. (Cette convention d'orientation est conservée pour toutes les intégrales analogues apparaissant dans le problème).

Si z est un nombre complexe non nul, on note $\mathrm{Arg}(z)$ l'unique détermination de l'argument de z qui appartient à $[-\pi, \pi[$, et on pose : $\mathrm{Log}(z) = \mathrm{Log}\,|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$, puis, pour tout nombre complexe a : $z^a = e^{a\,\mathrm{Log}\,(z)}$.

Dans tout le problème, $\mathfrak{P}$ désigne l'ensemble des nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive.

Soit λ un réel strictement positif; une fonction f définie dans $\mathfrak{P}$ est dite périodique, de période λ, si, quel que soit $z \in \mathfrak{P}$, on a : $f(z+\lambda) = f(z)$.

PREMIÈRE PARTIE

1° Soit f une fonction définie dans $\mathfrak{P}$, holomorphe et périodique de période λ.

a. Démontrer qu'il existe une fonction g, définie et holomorphe dans l'ouvert :

$$\{ z \mid z \in \mathbf{C} \quad \text{et} \quad 0 < |z| < 1 \},$$

telle que

$$g(e^{2i\pi z/\lambda}) = f(z) \quad .$$

b. Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathfrak{P}$. Pour $n \in \mathbf{Z}$, on pose :

$$a_n = \frac{1}{\lambda} \int_{x_0}^{x_0+\lambda} f(t+iy_0)\, e^{-2i\pi n\,(t+iy_0)/\lambda}\, dt \quad . \tag{1}$$

Démontrer que a_n est indépendant de z_0, et que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, e^{2i\pi n z/\lambda} \ , \tag{2}$$

la convergence de cette série étant uniforme sur toute partie compacte de $\mathfrak{P}$. La fonction f est dite holomorphe (resp. méromorphe) à l'infini si la fonction g est holomorphe (resp. méromorphe) en zéro; donner les conditions sur les a_n pour qu'il en soit ainsi. Dans la suite, on dira que les a_n sont les coefficients de Fourier de f.

c. On suppose qu'il existe deux constantes positives c et ρ telles que, quel que soit $z = x + iy \in \mathfrak{P}$, avec $y \leqslant 1$, on ait

$$|f(x+iy)| \leqslant c\,y^{-1-\rho}. \tag{3}$$

Démontrer que

$$\sup_{n \in \mathbf{Z}^*} |a_n|\,|n|^{-\rho-1} < +\infty \ . \tag{4}$$

2° *a.* Soit $\rho > 0$. Montrer que la suite u définie, pour $n \geqslant 1$, par

$$u_n = n^\rho \, \frac{n\,!}{(\rho+1)\,(\rho+2)\ldots(\rho+h)\ldots(\rho+n)}$$

est bornée.

$\left(\text{On pourra utiliser la série de terme général } \mathrm{Log}\,\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

b. Soit

$$(a_n)_{n \geqslant 0}$$

une suite de complexes. On suppose l'existence d'un réel ρ, strictement positif, tel que :

$$\sup_{n \in \mathbf{N}^*} |a_n|\, n^{-\rho} < +\infty \tag{5}$$

et l'on considère l'application f, de $\mathfrak{P}$ dans $\mathbf{C}$, définie par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{2i\pi n z/\lambda} \tag{6}$$

Montrer que f est holomorphe et que (3) est vérifiée pour une valeur convenable de la constante positive c.

Montrer que, pour tout réel γ strictement positif, on a

$$\lim_{t\to+\infty} t^\gamma\,|f(it) - a_0| = 0 .$$

DEUXIÈME PARTIE

Soient λ un réel strictement positif et $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes. On suppose qu'il existe $\rho > 0$ tel que (5) soit vérifiée. On définit f par (6), et l'on pose, pour $\mathrm{Re}(s) > \rho + 1$,

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s} \ , \quad \Phi(s) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s)\,\varphi(s)$$

1° *a.* Montrer que φ est holomorphe pour $\mathrm{Re}(s) > \rho + 1$.

b. Montrer, avec soin, que

$$\Phi(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}\,(f(it)-a_0)\,dt \quad \text{pour } \operatorname{Re}(s) > \rho+1,$$

et qu'inversement, pour $\alpha > \rho+1$ et $y > 0$, on a

$$f(iy) - a_0 = \frac{1}{2i\pi}\int_{\operatorname{Re}(s)=\alpha} y^{-s}\,\Phi(s)\,ds$$

c. Montrer que $s^2\,\Phi(s)$ est bornée sur toute « verticale » du demi-plan $\operatorname{Re}(s) > \rho+1$.

2° Soient ε et k des réels tels que $|\varepsilon| = 1$ et $k > 0$. On suppose que Φ possède les propriétés suivantes $\boxed{A}$ et $\boxed{B}$:

$\boxed{A}$. Notant ω l'ensemble des complexes distincts de 0 et de k, la fonction Φ admet un prolongement holomorphe à ω, et ce prolongement, noté encore Φ, vérifie : $(\forall\, s \in \omega)\,\big(\Phi(s) = \varepsilon\,\Phi(k-s)\big)$.

$\boxed{B}$. La fonction $s \longmapsto \Phi(s) + a_0\left(\dfrac{1}{s} + \dfrac{\varepsilon}{k-s}\right)$ se prolonge en une fonction entière de s, et est bornée sur toute bande « verticale ».

a. Soit α un réel tel que $\alpha > \rho+1$ et $\alpha > k$. On note U la partie de $\mathbf{C}$, ensemble des complexes s tels que

$$k-\alpha \leqslant \operatorname{Re}(s) \leqslant \alpha \quad \text{et} \quad |\operatorname{Im}(s)| \geqslant 1$$

Montrer que $s^2\,\Phi(s)$ est bornée sur la frontière de U, puis que $s^2\,\Phi(s)$ est bornée dans U.

[On pourra utiliser le résultat précédent et considérer, pour tout $a > 0$, la fonction $s \longmapsto e^{as^2}\,s^2\,\Phi(s)$; on rappelle l'énoncé : *Principe du maximum* : Soit V un ouvert borné de $\mathbf{C}$. Soit g une fonction définie et continue dans l'adhérence de V et holomorphe dans V. Si ∂V désigne la frontière de V, on a $\sup\limits_{z\in V}|g(z)| = \sup\limits_{z\in\partial V}|g(z)|$].

b. Pour tout réel y, strictement positif, on pose :

$$\mathrm{I}(y) = \int_{\operatorname{Re}(s)=k-\alpha} y^{-s}\,\Phi(s)\,ds \quad \text{et} \quad \mathrm{J}(y) = \int_{\operatorname{Re}(s)=\alpha} y^{-s}\,\Phi(s)\,ds$$

Montrer que $\mathrm{I}(y) = \varepsilon\,y^{-k}\,\mathrm{J}\left(\dfrac{1}{y}\right)$ et expliciter $\mathrm{J}(y) - \mathrm{I}(y)$.

c. Déduire de *b.* que f possède la propriété suivante :

$\boxed{C}$. $\quad f(z) = \varepsilon\left(\dfrac{z}{i}\right)^{-k} f\left(-\dfrac{1}{z}\right)$.

3° Conservant les notations du paragraphe précédent, montrer que si f possède la propriété $\boxed{C}$, alors Φ possède les propriétés $\boxed{A}$ et $\boxed{B}$. (On pourra utiliser l'expression de $\Phi(s)$ obtenue en (II 1° *b.*) et faire intervenir le point 1 de l'intervalle d'intégration.)

4° Pour tout élément z de $\mathfrak{P}$, on pose :

$$\theta(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{i\pi n^2 z}$$

a. Calculer, pour t réel strictement positif et y réel, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2 t}\,e^{-2i\pi xy}\,dx$$

(On pourra utiliser, sans la démontrer, l'égalité $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$).

b. Pour t réel strictement positif et x réel, on pose :

$$\psi(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-\pi(x+n)^2 t}.$$

La fonction ψ est une fonction périodique de la variable réelle x. Préciser sa série de Fourier et montrer que celle-ci converge vers ψ. En déduire l'égalité $\theta(it) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\,\theta\left(-\dfrac{1}{it}\right)$.

c. Dans l'hypothèse $\left(\lambda = 2,\ k = \dfrac{1}{2},\ \varepsilon = 1\right)$ et en choisissant une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ convenable, montrer que θ possède la propriété $\boxed{C}$.

d. Pour tout complexe s tel que $\operatorname{Re}(s) > 1$, on pose :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$$

Déduire de l'étude précédente certaines propriétés de la fonction ζ.

TROISIÈME PARTIE

On pourra utiliser, sans démonstration, le résultat suivant : lorsque $|t|$ tend vers l'infini (t réel), on a :

$$\lim\ |\Gamma(\sigma+it)|\,(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\,e^{\frac{\pi|t|}{2}}\,|t|^{\frac{1}{2}-\sigma} = 1,$$

uniformément pour σ appartenant à une partie compacte de **R**.

1° Soient σ_1, σ_2 des nombres réels vérifiant $\sigma_1 < \sigma_2$, U (resp. V) la partie de **C** définie par les inégalités $\sigma_1 \leqslant \mathrm{Re}(s) \leqslant \sigma_2$ et $|\mathrm{Im}(s)| \geqslant 1$ (resp. $\sigma_1 \leqslant \mathrm{Re}(s) \leqslant \sigma_2$ et $\mathrm{Im}(s) \geqslant 1$).

Soit h (resp. l) une fonction définie et holomorphe au voisinage de U (resp. V). On suppose qu'il existe des réels positifs α, β_1, β_2 tels que :

$$\begin{cases} \sup\limits_{s \in \mathrm{U}} |h(s)|\, e^{-\alpha |s|} < +\infty \\ \sup\limits_{|t| \geqslant 1} |t|^{-\beta_j}\, |h(\sigma_j + it)| < +\infty \quad (j = 1, 2). \end{cases}$$

$$\left(\text{resp.} \begin{cases} \sup\limits_{s \in \mathrm{V}} |l(s)|\, e^{-\alpha |s|} < +\infty \\ \sup\limits_{t \geqslant 1} t^{-\beta_j}\, |l(\sigma_j + it)| < +\infty \quad (j = 1, 2). \end{cases} \right)$$

Soit L la fonction affine telle que : $\mathrm{L}(\sigma_j) = \beta_j$, $(j = 1, 2)$.

Démontrer qu'il existe un réel M tel que, quel que soit $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$, on ait :

$$\sup_{|t| \geqslant 1} |t|^{-\mathrm{L}(\sigma)}\, |h(\sigma + it)| \leqslant \mathrm{M} \qquad \left(\text{resp. } \sup_{t \geqslant 1} t^{-\mathrm{L}(\sigma)}\, |l(\sigma + it)| \leqslant \mathrm{M}\right).$$

(On se ramènera à démontrer le résultat concernant V et l, puis, en divisant l par la fonction $\left(\dfrac{s}{i}\right)^{\mathrm{L}(s)}$, on se ramènera au cas où : $\beta_1 = \beta_2 = 0$).

On reprend maintenant les notations et hypothèses de la deuxième partie.

La fonction f vérifie $\boxed{\mathrm{C}}$ et n'est pas constante.

Soit m un entier strictement positif tel que $a_m \neq 0$.

Soit Z une primitive de $s^{\frac{k-1}{2}}\, m^s\, \varphi(s)$, dans le quart de plan :

$$\mathrm{Re}(s) > 0, \quad \mathrm{Im}(s) > 0.$$

2° On donne des réels σ_1, σ_2 vérifiant : $0 < \sigma_1 < \sigma_2$, et l'on note V la partie de **C** définie par : $\sigma_1 \leqslant \mathrm{Re}(s) \leqslant \sigma_2$ et $\mathrm{Im}(s) \geqslant 1$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathrm{Z}(s) e^{-\alpha |s|}$ soit bornée sur V.

3° Soit σ un réel tel que $\sigma > \rho + 1$. Démontrer que, pour a réel, on a : $\sup\limits_{t \geqslant 1} t^{-a}\, |\mathrm{Z}(\sigma + it)| < +\infty$ si, et seulement si : $a \geqslant \dfrac{k+1}{2}$.

4° *a.* Démontrer que, quel que soit σ réel, il existe $a > 0$ tel que

$$\sup_{|t| \geqslant 1} |t|^{-a}\, |\varphi(\sigma + it)| < +\infty.$$

(On utilisera la question 1° en prenant σ_2 strictement supérieur, en particulier, à $\rho + 1$, et : $\sigma_1 = k - \sigma_2$).

b. Démontrer que, pour σ réel ($\sigma > \rho + 1$) et z élément de $\mathfrak{P}$, on a :

$$f(z) - a_0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{Re}(s) = \sigma} \left(\frac{z}{i}\right)^{-s} \Phi(s)\, ds.$$

c. Évaluer l'intégrale suivante, pour z élément de $\mathfrak{P}$:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{Re}(s) = \frac{k}{2}} \left(\frac{z}{i}\right)^{-s} \Phi(s)\, ds.$$

On suppose désormais que les coefficients de Fourier de f (I 1° *b.*) sont réels, qu'il existe $\beta \in \left[0, \dfrac{k+1}{2}\right[$ tel que, lorsque u tend vers 0 par valeurs strictement positives, $u^\beta\, |f(e^{iu})|$ reste borné et qu'enfin la fonction φ n'a qu'un nombre fini de zéros sur la droite $\mathrm{Re}(s) = \dfrac{k}{2}$.

5° *a.* Démontrer que $i^{\frac{1-s}{2}}\, \Phi(s)$ est réel pour $\mathrm{Re}(s) = \dfrac{k}{2}$, et que, lorsque u tend vers 0 par valeurs strictement positives,

$$u^\beta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t\left(\frac{\pi}{2} - u\right)} \left| \Phi\left(\frac{k}{2} + it\right) \right| dt \qquad \text{reste borné.}$$

b. En déduire que, lorsque T, réel, tend vers $+\infty$,

$$\mathrm{T}^{-\beta} \int_0^{\mathrm{T}} t^{\frac{k-1}{2}} \left| \varphi\left(\frac{k}{2} + it\right) \right| dt \qquad \text{reste borné.}$$

c. Démontrer que : $\sup\limits_{t \geqslant 1} t^{-\beta} \left| \mathrm{Z}\left(\dfrac{k}{2} + it\right) \right| < +\infty$.

Quelle conclusion peut-on tirer des calculs précédents ?

6° Les notations sont celles de la dernière question de la deuxième partie.

a. Établir, pour z élément de $\mathfrak{P}$, l'égalité :

$$\theta\left(1-\frac{1}{z}\right)=\left(\frac{z}{i}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 z}$$

b. Démontrer que la fonction ζ a une infinité de zéros sur la droite $\mathrm{Re}(s)=\dfrac{1}{2}\cdot$

II.4 RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE

II.4.1. REMARQUES GENERALES

Le problème proposait l'étude d'un fragment de la théorie de Hecke. Après une partie préliminaire, la deuxième partie explicitait le lien entre formes automorphes et séries de Dirichlet et donnait un exemple (fonction zéta de Riemann). La dernière partie faisait démontrer, modulo certaines hypothèses, l'existence d'une infinité de zéros sur la «droite critique». La rédaction du problème suivait exactement l'article original de Hecke (cf. aussi le livre de Ogg sur les formes automorphes). Les candidats qui ont traité correctement la première partie (resp. les deux premières parties) ont eu une note voisine de la moyenne (resp. du maximum) ; un seul candidat a abordé valablement la dernière partie.

Comme on le constate à la lecture des tableaux statistiques, à peine un candidat sur cinq a été capable de démarrer le problème. Même en tenant compte d'un certain pourcentage de candidats n'ayant pas pu (resp. pas voulu) se préparer sérieusement, ces résultats, comparables à ceux des années précédentes, sont extrêmement décevants. On pourrait, une fois de plus et, à vrai dire non sans quelques raisons, invoquer la classique «nullité» des candidats mais cette «explication» semble largement insuffisante. En effet, les textes proposés sont certes très longs mais, au moins dans leur première moitié, guère plus difficiles que les sujets d'examen de maîtrise. Force est donc de constater que des étudiants capables de traiter une question à l'issue d'un cours de maîtrise n'en sont plus capables un an après. Bien entendu le jury, composé en majeure partie d'enseignants du supérieur, sait fort bien qu'un étudiant, même reçu avec mention, n'a quelquefois assimilé que superficiellement le programme de maîtrise. Toutefois une lecture, même rapide, des rapports des années précédentes, montre que les problèmes d'analyse de l'agrégation ne nécessitent pour être traités qu'une bonne connaissance des techniques de base (premier cycle) et des parties élémentaires des programmes de maîtrise. On ne saurait trop conseiller aux candidats de revoir ces questions en

détail, de connaître de façon précise les énoncés des principaux résultats, de faire (ou de refaire) un certain nombre d'exercices standards etc... Tout se passe comme si, obnubilés par l'oral, les candidats négligeaient la préparation de l'écrit. Un rééquilibrage semble indispensable et ne pourrait être que payant.

Comme cas limite d'impréparation les correcteurs ont eu l'impression que les candidats de certaines «séries» ignoraient jusqu'à la notion même de fonction analytique...

II.4.2. REMARQUES PARTICULIERES

Première partie

1e) a) b) Ces deux questions constituent un exercice classique qui est proposé, voire résolu, dans la plupart des cours d'analyse complexe. Le a) était immédiat à condition d'avoir des idées précises sur le logarithme complexe. Posant

$$u(z) = e^{2i\pi z/\lambda}$$

on note tout d'abord que u est une application surjective de $\mathscr{P}$ sur le disque unité pointé D et que $u(z_1) = u(z_2)$, si et seulement si, $z_1 - z_2$ est un multiple entier de λ. f étant périodique, de période λ, ceci prouve l'existence d'une fonction g vérifiant la condition de l'énoncé. Pour prouver que g est holomorphe, il faut utiliser l'inversibilité locale de la fonction u c'est-à-dire de la fonction exponentielle. Le plus rapide est évidemment de citer le théorème d'inversion locale pour les fonctions analytiques (u' est toujours non nul, donc...) ; de façon équivalente, on pouvait utiliser l'existence, dans tout disque ne contenant pas l'origine d'une détermination holomorphe de Log z. Quelques rares candidats ont procédé ainsi. D'autres remarquent que la détermination de Log z donnée dans le préambule permet de prouver l'holomorphie de g, sauf sur un rayon, puis utilisent, soit le théorème de Moréra, soit une deuxième détermination pour terminer. Ces solutions, plus compliquées à rédiger, ont rarement été parfaites. De toutes façons, ceci ne concerne qu'une minorité de copies ; les autres offrent un raccourci caricatural de l'impréparation des candidats. L'existence (purement ensembliste) de g n'est pratiquement jamais complètement démontrée. Dans de nombreuses copies, la périodicité de f n'est pas utilisée. Certains affirment que u est bijective ou n'hésitent pas à écrire des phrases du genre «u est injective et périodique donc...». Dans au moins la moitié des cas, on apprend que Log z est holomorphe dans D. Signalons enfin les nombreuses tentatives d'esbroufe (Ex. g est holomorphe car u et f le sont...) et les invocations magiques (fibré, faisceau, fonction multiforme, d''—cohomologie...).

Le b) a donné lieu à moins d'erreurs. Dans une proportion notable des copies, on montre que les a_n sont les coefficients de Laurent de g et on cite, plus ou moins correctement, les propriétés du développement de Laurent. Les imprécisions proviennent toujours de la notion de convergence uniforme, notion qui semble floue pour bien des candidats. Peu de candidats signalent que l'image, par u, d'une partie compacte de $\mathscr{P}$ est une partie compacte de D ; c'était pourtant indispensable. Une proportion non négligeable de copies ne donne pas la condition pour que g soit méromorphe ; on atteint là la limite des connaissances de certains candidats... Enfin notons qu'il était possible de prouver l'indépendance des a_n par un raisonnement direct à partir du théorème de Cauchy.

Cette question était triviale ; il suffisait, dans la formule définissant a_n de prendre $x_0 = 0$ et $y_0 = 1/|n|$ et de faire la majoration évidente.

2e) a) Outre quelques copies délirantes, au sujet desquelles il serait peu charitable d'insister, cette question a donné lieu aux erreurs habituelles : utilisation des équivalents pour évaluer une somme, fautes de calcul etc... Il est inadmissible que des candidats à l'agrégation ne sachent pas traiter un exercice banal de première année de premier cycle.

b) De nombreuses copies démontrent l'holomorphie de f de façon assez satisfaisante ; mais bien peu remarquent que (6) converge uniformément dans tout demi-plan de la forme $\mathrm{R}e\,(z) \geqslant a > 0$; c'était pourtant utile pour la suite. Pratiquement aucune copie n'établit la majoration (3). Il fallait majorer $|a_n|$ à l'aide de (5), puis n^{ρ} à l'aide de a) et enfin reconnaître le développement de $(1 + x)^{a}$; c'est probablement sur ce dernier point que les candidats ont achoppé. Cela n'est pas très grave ; en revanche, les erreurs commises dans la toute dernière question de cette partie sont plus inquiétantes. En effet, pour trouver la limite demandée, la plupart des candidats «passent à la limite» terme à terme dans la série. Certains ne donnent pas la moindre justification, d'autres invoquent la convergence uniforme sur tout compact... Il fallait, pour pouvoir appliquer le théorème de la double limite, vérifier que la série donnant $f(it) - a_0$ convergeait uniformément au «voisinage de l'infini» c'est-à-dire, par exemple pour $t > 1$. D'autres solutions étaient possibles ; on pouvait, c'était le plus simple, revenir à g.

Deuxième partie

1e) a) Cette question facile a été assez souvent bien traitée. Certains candidats ont, vainement essayé de se ramener au cas des séries entières. On se demande bien pourquoi.

b) Le calcul formel a été fait par la plupart des candidats qui ont, à juste titre, pensé qu'il leur en serait tenu compte. En revanche, la justification brille par son absence dans la quasi-totalité des copies. Elle était pourtant facile à condition de connaître le théorème (de Lebesgue) d'intégration terme à terme d'une série de fonctions. A quelques exceptions près, ce n'était pas le cas des candidats. Les correcteurs sont las de constater, année après année que les candidats ignorent ces théorèmes d'un usage constant et ils sont de moins en moins enclins à l'indulgence. Inutile de dire que les justifications fantaisistes (convergence uniforme sur tout compact...) ou frisant l'escroquerie (d'après Lebesgue, on a...) ont été sévèrement sanctionnées.

c) Cette question n'a pas posé de problèmes.

2e) a) On voit aisément que $s^2\,\phi(s)$ est bornée sur la frontière de U. Montrer qu'elle est bornée dans U est beaucoup plus difficile. Comme U n'est pas borné, on ne peut pas appliquer directement le principe du maximum. On pouvait procéder comme suit : on applique le principe du maximum à la fonction $e^{as^2}\,\phi(s)$ dans le domaine borné, intersection de U avec la bande horizontale $|\,\mathrm{I}m\,(z)\,| \leqslant n$. On fait ensuite tendre n vers l'infini, puis a vers 0.

2e) b) De nombreux candidats ont essayé d'établir l'égalité ; ils posent $s' = k - s$ d'où $ds' = -ds$; il apparaît un signe $-$ qui leur a posé bien des problèmes. Il fallait tenir compte de la convention d'orientation des «verticales», certains l'ont fait Mais beaucoup d'autres escamotent purement et simplement le signe au hasard d'un calcul ou même déclarent que, puisque $\in = \pm 1$, on a $\in = -\in$, ce qui est commode...

La fin de la question 2 et la question 3 ont été bien traitées par les rares candidats qui sont arrivés jusque là.

4e) a) et b) étaient indépendants de ce qui précède ; ici encore, la plupart des candidats qui abordent ces questions ne donnent pas la moindre justification de leurs calculs formels.

c) et d) étaient évidents.

Un seul candidat ayant abordé la *troisième partie,* celle-ci n'est pratiquement pas intervenue dans le barème.

II.4.3. LES NOTES (sur 60)

- *Candidats (1 466 copies) :*

0	26,26%	25 à 28	3,55%
1 à 4	31,99%	29 à 32	1,98%
5 à 8	9,69%	33 à 36	1,09%
9 à 12	5,32%	37 à 40	0,89%
13 à 16	5,12%	41 à 44	0,95%
17 à 20	6,89%	45 à 48	0,48%
21 à 24	4,98%	49 à 60	0,82%

- *Candidates (803 copies) :*

0	258
1 à 5	162
6 à 10	92
11 à 15	92
16 à 20	57
21 à 25	39
26 à 30	37
31 à 35	19
36 à 40	14
41 à 50	19
51 à 60	14

II.5 TEXTE DE L'EPREUVE D'ANALYSE NUMERIQUE

On se propose d'étudier différentes questions, relatives à des systèmes différentiels à retard, avec ou sans contrôle. Les notions utiles, non classiques, sont définies dans l'énoncé. Pour simplifier, on considère seulement des systèmes différentiels linéaires, à coefficients constants. Aucune considération n'est demandée sur les algorithmes qui seraient nécessaires pour calculer, de façon approchée, la solution de certaines des questions posées (par exemple ***Q. 17***).

Dans tout le problème, les notations suivantes sont utilisées :

— l étant un entier positif quelconque, un élément de $\mathbf{R}^l$ est une colonne à l éléments. I_l désigne la matrice unité à l lignes et l colonnes.

— Si M est une matrice carrée quelconque, ${}^t\mathrm{M}$ désigne sa transposée.

— $L^1(a, b; \mathbf{R}^l)$ désigne l'espace des (classes de) fonctions d'une variable réelle, à valeurs dans $\mathbf{R}^l$, qui sont intégrables au sens de Lebesgue sur l'intervalle (a, b) de la droite réelle.

Soit le système différentiel (1) :

$$\frac{d\mathrm{X}(t)}{dt} = \mathrm{A}\,\mathrm{X}(t) + \mathrm{B}\,\mathrm{X}(t-h) + \mathrm{F}(t) \tag{1}$$

dans lequel :

- — la variable indépendante réelle t sera appelée le temps;
- — h est une constante donnée, positive (le retard);
- — A et B sont deux matrices données, à termes réels constants, à n lignes et n colonnes;
- — F est une application donnée, de $[0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}^n$, localement intégrable au sens de Lebesgue;
- — X est une application inconnue, de $[-h, +\infty[$ dans $\mathbf{R}^n$, astreinte à être *absolument continue* pour $t \geqslant 0$, et à vérifier (1) pour $t > 0$.

I

On se donne $\mathrm{X}_0 \in \mathbf{R}^n$ et $\varphi \in L^1(-h, 0; \mathbf{R}^n)$.

Q. 1 Montrer que le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Rechercher X satisfaisant (1), et vérifiant les conditions} \\ \text{initiales « épaisses » : } \mathrm{X}(0) = \mathrm{X}_0,\ \mathrm{X}(t) = \varphi(t) \text{ pour presque} \\ \text{tout } t \text{ de } (-h, 0) \end{array} \right.$$

possède une solution, et que celle-ci est unique pour $t \geqslant 0$.

Cette solution sera notée $\mathrm{X}(.\,; \mathrm{X}_0, \varphi, \mathrm{F})$. Dans tout le problème, une solution de (1) sera toujours supposée correspondre à des conditions initiales épaisses, du type décrit ci-dessus.

En particulier, on supposera toujours que la restriction à $[-h, 0]$ de toute solution de (1) appartient à $L^1(-h, 0; \mathbf{R}^n)$.

Q. 2 Dans cette question, on suppose que l'application F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. Si m est un entier positif ou nul, montrer que l'application $t \longmapsto \mathrm{X}(t; \mathrm{X}_0, \varphi, \mathrm{F})$ est de classe $\mathscr{C}^m$ sur $]mh, +\infty[$. Comment ce résultat est-il modifié si on ajoute l'hypothèse : φ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $]-h, 0[$? (k entier donné $\geqslant 0$).

Q. 3 Montrer qu'il existe une fonction unique, K, de variable réelle : $u \longmapsto \mathrm{K}(u)$, où $\mathrm{K}(u)$ est une matrice à termes réels, à n lignes et n colonnes, vérifiant les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{K}(u) = 0 & \text{pour } u < 0 \\ \mathrm{K}(0) = \mathrm{I}_n & \\ u \longmapsto \mathrm{K}(u) \text{ est fonction absolument continue} & \text{pour } u \geqslant 0 \\ \dfrac{d\mathrm{K}(u)}{du} = \mathrm{K}(u)\mathrm{A} + \mathrm{K}(u-h)\mathrm{B} & \text{pour } u > 0 \end{array} \right.$$

On notera que, pour $0 < u < h$, l'équation différentielle matricielle, vérifiée par K, se réduit à $\dfrac{d\mathrm{K}(u)}{du} = \mathrm{K}(u)\mathrm{A}$.

Si X est une solution de (1), et si t est positif, évaluer, de deux façons différentes, l'intégrale $\displaystyle\int_0^t \mathrm{K}(t-s)\,\frac{d\mathrm{X}(s)}{ds}\,ds$, et en déduire l'expression de $\mathrm{X}(t; \mathrm{X}_0, \varphi, \mathrm{F})$ au moyen de K (la formule obtenue contient des symboles d'intégration).

II

Dans toute cette partie II *du problème, on prend, dans* (1) :

$$F(t) = 0 \quad \textit{pour} \quad t \geqslant 0 .$$

Soit p un entier positif donné.

Soient $Y_0 \in \mathbf{R}^n$ et $\varphi \in L^1(-h, 0 ; \mathbf{R}^n)$

Si $X(. ; Y_0, \varphi, 0)$ est la solution de (1) correspondant aux conditions initiales épaisses Y_0, φ, on pose,
pour $t \in [0, h]$ et $j \in \{1, 2 \ldots, p\}$:

$$X_j(t) = X(t + (j-1)h ; Y_0, \varphi, 0)$$

Pour chaque $t \in [0, h]$, $\widetilde{X}(t)$ désigne le vecteur de $\mathbf{R}^{pn}$ dont les n premières composantes sont celles de $X_1(t)$, les n suivantes sont celles de $X_2(t), \ldots,$ les n dernières sont celles de $X_p(t)$.

Q. 4 Montrer que, pour $t \in]0, h[$, $\widetilde{X}$ vérifie un système différentiel de la forme (2) :

$$\frac{d\widetilde{X}(t)}{dt} = \widetilde{A}\,\widetilde{X}(t) + \widetilde{B}\,\widetilde{\Phi}(t) \tag{2}$$

où $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ sont deux matrices constantes à pn lignes et pn colonnes (à déterminer), et où $\widetilde{\Phi}$ a la signification suivante :

Pour chaque $t \in [0, h]$, $\widetilde{\Phi}(t)$ désigne le vecteur de $\mathbf{R}^{pn}$ dont les n premières composantes sont les composantes de $\varphi(t-h)$, et dont toutes les autres composantes sont nulles.

Dans ces conditions, montrer l'équivalence des problèmes $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ suivants, dans chacun desquels $Y_0, Y_1, \ldots, Y_p$ sont $(p+1)$ vecteurs donnés de $\mathbf{R}^n$:

$(\mathcal{P}_1)$ On cherche $\varphi \in L^1(-h, 0 ; \mathbf{R}^n)$ telle que la solution :
$X(. ; Y_0, \varphi, 0)$ de (1) vérifie les conditions :
$X(jh ; Y_0, \varphi, 0) = Y_j$ pour $j = 0, 1, 2, \ldots, p$

$(\mathcal{P}_2)$ On cherche $\varphi \in L^1(-h, 0 ; \mathbf{R}^n)$ (c'est-à-dire : on cherche $\widetilde{\Phi}$) telle que la solution $\widetilde{X}$ de (2), *absolument continue sur* $[0, h]$, qui vérifie la condition initiale :

$$\widetilde{X}(0) = \begin{bmatrix} Y_0 \\ \cdots \\ Y_1 \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ Y_{p-1} \end{bmatrix}, \text{ vérifie aussi la condition finale } \widetilde{X}(h) = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \cdots \\ Y_2 \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ Y_p \end{bmatrix}$$

Le système différentiel (2) sera dit complètement contrôlable si, à tout couple de vecteurs Z_1, Z_2 de $\mathbf{R}^{pn}$, on peut faire correspondre une fonction $\widetilde{\Phi}$ (bâtie, comme il a été indiqué dans ***Q. 4***, à partir d'un élément φ de $L^1(-h, 0 ; \mathbf{R}^n)$) telle que (2) possède au moins une solution $\widetilde{X}$, définie sur $[0, h]$ et vérifiant les conditions aux limites : $\widetilde{X}(0) = Z_1$, $\widetilde{X}(h) = Z_2$.

On notera qu'une condition nécessaire et suffisante, pour que (2) soit complètement contrôlable, est que l'application :

$$\varphi \longmapsto \int_0^h e^{(h-s)\widetilde{A}}\, \widetilde{B}\, \widetilde{\Phi}\,(s)\,ds$$

soit une *surjection* de $L^1(-h, 0 ; \mathbf{R}^n)$ sur $\mathbf{R}^{pn}$.

Q. 5 Montrer que, pour que $(\mathcal{P}_1)$ possède au moins une solution — et ce, quels que soient les vecteurs $Y_0, Y_1, \ldots, Y_p$ — il est nécessaire et suffisant que (2) soit complètement contrôlable.

III

Dans toute cette partie III *du problème, on suppose encore que, dans* (1), *on prend* $F(t) = 0$ *pour* $t \geqslant 0$. *On munit* $\mathbf{R}^n$ *de son produit scalaire usuel, pour lequel la base canonique est orthonormée; on note* (v, v') *le produit scalaire des vecteurs* v *et* v'.

τ étant un réel positif, on dira que (1) est dégénéré à l'instant τ s'il existe q, vecteur non nul de $\mathbf{R}^n$, tel que, pour toute solution $X(. ; X_0, \varphi, 0)$ de (1), le vecteur $X(\tau ; X_0, \varphi, 0)$ soit orthogonal à q.

Q. 6 Montrer que, si (1) est dégénéré à l'instant τ, alors :

$$\begin{cases} \text{d'une part} \quad \tau > h \\ \text{d'autre part (1) est dégénéré à tout instant } t \text{ postérieur à } \tau. \end{cases}$$

On dira alors que (1) est *dégénéré à partir de l'instant* τ.

N. B. — *La résolution de* **Q. 6**, *de même que celle de* **Q. 7** *et* **Q. 8**, *peut se faire sans utilisation de la matrice* K, *introduite en* **Q. 3**.

Q. 7 *Exemple de dégénérescence.* On prend $n = 3$, $h = 1$. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont quatre constantes réelles, telles que :

$$\alpha\gamma = 2, \qquad \beta\delta = -2.$$

On envisage le système différentiel (où x, y, z sont des fonctions inconnues, à valeurs réelles) :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha y(t); \quad \frac{dy(t)}{dt} = \beta z(t) + \gamma x(t-1); \quad \frac{dz(t)}{dt} = \delta y(t-1).$$

Montrer que, pour toute solution, on a $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} = 0$ pour $t > 2$.

En déduire que le système différentiel est dégénéré à partir de l'instant $t = 2$. En considérant une solution particulière convenable, montrer qu'il n'y a pas dégénérescence avant l'instant $t = 2$.

Q. 8 *On étudie ici une généralisation de l'exemple précédent* (*et on pourra s'inspirer de la méthode suivie en* **Q. 7**) *:*

On prend

$h = 1$; $n = n_1 + n_2 + n_3$ où n_1, n_2, n_3 sont trois entiers positifs ;

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ sont des matrices rectangulaires données, à termes réels constants :

$\mathcal{A}$ a n_1 lignes et n_2 colonnes;
$\mathcal{B}$ a n_2 lignes et n_3 colonnes;
$\mathcal{C}$ a n_2 lignes et n_1 colonnes;
$\mathcal{D}$ a n_3 lignes et n_2 colonnes.

Ces quatre matrices vérifient les conditions :

$$\mathcal{C}\mathcal{A} = 2\,\mathrm{I}_{n_2}, \qquad \mathcal{B}\mathcal{D} = -2\,\mathrm{I}_{n_2}$$

On envisage le système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathrm{X}_1(t)}{dt} = \mathcal{A}\,\mathrm{X}_2(t) \\[2ex] \dfrac{d\mathrm{X}_2(t)}{dt} = \mathcal{B}\,\mathrm{X}_3(t) + \mathcal{C}\,\mathrm{X}_1(t-1) \\[2ex] \dfrac{d\mathrm{X}_3(t)}{dt} = \mathcal{D}\,\mathrm{X}_2(t-1) \end{cases}$$

où les inconnues X_1, X_2, X_3 sont des fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}^{n_1}$, $\mathbf{R}^{n_2}$, $\mathbf{R}^{n_3}$ respectivement.

Montrer que ce système différentiel est dégénéré exactement à partir de l'instant $t = 2$.

On revient au système différentiel (1) *général* (*mais avec* $\mathrm{F}(t) = 0$ *pour* $t \geqslant 0$) *et on réintroduit la matrice* K (*cf.* **Q. 3**) *et sa transposée* ${}^t\mathrm{K}$, *en vue de résoudre* **Q. 9** *et* **Q. 10**.

Q. 9 Montrer que, pour que (1) soit dégénéré à partir de l'instant τ, il est nécessaire qu'il existe q, vecteur constant non nul de $\mathbf{R}^n$, tel que ${}^t\mathrm{K}(t)q = 0$ pour tout $t \geqslant \tau$ (ce qui implique en particulier que $\mathrm{K}(t)$ soit singulière pour $t \geqslant \tau$).

Inversement, si existent τ' fini positif et q, vecteur constant non nul de $\mathbf{R}^n$, tels que ${}^t\mathrm{K}(t)q = 0$ pour tout $t \geqslant \tau'$, montrer qu'alors (1) est dégénéré « au moins » à partir de l'instant $\tau' + h$ (« au moins » signifiant que (1) peut être dégénéré à partir d'un instant antérieur à $\tau' + h$).

Q. 10 De **Q. 9**, déduire que, pour que (1) soit dégénéré à partir d'un instant fini, il est nécessaire que la matrice B soit singulière. Montrer, à l'aide d'un contre-exemple simple, que cette condition nécessaire n'est pas suffisante.

Q. 11 Un point Z de $\mathbf{R}^n$ sera dit accessible à l'instant $t > 0$, pour le système (1), s'il existe une solution $\mathrm{X}(.\,;\mathrm{X}_0, \varphi, 0)$ de (1), telle que $\mathrm{X}(t\,;\mathrm{X}_0, \varphi, 0) = \mathrm{Z}$.

Montrer que l'ensemble des points de $\mathbf{R}^n$, accessibles à l'instant t pour le système (1), forme un sous-espace vectoriel $\mathrm{E}(t)$ de $\mathbf{R}^n$.

Montrer aussi que, pour que (1) soit dégénéré à partir de l'instant τ, il faut et suffit que la dimension de $\mathrm{E}(\tau)$ soit inférieure à n.

Q. 12 On considère (1) où A est la matrice nulle, et où la matrice B est singulière.

Montrer que, s'il existe un vecteur constant q, non nul, de $\mathbf{R}^n$, qui soit orthogonal, pour $t \geqslant \tau$, à toute solution de (1), il s'ensuit :

$$q \text{ orthogonal à } \operatorname{Im} B$$

où $\qquad \operatorname{Im} B = \{ U \in \mathbf{R}^n \mid U = BV, \ V \in \mathbf{R}^n \}$

En déduire que le système (1) n'est jamais dégénéré quand la matrice A est nulle.

Q. 13 De ***Q. 12*** déduire le résultat suivant :

Si A et B commutent (pour la multiplication des matrices), alors (1) n'est jamais dégénéré.

On désire étudier maintenant un délai à la dégénérescence, c'est-à-dire obtenir que celle-ci n'ait pas lieu avant un instant donné T, *lorsqu'on choisit convenablement le retard h, les matrices* A *et* B *restant fixées.*

Q. 14 Soit le système différentiel (3), à retard nul :

$$\frac{dY(t)}{dt} = (A + B)\,Y(t) \tag{3}$$

où A et B sont les matrices qui paraissent dans (1).

Y est une application inconnue, absolument continue, de $[0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}^n$.

Montrer que (3) n'est jamais dégénéré.

X_0 étant un vecteur de $\mathbf{R}^n$, on envisage la solution $Y(. \,;\, X_0)$ de (3), qui est telle que $Y(0 \,;\, X_0) = X_0$. On envisage aussi la solution $X(. \,;\, X_0, 0, 0)$ de (1), qui correspond aux conditions initiales épaisses : X_0, 0.

$\| \ \|$ désigne la norme euclidienne des vecteurs de $\mathbf{R}^n$, et la norme correspondante des matrices à n lignes et n colonnes, à termes réels.

Avec cette norme on a donc :

$$\| AU \| \leqslant \| A \| \,.\, \| U \| \text{ pour tout } U \in \mathbf{R}^n$$

Si T est un réel positif, montrer qu'on a, pour $0 \leqslant t \leqslant T$:

$$\| X(t \,;\, X_0, 0, 0) - Y(t \,;\, X_0) \| \leqslant h \| X_0 \| \,.\, \| B \| \, e^{T[\|A\| + \|B\| + \|A+B\|]}$$

Q. 15 Si T est donné positif, montrer qu'il existe H (T) positif tel que, pour $h \in]0, H(T)]$, le système différentiel (1) ne soit pas dégénéré avant l'instant T. On pourra procéder comme suit :

Soit $\{ X_1, X_2, \dots, X_n \}$ une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$. Pour chaque $t \geqslant 0$, posons $X_j(t) = X(t \,;\, X_j, 0, 0)$ $(j = 1, 2, \dots, n)$. $X(. \,;\, X_j, 0, 0)$ est la solution de (1) qui correspond aux conditions initiales épaisses X_j, 0.

Montrer que, pour h inférieur ou égal à une certaine valeur H(T), on a, pour tout $t \in [0, T]$:

$$\det \left(X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t) \right) \neq 0 .$$

IV

On reprend (1), où F n'est plus une fonction donnée à priori, mais un contrôle, c'est-à-dire qu'à chaque instant $t > 0$, on peut choisir la valeur F(t), de façon que la solution de (1), correspondant aux conditions initiales épaisses X_0, φ, satisfasse, si possible, une condition finale donnée (laquelle est à satisfaire au bout d'un temps fini; mais ce temps fini n'est pas forcément donné à l'avance).

Ce contrôle F est astreint à satisfaire les conditions a et b :

a. Pour chaque T fini positif, la restriction de F à [0, T] appartient à $L^1(0, T \,;\, \mathbf{R}^n)$.

b. $F(t) \in \Omega$ pour presque tout t positif, où Ω est un *compact convexe* donné de $\mathbf{R}^n$, contenant le zéro de $\mathbf{R}^n$.

On dira que le système (1) est contrôlable à la fonction nulle, à partir des conditions initiales épaisses X_0, φ (avec $X_0 \neq 0$) si on peut trouver un contrôle F, vérifiant a et b, auquel soit associé un instant t_F, fini positif, tel qu'on ait :

$$X(t \,;\, X_0, \varphi, F) = 0 \quad \text{pour tout} \quad t \geqslant t_F .$$

Q. 16 Étude d'un exemple : $n = h = 1$, $\Omega = [-1, +1]$.

L'équation différentielle (1), qui est une équation différentielle scalaire, est ici :

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t-1) + f(t) \qquad (f \text{ est le contrôle}) .$$

Montrer que, si on prend les conditions initiales épaisses : $x(t) = 1$ pour $-1 \leqslant t \leqslant 0$, il est impossible de ramener x à la fonction nulle, en un temps fini.

Au contraire, si on prend les conditions initiales épaisses : $x(t) = \frac{1}{2}$ pour $-1 \leqslant t \leqslant 0$, indiquer un choix du contrôle f, qui ramène x à la fonction nulle en un temps fini.

Q. 17 Revenant au cas général, on suppose qu'il existe des contrôles F, vérifiant a et b, et tels que $X(t\,;\,X_0,\,\varphi,\,F) = 0$ pour $t \geqslant t_F$ (X_0 est supposé non nul).

Pour X_0 *et* φ *fixés* ($X_0 \neq 0$), on peut ainsi, à chacun de ces contrôles F, associer le premier instant t_F, auquel $X(.\,;\,X_0,\,\varphi,\,F)$ est ramenée à la fonction nulle.

Montrer que, parmi ces contrôles F, il en existe un qui est optimal, c'est-à-dire qui ramène X à la fonction nulle en un temps minimum (à partir des conditions initiales épaisses fixées X_0, φ).

II.6 RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE NUMERIQUE

II.6.1. THEME DU SUJET

Le problème d'analyse numérique, proposé cette année, s'écartait de l'étude des procédés algorithmiques, pour attirer l'attention des jeunes mathématiciens sur des branches de l'analyse appliquée qui sont actuellement en plein développement et ont de plus en plus d'applications dans certains laboratoires de sciences expérimentales : la théorie des équations différentielles à retard, d'une part ; la théorie du contrôle, d'autre part.

Beaucoup de candidats ont été surpris par ce genre de problème, si on en juge par le nombre de copies blanches ou presque nulles. Le principal reproche, qu'on peut adresser à la grosse masse des candidats, c'est que, devant une situation nouvelle, ils ne savent pas adapter leur connaissance des mathématiques, et perdent tout sens de la rigueur, voire même tout bon sens.

II.6.2. RESUME DE LA SOLUTION ET OBSERVATIONS

Les questions de la première partie avaient des solutions immédiates, si on prenait d'abord la peine d'examiner ce qui a lieu pour $t \in [o, h]$, et si on procédait ensuite par recurrence sur m, pour chacun des intervalles $[m h, (m+1) h]$. Si F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]o, +\infty[$ et si de plus φ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $]-h, o[$, alo[rs] $X(\cdot\,;\,X_0, \varphi, F)$ est à la fois de classe $\mathscr{C}^m$ sur $]m h, +\infty[$, et de classe $\mathscr{C}^{m+k+1}$ sur $]m h, (m+1) h[$, pour tout m entier positif ou nul.

Dans la seconde partie, on demandait, en Q – 4, d'écrire (1) sous la forme «éclatée» (2).

Q-5 est la première question du problème offrant quelque difficulté. La condition énoncée est évidemment suffisante. Montrons qu'elle est aussi nécessaire. Par hypothèse, quel que soit $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_p)$, $(\mathscr{P}_2)$ a au moins une solution $\widetilde{X}$, laquelle vérifie

$$\widetilde{X}(h) = e^{h\widetilde{A}}\,\widetilde{X}(o) + \int_o^h e^{(h-s)\widetilde{A}}\,\widetilde{B}\,\widetilde{\Phi}(s)\,ds$$

Il suffit donc de montrer que : $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_p) \mapsto \widetilde{X}(h) - e^{h\widetilde{A}}\,\widetilde{X}(o)$ est une surjection de $\mathbf{R}^{(p+1)n}$ sur $\mathbf{R}^{pn}$.

Or, la matrice $e^{h\widetilde{A}}$ est régulière, et on voit aisément que l'application linéaire, de $\mathbf{R}^{(p+1)n}$ dans $\mathbf{R}^{pn}$: $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_p) \mapsto e^{-h\widetilde{A}}\,\widetilde{X}(h) - \widetilde{X}(o)$ est de rang pn.

La troisième partie du problème était consacrée au phénomène de la dégénérescence, pour le cas de systèmes différentiels linéaires homogènes, à coefficients constants, à retard constant. La signification de ce phénomène est claire : pour certains de ces systèmes différentiels, pour $t = \tau$ (et plus généralement pour $t \geqslant \tau$), toute solution est forcément dans un certain sous-espace vectoriel strict de $\mathbf{R}^n$.

La première partie de Q-6 a été résolue dans de nombreuses copies ; mais on ne trouve que très peu de réponses satisfaisantes à la seconde partie de Q-6. Il est pourtant simple d'observer que, si θ est une constante quelconque, supérieure à τ, et si X est une solution quelconque de (1) homogène, alors $\hat{X}$ est une autre solution, où on définit $\hat{X}$ par : $\hat{X}(t) = X(t + \theta - \tau)$.

On a donc : $(\hat{X}(\tau), q) = 0$,

c'est-à-dire $(X(\theta), q) = 0$, ce qui démontre la proposition en vue. Les conditions de régularité imposées à $\hat{X}$ pour $t \in]-h, o]$ (cf. Q-1) exigent que, dans le raisonnement précédent, on prenne $\theta - \tau > 0$.

Dans Q-7, on suggérait d'étudier $\frac{d^2y}{dt^2}$. Un calcul simple montre que $\frac{d^2y(t)}{dt^2} = 0$ pour $t > 2$, car y est alors de classe $\mathscr{C}^2$. On remarque que ce résultat est encore valable pour presque tout t dans $[1, 2]$. Car x, y, z existent $p.p.$ sur $[-1, 0]$; $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ existent $p.p.$ sur $[0, 1]$; et $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ existent $p.p.$ sur $[1, 2]$. Comme $\frac{dy}{dt}$ est une fonction absolument continue de $t \geqslant 1$, il s'en suit qu'on a $y(t) = a + ƀ\, t$ pour $t \geqslant 1$, où a et $ƀ$ sont deux constantes qui dépendent de la solution particulière envisagée. Il s'en suit :

$x(t) = \alpha a t + \alpha ƀ \frac{t^2}{2} + c$ pour $t \geqslant 1$, où c est encore une constante qui dépend de la solution considérée. Ensuite, la relation $\beta z(t) = \frac{dy(t)}{dt} - \gamma x(t-1)$ donne, pour $t \geqslant 2$: $\beta z(t) = ƀ - \gamma \left[\alpha a(t-1) + \alpha ƀ \frac{(t-1)^2}{2} + c\right]$ ou encore :

$\beta z(t) = ƀ + \gamma\alpha(a + ƀt) - \gamma\alpha\frac{ƀ}{2} - \gamma\left(\alpha a t + \alpha ƀ \frac{t^2}{2} + c\right)$.

On a donc : $\beta z(t) = 2y(t) - \gamma x(t)$ pour $t \geqslant 2$, et pour toute solution. C'est la relation de dégénérescence cherchée.

Il n'y a pas dégénérescence avant l'instant $t = 2$, car la solution particulière, qui correspond aux données initiales épaisses : $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$ pour $-1 \leqslant t \leqslant 0$, vaut, pour $1 \leqslant t \leqslant 2$:
$x(t) = \frac{2x}{3} - \alpha(t-1)^2$; $y(t) = -2(t-1)$; $z(t) = \delta t - \frac{\delta}{3}(t-1)^3$.

Les degrés de ces trois polynômes en $(t-1)$ sont différents deux à deux. Il est donc impossible de trouver trois constantes λ, μ, ν, non simultanément nulles, telles qu'on ait : $\lambda x(t) + \mu y(t) + \nu z(t) = 0$ pour tout t de $[\tau, 2]$, où τ serait un élément de $[1, 2[$.

Ces méthodes se généralisent aisément à Q-8. En particulier, pour $t \geqslant 2$, toute solution du système différentiel vérifie la relation : $\mathscr{B} X_3(t) = 2 X_2(t) - \mathscr{C} X_1(t)$. En général, il y a donc dégénérescence par rapport à plusieurs vecteurs de $\mathbf{R}^n$, linéairement distincts.

Q-9 : $X(t; X_0, o, o) = K(t) X_0$. Donc, $\forall X_0 \in \mathbf{R}^n$, on a, pour $t \geqslant \tau$: $(K(t) X_0, q) = (X_0, {}^tK(t) q) = 0$. Donc ${}^tK(t) q = 0$ pour $t \geqslant \tau$.
La fin de Q-9 se traite à l'aide de :

$X(t; X_0, \varphi, o) = K(t) X_0 + \int_{-h}^{o} K(t - s - h) B \varphi(s) ds$, d'où :

$(X(\tau' + h; X_0, \varphi, o), q) = (X_0, {}^tK(\tau' + h) q) + \int_{-h}^{o} (B\varphi(s), {}^tK(\tau' - s) q) ds.$

Q-10 : Pour $t > 0$, on a : $\frac{d\, {}^tK(t)}{dt} q = {}^tA\, {}^tK(t) q + {}^tB\, {}^tK(t-h) q$ (*)

Si (1) dégénère à partir de l'instant τ, on a donc : ${}^tB\, {}^tK(t-h) q = 0$ pour $t \geqslant \tau$. Si B est régulière, il s'en suit ${}^tK(t) q = 0$ pour $t \geqslant \tau - h$. On reporte cela dans (*) et, par le même raisonnement, on en tire : ${}^tK(t) q = 0$ pour $t \geqslant \tau - 2h$. On continue jusqu'à obtenir : ${}^tK(t) q = 0$ pour $t \geqslant \tau - kh$, où k est un entier positif tel que $\tau - kh \in [o, h[$. Ce résultat est absurde car $K(t)$ ne peut être singulière pour $o \leqslant t \leqslant h$. Donc, si B est régulière, (1) ne peut dégénérer. Le cas où B est nulle, montre qu'il ne suffit pas que B soit singulière pour que (1) dégénère.

Q-11 est immédiate et a été convenablement traitée dans de nombreuses copies. Elle sert de lemme à Q-12. On montre aisément que, si (1) dégénère, alors il existe un premier instant de dégénérescence. Considérons :

$\frac{d\, X(t)}{dt} = B\, X(t-h)$ où B est singulière. Si ce système différentiel dégénère exactement à partir de l'instant τ, on a, pour $t \in]\tau, \tau + h[$: d'une part $E(t-h) = \mathbf{R}^n$; d'autre part $\left(\frac{d\, X(t)}{dt}, q\right) = (BX(t-h), q) = 0$

on en déduit : q orthogonal à $\mathrm{Im}\, B$.

On reprend la relation, valable pour $t > 0$: $\left(\frac{d\,X(t)}{dt}, q\right) = (BX(t-h), q)$

Elle montre que, pour $t \geqslant 0$ et pour chaque solution X de (1), le produit scalaire $(X(t), q)$ a une valeur indépendante de t. Cette valeur est nulle, puisque $(X(t), q) = 0$ pour $t \geqslant \tau$. Ce résultat est absurde, puisqu'il implique dégénérescence de (1) à partir de $t = 0$. Cela résout Q-12. Q-13 se déduit de Q-12 par le changement d'inconnue : $Y(t) = e^{-tA}\,X(t)$. Q-14 se traite à l'aide de calculs classiques. La résolution de Q-15 utilise le résultat démontré en Q-14, et la continuité d'un déterminant par rapport à l'ensemble de ses termes. Passons à la quatrième partie. La seule question, à la fois délicate et un peu longue, du problème, était Q-17. Elle n'a été traitée correctement dans aucune copie. En voici une solution : il convient de ne s'occuper que du cas où l'ensemble des F — vérifiant a et b et tels que $X(t; X_0, \varphi, F) = 0$ pour $t \geqslant t_F$ — est infini.

Posons $\tilde{t} = \inf_F t_F$. Il existe une suite $\{F_m\}$ de contrôles vérifiant a et b, tels que $X(t; X_0, \varphi, F_m) = 0$ pour $t \geqslant t_{F_m}$; suite telle que $t_{F_m} \downarrow \tilde{t}$ pour $m \to +\infty$. On peut supposer $t_{F_m} \leqslant \tilde{t} + h$, $\forall m$. On a alors :

$F_m(t) = 0$ pour $t \geqslant \tilde{t} + 2h$, $\forall m$. Chacun de ces F_m est dans un borné fixe de $L^2(o, \tilde{t} + 2h; \mathbf{R}^n)$ (espace de Hilbert pour son produit scalaire usuel).

Il existe donc, d'une part $\tilde{F} \in L^2(o, \tilde{t} + 2h; \mathbf{R}^n)$, d'autre part une sous-suite extraite de $\{F_m\}$ (sous-suite qu'on notera encore $\{F_m\}$ pour simplifier les notations), tels qu'on ait, pour tout $U \in L^2(o, \tilde{t} + 2h; \mathbf{R}^n)$:

$$\int_o^{\tilde{t}+2h} (F_m(s), U(s))\,ds \to \int_o^{\tilde{t}+2h} (\tilde{F}(s), U(s))\,ds \text{ pour } m \to +\infty$$

Prenons $\tilde{F}(t) = 0$ pour $t > + 2\,h$.

$\tilde{F}$ satisfait la condition a. Montrons qu'il satisfait aussi b.

Ω, étant un convexe fermé de $\mathbf{R}^n$, est l'intersection d'une famille de demi-espaces

fermés, dans l'espace affine associé à $\mathbf{R}^n$. Il existe donc une famille $\{c_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de réels, et une famille $\{y_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de vecteurs de $\mathbf{R}^n$, telles que, si $x \in \mathbf{R}^n$, alors une condition nécessaire et suffisante pour que x soit dans Ω s'écrive :

$(x, y_\alpha) \leqslant c_\alpha$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}$

Soient t_0 et ϵ tels que $o \leqslant t_0 < t_0 + \epsilon \leqslant \tilde{t} + 2h$

Prenons $U = \chi\, y_\alpha$ où y_α est un vecteur quelconque de la famille introduite plus haut, et χ la fonction caractéristique de $[t_0, t_0 + \epsilon]$.

Pour $m \to +\infty$, on a : $\left(\int_{t_0}^{t_0+\epsilon} F_m(s)\,ds, y_\alpha\right) \to \left(\int_{t_0}^{t_0+\epsilon} \tilde{F}(s)\,ds, y_\alpha\right)$

On en tire : $\left(\int_{t_0}^{t_0+\epsilon} \tilde{F}(s)\,ds, y_\alpha\right) \leqslant \epsilon\, c_\alpha$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}$

Donc : $\frac{1}{\epsilon} \int_{t_0}^{t_0+\epsilon} \tilde{F}(s)\,ds \in \Omega$.

Il s'en suit : $\tilde{F}(t) \in \Omega$ pour presque tout t de $[o, \tilde{t} + 2h]$.

Finalement, $\tilde{F}$ satisfait bien a et b, donc est un contrôle admissible.

On montre, pour terminer, que : $X(t; X_0, \varphi, \tilde{F}) = 0$ pour $t \geqslant \tilde{t}$.

On a, en effet : $X(t; X_0, \varphi, \tilde{F}) - X(t; X_0, \varphi, F_m) = \int_o^t K(t-s)\,[\tilde{F}(s) - F_m(s)]\,d$ pour $t \geqslant 0$.

D'où : $X(t; X_0, \varphi, \tilde{F}) = \lim_{m\to+\infty} X(t; X_0, \varphi, F_m)$ pour $t \geqslant 0$.

Il s'en suit aisément la proposition en vue.

On ne s'étendra pas sur les sottises écrites par trop de candidats ou candidates : ce sont à peu près les mêmes que celles qui ont été relevées dans les rapports des concours des années antérieures.

II.6.3. LES NOTES (sur 40)

Candidats (671 copies – Moyenne : 7,9/40) :

n⩽4	4<n⩽9	9<n⩽14	14<n⩽19	19<n⩽24	24<n⩽29	29<n⩽34	34<n
318	89	125	79	28	22	6	4

Candidates (342 copies – Moyenne : 6,2/40) :

n⩽4	4<n⩽9	9<n⩽14	14<n⩽19	19<n⩽24	24<n⩽29	29<n⩽34	34<n
159	84	63	26	7	2	0	1

II.7 TEXTE DE L'EPREUVE DE MECANIQUE GENERALE

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

Il sera tenu le plus grand compte de la présentation et de la rédaction des copies.

Les candidats sont priés de respecter les notations de l'énoncé et de n'employer aucune abréviation abusive.

L'unité d'angle est le radian; le temps est désigné par t.

On considère un système matériel (Σ) constitué par un nombre fini n $(n \geqslant 3)$ de points matériels M_i, de masses respectives m_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ qui se déplacent par rapport à un repère absolu $(\mathcal{R})$ en s'attirant mutuellement en raison directe de leur masse et en raison inverse du carré de leur distance, les unités étant choisies de telle sorte que le coefficient de proportionnalité soit égal à l'unité; ainsi la résultante des forces qui agissent sur le point générique M_i est :

$$\vec{\mathcal{F}}_i = m_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{m_j}{\left\| \overrightarrow{M_i M_j} \right\|^3} \overrightarrow{M_i M_j}$$

PREMIÈRE PARTIE

On suppose que le centre d'inertie O du système matériel (Σ) est fixe par rapport à $(\mathcal{R})$ [ce qui ne restreint pas la généralité] et *on se propose d'étudier les mouvements de (Σ) au cours desquels la figure formée par les points M_i reste semblable à la configuration initiale.*

En vertu de cette hypothèse, on peut poser :

$$\overrightarrow{OM_i} = \lambda(t)\, \vec{s}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où les $\left\| \vec{s}_i \right\|$ sont constants et λ est une fonction positive du temps t, inconnue *a priori*, supposée deux fois continûment différentiable.

La figure constituée par les points μ_i définis par $\overrightarrow{O\mu_i} = \vec{s}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est alors de forme invariable et on appelle (S) le *solide fictif*, dit *associé à* (Σ), constitué par les points $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ affectés des masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ respectivement. On désigne par $Oxyz$ (de vecteurs unitaires $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) les axes centraux d'inertie de (S), par A, B, C les moments d'inertie de (S) par rapport aux axes Ox, Oy, Oz respectivement, par $\vec{\omega}$ le vecteur rotation instantanée de (S) dans son mouvement par rapport à $(\mathcal{R})$.

On introduit le vecteur $\vec{\Omega}$ et la variable τ définis par :

$$\lambda^2 \vec{\omega} = \vec{\Omega}\,; \quad dt = \lambda^2 \cdot d\tau$$

et on pose :

$$\vec{\Omega} = p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z}\,; \qquad \vec{s}_i = a_i\vec{x} + b_i\vec{y} + c_i\vec{z} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les a_i, b_i, c_i étant évidemment des constantes.

En vertu de l'hypothèse de similitude, on peut aussi écrire :

$$\vec{\mathcal{F}}_i = \frac{1}{\lambda^2} \vec{F}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\ ,$$

où les $\vec{F}_i$ sont des vecteurs constants par rapport au solide *associé* (S); on pose :

$$\vec{F}_i = X_i\vec{x} + Y_i\vec{y} + Z_i\vec{z}\,,$$

où les X_i, Y_i, Z_i sont des constantes.

I

1° En appliquant le théorème du moment cinétique au système (Σ), montrer que p, q, r, considérés comme fonctions de τ, sont solutions du système différentiel :

$$A\frac{dp}{d\tau}+(C-B)\,qr=0\ ;\qquad B\frac{dq}{d\tau}+(A-C)\,rp=0\ ;$$

$$C\frac{dr}{d\tau}+(B-A)pq=0$$

2° Montrer que le vecteur accélération $\vec{\Gamma}_i$ du point M_i dans son mouvement par rapport à $(\mathcal{R})$ est donné par la formule :

$$\vec{\Gamma}_i=\frac{1}{\lambda^2}\left\{-\left[\frac{d^2\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{d\tau^2}+\frac{1}{\lambda}\vec{\Omega}^2\right]\vec{s}_i+\frac{1}{\lambda}\left(\frac{d\vec{\Omega}}{d\tau}\right)_{\mathcal{R}}\times\vec{s}_i+\frac{1}{\lambda}(\vec{\Omega}.\vec{s}_i)\vec{\Omega}\right\}$$

où $\vec{\Omega}^2$ désigne le carré scalaire de $\vec{\Omega}$, $\vec{\Omega}.\vec{s}_i$ le produit scalaire de $\vec{\Omega}$ et de $\vec{s}_i$, $\left(\frac{d\vec{\Omega}}{d\tau}\right)_{\mathcal{R}}\times\vec{s}_i$ le produit vectoriel de $\left(\frac{d\vec{\Omega}}{d\tau}\right)_{\mathcal{R}}$ par $\vec{s}_i$

[bien entendu, $\left(\frac{d\vec{\Omega}}{d\tau}\right)_{\mathcal{R}}=\lambda^2\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$, $\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$ étant la dérivée temporelle de $\vec{\Omega}$ par rapport à $(\mathcal{R})$].

3° Écrire les équations obtenues en projetant sur Ox, Oy, Oz l'équation vectorielle traduisant la loi fondamentale de la mécanique pour chaque point M_i.

On éliminera de ces équations les dérivées de p, q, r par rapport à τ en utilisant I, 1° et on introduira, pour simplifier l'écriture, les notations α, β, γ définies par

$$B-C=\alpha A\quad,\quad C-A=\beta B\quad,\quad A-B=\gamma C$$

II

Dans cette section II de la première partie on considère le cas où les n points M_i sont alignés.

On suppose que la droite qui les porte est l'axe Oz, de sorte que $A=B$, $C=0$. On supposera $r=0$ et l'on expliquera pourquoi cette hypothèse n'est pas restrictive.

1° Montrer que p et q sont constants.

Dans ce qui suit, on choisira les axes Ox et Oy pour que $q=0$.

2° Que peut-on dire du mouvement, supposé possible, du système (Σ)?

Calculer λ en fonction de τ et en déduire que t s'exprime en fonction de τ au moyen de fonctions élémentaires (le calcul effectif de t en fonction de τ n'est pas demandé).

3° Expliciter les Z_i en fonction des m_j et des c_j.

On suppose que les masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont données.

Montrer que la détermination de $c_1, c_2, \ldots, c_n$ conduit au problème suivant : rendre minimum

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant n,\ i\neq j}\frac{m_i m_j}{|c_i-c_j|}$$

sous la condition $\sum_{i=1}^{n} m_i c_i^2=$ constante. En déduire que le problème admet au moins une solution.

III

Dans cette section III de la première partie, on considère le cas où les n points M_i sont dans un même plan.

On suppose que ce plan est le plan xOy.

1° Démontrer que les quantités :

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{d\tau^2}+\frac{1}{\lambda}(q^2+r^2)\quad,\quad\frac{d^2\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{d\tau^2}+\frac{1}{\lambda}(r^2+p^2)\quad,\quad\frac{pq}{\lambda}$$

restent constantes au cours du mouvement.

2° Des résultats précédents et des équations du I, 1°, déduire que p^2+q^2 et $\frac{p^2+q^2}{\lambda}$ sont indépendants du temps.

Deux cas sont donc à examiner :

a. λ = constante : montrer que ce cas n'est possible que si l'on a en même temps $p = q = 0$.

b. $p = q = 0$: que peut-on dire de la direction du plan xOy et de r ? Calculer λ en fonction de τ.

Que peut-on dire du mouvement, supposé possible, du système (Σ)?

3° Les masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont supposées données.

Ramener à un problème de minimum lié (voir II, 3°) le problème de la détermination des points μ_i dans le plan xOy et montrer que ce dernier admet au moins une solution.

4° Examiner le cas $n = 3$. Montrer que le triangle formé par les points doit être équilatéral.

IV

Démontrer que le cas où *les n points M_i ne sont ni alignés, ni coplanaires est impossible.*

[On pourra montrer, à partir du I, 3°, que si les points M_i ne sont ni alignés, ni coplanaires, p, q, r sont proportionnels à $\sqrt{\lambda}$, puis en utilisant les équations du I, 1°, qu'on est conduit à une impossibilité.]

DEUXIÈME PARTIE

I

Les fonctions intervenant dans cette question sont supposées suffisamment régulières pour que soit assurée la validité des calculs.

Définitions préliminaires.

On considère le système différentiel :

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où les X_i sont des fonctions scalaires des n variables scalaires $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Soit f une fonction scalaire de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

On appelle *dérivée temporelle de f par rapport au système différentiel* (1) et on note $\frac{Df}{Dt}$ la fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\frac{Df}{Dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i$$

Soit maintenant le système de m équations ($m \leqslant n$) :

$$(2) \quad f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\,;\, f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\,;\,\ldots\,;\, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

Si ces équations entraînent

$$\frac{Df_1}{Dt} = 0\,,\quad \frac{Df_2}{Dt} = 0\,,\quad \ldots\,,\quad \frac{Df_m}{Dt} = 0\,,$$

on dit que *le système d'équations* (2) *est un système de relations invariantes par rapport au système différentiel* (1).

[Alors toute solution de (1) qui vérifie les équations (2), pour une valeur t_0 de t, les vérifie pour toutes les valeurs de t].

1° Soit un système différentiel de la forme, dite *canonique* :

$$(3) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,,\quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où H est une fonction des $2n$ variables

$$q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n.$$

Montrer que H est une intégrale première du système (3).

2° On suppose dans ce qui suit que le système (3) admet en outre une relation invariante :

$$(4) \qquad f(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$$

et que cette équation (4) peut être résolue par rapport à p_1 :

$$p_1 = \varphi\,(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_2, \ldots, p_n)$$

On pose :

$$K(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_2, \ldots, p_n) =$$
$$H\left(q_1, q_2, \ldots, q_n, \varphi\,(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_2, \ldots, p_n), p_2, \ldots, p_n\right)$$

Établir que K obéit à l'équation aux dérivées partielles :

$$(5) \qquad \frac{\partial K}{\partial q_1} + \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_j} \frac{\partial K}{\partial p_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_j} \frac{\partial K}{\partial q_j} \right) = 0$$

3° Montrer que le système de $2n-1$ équations :

$$(6) \quad \begin{cases} p_1 = \varphi(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_2, \ldots, p_n) \ ; \\ \dfrac{\partial K}{\partial q_j} = 0 \ ; \quad \dfrac{\partial K}{\partial p_j} = 0 \quad (j=2, 3, \ldots, n) \end{cases}$$

est un système de relations invariantes par rapport à (3).

[On pourra montrer que : $\dfrac{D\left(\dfrac{\partial K}{\partial q_j}\right)}{Dt}$ et $\dfrac{D\left(\dfrac{\partial K}{\partial p_j}\right)}{Dt}$ sont des combinaisons linéaires des $\dfrac{\partial K}{\partial q_h}$ et $\dfrac{\partial K}{\partial p_h}$ $(h=2, 3, \ldots, n)$]

Il existe alors une famille de solutions de (3) qui vérifie les $2n-1$ équations (6). Montrer que la détermination de cette famille se ramène à une quadrature.

4° Montrer que cette famille de solutions de (3) réalise l'extremum de H sous la condition $f(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$.

II

On reprend dans cette question le système matériel (Σ) du préambule dans le cas $n = 3$ et on suppose que les trois points M_1, M_2, M_3 se meuvent dans un plan rapporté à des axes orthonormés I X, I Y liés au repère absolu ($\mathcal{R}$). On appelle (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) les composantes sur I X et I Y des vecteurs $\overrightarrow{M_3M_1}$, $\overrightarrow{M_3M_2}$.

1° Montrer que la fonction des forces d'attraction U ne dépend que des ξ_i, η_i $(i=1, 2)$ et que les équations du mouvement de M_1 et M_2 autour de M_3 peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} m_i \xi''_i - \dfrac{m_i}{m_1+m_2+m_3} (m_1 \xi''_1 + m_2 \xi''_2) = \dfrac{\partial U}{\partial \xi_i} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i=1, 2) \\ m_i \eta''_i - \dfrac{m_i}{m_1+m_2+m_3} (m_1 \eta''_1 + m_2 \eta''_2) = \dfrac{\partial U}{\partial \eta_i} \end{cases}$$

(les accents désignent des dérivées par rapport au temps).

2° On pose :

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} m_i (\xi'^2_i + \eta'^2_i) - \frac{1}{2(m_1+m_2+m_3)} \left[\left(\sum_{i=1}^{2} m_i \xi'_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{2} m_i \eta'_i \right)^2 \right] - U$$

$$\pi_i = \frac{\partial H}{\partial \xi'_i} \ ; \quad \chi_i = \frac{\partial H}{\partial \eta'_i} \quad (i=1, 2)$$

Interpréter H et en donner l'expression en fonction des ξ_i, η_i, π_i, χ_i.

Montrer que les équations du mouvement de M_1 et M_2 autour de M_3 peuvent se mettre sous la forme *canonique* [voir I, 1°].

Prouver que $\sum_{i=1}^{2} (\xi_i \chi_i - \eta_i \pi_i)$ est une intégrale première du système différentiel canonique ainsi obtenu. Quelle est sa signification mécanique ?

3° Considérant $\sum_{i=1}^{2} (\xi_i \chi_i - \eta_i \pi_i) - k = 0$, où k est une constante arbitraire, comme une relation invariante par rapport au système canonique et utilisant les résultats des I, 3° et 4°, mettre en évidence une famille de solutions à deux paramètres du problème plan des trois points matériels s'attirant suivant la loi de Newton.

On montrera que la figure formée par les trois points reste de forme invariable et, explicitant U en fonction des ξ_i, η_i, on retrouvera des résultats obtenus dans la première partie II et III.

II.8 RAPPORT SUR L'EPREUVE DE MECANIQUE

II.8.1 THEME DU SUJET

On sait que Lagrange, dans un mémoire célèbre, a montré que le problème des trois corps se laissait résoudre élémentairement si la figure formée par les trois points restait semblable à elle-même au cours du temps. Sa démonstration était très compliquée (voir le tome I du *«Traité de mécanique céleste»* de Tisserand) et Lagrange pensait qu'il était impossible de la simplifier si l'on n'admettait pas *a priori* que les trois points se déplaçaient dans un plan fixe. En 1933, Carathéodory a montré que Lagrange avait surestimé la difficulté et a donné une solution simple et élégante de la question. C'est une solution quelque peu modifiée et généralisée (voir l'ouvrage de Hamel : *Theoreksche Mechanik*) qui constitue la première partie du problème. Elle ne fait appel qu'à des connaissances de mécanique et d'analyse du niveau du premier cycle.

La seconde partie est consacrée à la mécanique analytique. Il s'agit du théorème de Levi-Civita sur la recherche de solutions particulières d'un système canonique autonome quand celui-ci possède des relations invariantes en involution (en fait dans le cas particulier où existe une seule relation invariante) et de l'élégante application qu'en a faite son illustre auteur aux solutions de Lagrange de rotation du problème plan des trois corps.

II.8.2 REMARQUES GENERALES

167 candidats ont composé en mécanique. Malgré une légère amélioration par rapport à l'an dernier (due, peut-être, à la facilité de certaines questions), les résultats sont médiocres.

Aucun n'a montré que, dans les sections II et III de la première partie, les points M_i décrivaient des coniques de foyer O suivant la loi des aires.
De trop nombreux candidats ont parlé de rotation instantanée du **système** (Σ) et ont calculé son moment cinétique absolu en O comme s'il s'agissait d'un solide.
Rares sont ceux qui ont obtenu les résultats demandés dans le 1) de la section III de la première partie. Il suffisait pourtant de constater que les quantités considérées satisfaisaient à deux groupes de n équations linéaires à cœfficients constants et que, les M_i n'étant pas alignés, deux équations de chaque groupe étaient indépendantes. En ce qui concerne la seconde partie, les candidats, dans leur grande majorité, se sont arrêtés au 2) du I.

II.8.3 RESUME DE LA SOLUTION

Question I.I.

1) Le moment cinétique absolu de (Σ) au point O est évidemment constant par rapport à $(\mathcal{R})$:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \, \vec{OM}_i \times \left(\frac{d\vec{OM}_i}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{\mathscr{C}}$$

Mais

$$\left(\frac{d\vec{OM}_i}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \frac{d\lambda}{dt}\,\vec{s}_i + \lambda\,\vec{\omega} \times \vec{s}_i$$

de sorte que l'on a :

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \, \vec{s}_i \times (\vec{\Omega} \times \vec{s}_i) = \vec{\mathscr{C}}$$

ce qui peut s'interpréter ainsi : le moment cinétique en O du solide fictif (S) supposé animé de la rotation instantanée $\vec{\Omega}$ est constant dans $\mathcal{R}$.

On a : $$A p\,\vec{x} + B q\,\vec{y} + C r\,\vec{z} = \vec{\mathscr{C}}$$

Ecrivant que $\left(\frac{d\vec{\mathscr{C}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = 0$, donc que $\left(\frac{d\vec{\mathscr{C}}}{dt}\right)_{S} + \omega \times \vec{\mathscr{C}} = 0$,

on obtient les relations demandées.

2) Le théorème de Coriolis donne :

$$\vec{\Gamma}_i = \frac{d^2\lambda}{dt^2}\,\vec{s}_i + 2\,\vec{\omega} \times \frac{d\lambda}{dt}\,\vec{s}_i + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \lambda\vec{s}_i + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \lambda\vec{s}_i)$$

Il suffit d'introduire $\vec{\Omega}$ et τ et d'utiliser la formule du double produit vectoriel.

3) Projetant $m_i\,\vec{\Gamma}_i = \vec{\mathscr{F}}_i = \frac{1}{\lambda^2}\,\vec{F}_i$ sur Ox, Oy, Oz et remarquant que, grâce au I, 1), on a :

$$\left(\frac{d\vec{\Omega}}{d\tau}\right)_{\mathcal{R}} = \alpha q r\,\vec{x} + \beta r p\,\vec{y} + \gamma p q\,\vec{z},$$

on obtient :

$$-\left[\frac{d^2\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{d\tau^2} + \frac{1}{\lambda}\,(q^2 + r^2)\right] a_i + \frac{pq}{\lambda}(1-\gamma)b_i + \frac{rp}{\lambda}(1+\beta)\,c_i = \frac{X_i}{m_i} \quad (i = 1,2,\dots,n)$$

et $2n$ autres équations par permutation circulaire.

Question I.II

Les points M_i étant sur Oz, r n'a plus de signification et peut être pris nul.

1) I. 1) donne $p = p_0 = Cte$, $q = q_0 = Cte$. $\vec{\Omega}$ est alors lié à $Oxyz$ et parallèle au plan xOy ; les axes issus de O perpendiculaires à Oz étant tous centraux d'inertie pour (S), on peut prendre Ox parallèle à $\vec{\Omega}$, donc $q = 0$.

2) Soit M_1 le point de plus grande cote. $\vec{\mathscr{F}}_1$, résultante des attractions de M_2, $M_3, \dots, M_n$ sur M_1 et l'axe Oz sont de sens contraire ; en outre :

$$\vec{\mathscr{F}}_1 = \frac{\vec{F}_1}{\lambda^2} = \frac{Z_1\,\vec{z}}{\lambda^2} = \frac{Z_1\,\|\vec{s}_1\|^2}{OM_1^2}\,\vec{z}$$

Tout se passe donc comme si M_1 était soumis à une attraction newtonienne de la part de O ; M_1 décrit donc une conique de foyer O suivant la loi des aires ; les autres M_i décrivent des coniques homothétiques.

(Remarquons d'ailleurs que $\vec{\omega} = \dfrac{\vec{\Omega}}{\lambda^2} = \dfrac{p_0}{\lambda^2}\,\vec{x}$. La vitesse angulaire de rotation de Oz est $\omega = \dfrac{p_0}{\lambda^2}$, de sorte que $OM_i^2 \cdot \omega = p_0\,\|\vec{s}_i\|^2 =$ constante : c'est bien la loi des aires).

Puisque $a_i = b_i = 0$, $X_i = Y_i = 0$, les $2n$ premières équations du I,3) sont identiquement vérifiées ; les n autres s'écrivent :

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{d\tau^2} + \frac{p_0^2}{\lambda} = -\frac{Z_i}{m_i\,c_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Ce mouvement n'est donc possible que si les $-\dfrac{Z_i}{m_i c_i}$ sont égaux (voir 3°).

Désignant par K leur valeur commune, on a :

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{k}{p_0^2}\,[1 + \epsilon\cos(p_0\tau + \delta)] \quad (\epsilon, \delta = Ctes)$$

L'intégrale donnant $t(\tau)$ porte sur une fraction rationnelle de $\cos(p_0\tau + \delta)$, donc se calcule au moyen de fonctions élémentaires.

3) On a :

$$Z_i = m_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} m_g \frac{c_j - c_i}{|c_i - c_j|^3}$$

Ces relations $m_i c_i k = -Z_i$ s'écrivent donc :

$$k\frac{\partial}{\partial c_i}\sum_{i=1}^{n} m_i c_i^2 + \frac{\partial}{\partial c_i}\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \frac{m_i m_j}{|c_i - c_j|} = 0$$

On est donc ramené au problème : chercher l'extremum de :

$$\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \frac{m_i m_j}{|c_i - c_j|} \quad \text{sous la condition} \quad \sum_{i=1}^{n} m_i c_i^2 = \text{constante.}$$

Les $\dfrac{m_i\ m_j}{|c_i - c_j|}$ étant positifs, il ne peut s'agir que de minimum.

$\sum_{i=1}^{n} m_i c_i^2 = Cte$ montre que les $|c_i|$ sont bornés, donc aussi les $|c_i - c_j|$; par suite, $\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \dfrac{m_i m_j}{|c_i - c_j|}$ est bornée inférieurement par un nombre strictement positif quand $\sum_{i=1}^{n} m_i c_i^2 = Cte$. L'ensemble $\left\{\sum_{i=1}^{n} m_i c_i^2 = Cte,\ \sum_{i=1}^{n} m_i c_i = 0\right\}$ étant compact et $\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \dfrac{m_i m_j}{|c_i - c_j|}$ étant continue sur ce compact sauf aux points $c_i = c_j$ où elle est infinie, un raisonnement classique montre que

$$\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{m_i\, m_j}{|c_i - c_j|} \quad \text{atteint sa borne inférieure.}$$

Remarque

Le cas où la figure reste égale à elle-même est possible.

$\lambda = Cte = \lambda_0$ est solution de $\dfrac{d^2(\frac{1}{\lambda})}{d\tau^2} + \dfrac{p_0{}^2}{\lambda} = k$ avec $k = \dfrac{p_0{}^2}{\lambda_0}$

$\omega = \dfrac{p_0}{\lambda_0{}^2}$ est alors constant et le mouvement de chaque M_i est circulaire uniforme.

Question I.III

Dans ce cas, on a $c_i = 0$, $Z_i = 0$ et $C = A + B$ qui entraîne $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\gamma = \dfrac{A-B}{A+B}$.

1) Les n équations du dernier groupe de I, 3) sont identiquement vérifiées ; les autres s'écrivent :

$$\left.\begin{aligned} -\left[\frac{d^2(\frac{1}{\lambda})}{d\tau^2} + \frac{1}{\lambda}(q^2+r^2)\right] a_i + \frac{pq}{\lambda}(1-\gamma)\, b_i &= \frac{X_i}{m_i} \\ \frac{pq}{\lambda}(1+\gamma)\, a_i - \left[\frac{d^2(\frac{1}{\lambda})}{d\tau^2} + \frac{1}{\lambda}(r^2+p^2)\right] a_i &= \frac{Y_i}{m_i} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

Les M_i n'étant pas alignés, deux équations de chaque groupe sont sûrement indépendantes, ce qui entraîne le résultat demandé.

2) I,1) donne $\dfrac{dp}{d\tau} + qr = 0$, $\dfrac{dq}{d\tau} - rp = 0$, $\dfrac{dr}{d\tau} - \gamma p q = 0$,

donc $p^2 + q^2 = Cte$. III, 1) donne $\dfrac{p^2 - q^2}{\lambda} = Cte$, $\dfrac{pq}{\lambda} = Cte$,

donc $\dfrac{p^2+q^2}{\lambda} = Cte$

a) $\lambda = Cte$ entraîne, par III, 1) : $q^2 + r^2 = Cte$, $r^2 + p^2 = Cte$

Comme $p^2 + q^2 = Cte$, on a p, q, r constants, donc $\vec{\Omega}$ est lié à (S), et par suite aussi $\vec{\omega} = \dfrac{\vec{\Omega}}{\lambda^2}$: $\vec{\Omega}$ est donc porté par un axe central d'inertie de (S).

Si $\vec{\Omega}$ est parallèle à Ox (resp. Oy), $q = r = 0$ (resp. $p = r = 0$) et, d'après III, 1) $X_i = 0$ (resp. $Y_i = 0$) ; $\vec{\mathscr{F}}_i$ est parallèle à Oy (resp. Ox), ce qui est impossible pour des points non alignés sur Oy (resp. Ox). Reste $\vec{\Omega}$ parallèle à Oz, donc $p = q = 0$.

b) Si $p = q = 0$, $\vec{\omega}$ a une direction fixe dans (S), donc dans (R) ; la direction du plan xOy est donc fixe dans l'espace ; en outre $\dfrac{dr}{dt} - \gamma p q = 0$ entraîne $r = Cte$.

Les équations du III, 1) donnent donc :

$$\frac{d^2(\frac{1}{\lambda})}{d\tau^2} + \frac{r^2}{\lambda} = -\frac{X_i}{m_i\, a_i} = -\frac{Y_i}{m_i\, b_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Le mouvement n'est possible que si les $-\dfrac{X_i}{m_i\, a_i}$ et $-\dfrac{Y_i}{m_i\, b_i}$ sont égaux (voir 3)). Si k est leur valeur commune, on a :

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{k}{r^2}\left[1 + \epsilon \cos(r\tau + \delta)\right]$$

Les relations $-m_i\, a_i\, k = X_i$, $-m_i\, b_i\, k = y_i$ entraînent

$$\vec{\mathscr{F}}_i = -\frac{m_i\, k}{\lambda^2}\, \vec{s}_i$$

$\vec{\mathscr{F}}_i$ passe par O ; elle est dirigée vers O, car $k =$ valeur de $\dfrac{r^2}{\lambda}$ quand $\cos(r\tau + \delta) = 0$, est positif ; $\|\vec{\mathscr{F}}_i\|$ est inversement proportionnelle à OM_i^2 : les M_i décrivent donc des coniques de foyer O suivant la loi des aires.

3) Il suffit d'expliciter X_i, Y_i et de porter dans les relations $-m_i a_i k = X_i$, $-m_i b_i k = Y_i$. On est ramené au problème : rendre minimum

$$\sum_{\substack{i,j\\ j\neq i}} \frac{m_i\, m_j}{[(a_i - a_j)^2 + (b_i - b_j)^2]^{1/2}} \quad \text{sous la condition}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (a_i^2 + b_i^2) = \text{constante.}$$

4) Dans le cas n= 3, en posant $s_{ij} = [(a_i - a_j)^2 + (b_i - b_j)^2]^{1/2}$,

il vient :

$$k a_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3} \frac{m_j (a_i - a_j)}{s_{ij}^3} \; ; \quad k b_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3} \frac{m_j (b_i - b_j)}{s_{ij}^3}$$

Ecrivant ces relations pour $i = 1, 2$ et utilisant $\sum_{i=1}^{3} m_i a_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{3} m_i b_i = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} \left[k - \dfrac{m_2}{s^3_{12}} - \dfrac{m_3 + m_1}{s^3_{13}}\right]\vec{s}_1 + m_2\left[\dfrac{1}{s^3_{12}} - \dfrac{1}{s^3_{13}}\right]\vec{s}_2 = 0 \\ m_1\left[\dfrac{1}{s^3_{12}} - \dfrac{1}{s^3_{23}}\right]\vec{s}_1 + \left[k - \dfrac{m_1}{s^3_{12}} - \dfrac{m_2 + m_3}{s^3_{23}}\right]\vec{s}_2 = 0 \end{cases}$$

Comme $\vec{s}_1$ et $\vec{s}_2$ ne sont pas parallèles, les crochets sont nuls.

Donc $s_{12} = s_{23} = s_{31}$ et $M_1\, M_2\, M_3$ est équilatéral ; de plus

$$k = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{s_{ij}^3}.$$

Le cas où le triangle reste égal à lui-même correspond à $\lambda = Cte = \lambda_0$;

les points sont animés de mouvements circulaires uniformes de vitesse angulaire

$$\omega = \pm \frac{(m_1 + m_2 + m_3)^{1/2}}{(\text{côté du triangle})^{3/2}}.$$

Question I.IV

Considérons les équations du I, 3). Puisque les M_i ne sont ni alignés, ni coplanaires, l'un des déterminants formé avec les a_i, b_i, c_i est différent de zéro ; les coefficients des a_i, b_i, c_i sont donc constants.

En outre $1 \pm \alpha$, $1 \pm \beta$, $1 \pm \gamma$ sont différents de zéro (par exemple, on a : $1 - \alpha = \dfrac{2}{A}\displaystyle\int_S y^2\, dm > 0$).

Donc $\dfrac{pq}{\lambda}$, $\dfrac{qr}{\lambda}$, $\dfrac{rp}{\lambda}$ sont constants et par suite, on peut écrire $p = p_0\sqrt{\lambda}$, $q = q_0\sqrt{\lambda}$, $r = r_0\sqrt{\lambda}$ (p_0, q_0, r_0 constants).

Le relation $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = Cte$ tirée de I, 1) entraîne alors λ constant ; donc $\vec{\Omega}$ et $\vec{\omega}$ sont liés à (S), donc sont portés par un axe central d'inertie. Pour fixer les idées, prenons Oz ; alors $p_0 = q_0 = 0$ et I, 3) donne $Z_i = 0$, ce qui est impossible, car les points M_i ne sont pas dans le plan xOy.

Question II. I

1) Ce résultat est classique.

2) Dérivant $p_1 = \varphi$ par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_j}\frac{dp_j}{dt}\right)$$

Ainsi toute solution de (3) qui satisfait à (4) vérifie :

$$-\frac{\partial H}{\partial q_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)$$

Il suffit d'utiliser les relations entre les dérivées partielles de K et de H pour obtenir (5).

3) $p_1 = \varphi$ est, par hypothèse, une relation invariante.

On trouve facilement :

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial K}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial H}{\partial p_1}\left[\frac{\partial^2 K}{\partial q_j\,\partial q_1} - \sum_{h=2}^{n}\left(\frac{\partial^2 K}{\partial q_j\,\partial q_h}\frac{\partial \varphi}{\partial p_h} - \frac{\partial^2 K}{\partial q_j\,\partial p_h}\frac{\partial \varphi}{\partial q_h}\right)\right]$$

$$+ \sum_{h=2}^{n}\left(\frac{\partial^2 K}{\partial q_j\,\partial q_h}\,\frac{\partial K}{\partial p_h} - \frac{\partial^2 K}{\partial q_j\,\partial p_h}\,\frac{\partial K}{\partial q_h}\right)$$

Dérivant par rapport à q_j la relation

$$(5)\quad \frac{\partial K}{\partial q_1} + \sum_{h=2}^{n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_h}\frac{\partial K}{\partial p_h} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_h}\frac{\partial K}{\partial q_h}\right) = 0,$$

on voit que le crochet est une combinaison linéaire des $\dfrac{\partial K}{\partial q_h}$ et $\dfrac{\partial K}{\partial p_h}$, ce qui démontre le résultat.

Il existe donc une famille de solutions de (3) vérifiant (6). On la détermine en tirant de (6) $q_2, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ en fonction de q_1 et en portant dans $\dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_1}$, ce qui donne q_1 en fonction de t par une quadrature.

4) Toute solution de la famille annule $\dfrac{\partial K}{\partial q_h}$ et $\dfrac{\partial K}{\partial p_h}$ $(h = 2, 3, \ldots, n)$ et aussi $\dfrac{\partial K}{\partial q_1}$ d'après (5), donc rend extremum K, c'est-à-dire réalise l'extremum de H sous la condition $f = 0$.

Question II.11

1) On a : $U = \dfrac{m_1\, m_2}{\|\overrightarrow{M_1 M_2}\|} + \dfrac{m_2\, m_3}{\|\overrightarrow{M_2 M_3}\|} + \dfrac{m_3\, m_1}{\|\overrightarrow{M_3 M_1}\|}$; d'où le résultat.

Le système (Σ) est à 6 degrés de liberté ; si on prend pour paramètres ξ_i, η_i et les coordonnées X, Y du centre d'inertie dans IXY, on trouve pour l'énergie cinétique absolue :

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} m_i\,(\xi_i'^2 + \eta_i'^2) - \frac{1}{2(m_1+m_2+m_3)}\left[\left(\sum_{i=1}^{2} m_i \xi_i'\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{2} m_i \eta_i'\right)^2\right] + (m_1+m_2+m_3)(X'^2 + Y'^2)$$

Les équations de Lagrange se divisent en deux groupes. Les équations en X et Y sont $X' = Cte$, $Y' = Cte$, ce qui est bien connu ; les équations en ξ_i, η_i sont celles de l'énoncé. Ainsi, pour écrire les équations du mouvement relatif de M_1 et M_2 autour de M_3, on peut «laisser tomber» dans T le terme en $(m_1+m_2+m_3)(X'^2 + Y'^2)$.

2) Ce qui précède donne l'interprétation de H et montre que l'on peut mettre sous la forme canonique (dite de Poincaré) les équations du mouvement relatif.

On trouve facilement :

$$H = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2m_i}\left(\pi_i^2 + \chi_i^2\right) + \frac{1}{2m_3}\left[\left(\sum_{i=1}^{2}\pi_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{2}\chi_i\right)^2\right] - U$$

On a alors :

$$\frac{D}{Dt}\sum_{i=1}^{2}(\xi_i\chi_i - \eta_i\pi_i) = \left(\xi_1\frac{\partial U}{\partial \eta_1} - \eta_1\frac{\partial U}{\partial \xi_1}\right) + \left(\xi_2\frac{\partial U}{\partial \eta_2} - \eta_2\frac{\partial U}{\partial \xi_2}\right)$$

Le second membre est le moment en M_3 du système $(\vec{\mathscr{F}}_1, \vec{\mathscr{F}}_2, \vec{\mathscr{F}}_3)$; il est donc nul; $\sum_{i=1}^{2}(\xi_i\chi_i - \eta_i\pi_i)$ est donc l'intégrale première du moment cinétique.

3) En prenant comme relation invariante $f \equiv \Sigma(\xi_i\chi_i - \eta_i\pi_i) - k = 0$, la méthode du I fournit une famille à deux paramètres (k et la constante d'intégration figurant dans l'expression de q_1 en fonction de t) de solutions définies par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial \xi_i} - \omega \dfrac{\partial f}{\partial \pi_i} = 0 & \dfrac{\partial H}{\partial \eta_i} - \omega \dfrac{\partial f}{\partial \eta_i} = 0 \quad (A) \\ \dfrac{\partial H}{\partial \pi_i} - \omega \dfrac{\partial f}{\partial \pi_i} = 0 & \dfrac{\partial H}{\partial \chi_i} - \omega \dfrac{\partial f}{\partial \chi_i} = 0 \quad (B) \end{cases}$$

où ω est un multiplicateur.

Dans les équations (B), on remplace f par sa valeur, $\dfrac{\partial H}{\partial \pi_i}$ par $\dfrac{d\xi_i}{dt}$ et $\dfrac{\partial H}{\partial \chi_i}$ par $\dfrac{dy_i}{dt}$; il vient :

$$\frac{d\xi_i}{dt} + \omega\, \eta_i = 0 \quad ; \quad \frac{d\eta_i}{dt} - \omega \xi_i = 0$$

M_1 et M_2 sont donc animés autour de M_3 de mouvements circulaires de vitesse angulaire ω , *a priori* non constante. Donc la figure formée par les trois points reste de forme invariable. Si on tient compte des expressions de H et de f, les équations (A) s'écrivent :

$$-\frac{\partial U}{\partial \xi_i} - \omega\, \chi_i = 0 \quad ; \quad -\frac{\partial U}{\partial \eta_i} + \omega \pi_i = 0$$

et par suite, les équations (B) deviennent :

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_i} + \frac{m_i}{m_3} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi_1} + \frac{\partial U}{\partial \xi_2}\right) + m_i\, \omega^2 \xi_i = 0$$

et une analogue avec les η_i

On pose :

$$\Delta_1^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 \ ; \ \Delta_2^2 = \xi_2^2 + \eta_2^2 \ ; \ \Delta^2 = (\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 ,$$

de sorte que :

$$U = \frac{m_1\, m_2}{\Delta} + \frac{m_2\, m_3}{\Delta_1} + \frac{m_3\, m_1}{\Delta_2}$$

et les équations deviennent :

$$\begin{cases} \left[\dfrac{m_3 + m_1}{\Delta_1^3} + \dfrac{m_2}{\Delta^3} - \omega^2\right] \xi_1 + m_2 \left[\dfrac{1}{\Delta_2^3} - \dfrac{1}{\Delta^3}\right] \xi_2 = 0 \\ m_1 \left[\dfrac{1}{\Delta_1^3} - \dfrac{1}{\Delta^3}\right] \xi_1 + \left[\dfrac{m_2 + m_3}{\Delta_2^3} + \dfrac{m_1}{\Delta^3} - \omega^2\right] \xi_2 = 0 \end{cases}$$

et deux analogues avec η_1 et η_2

Bien entendu, Δ, Δ_1 , Δ_2 restent constants.

On distingue deux cas.

1er cas — Les points sont alignés

On ne restreint pas la généralité en prenant M_2 entre M_3 et M_1 ;
alors $\Delta_1 = \Delta + \Delta_2$ et $\dfrac{\xi_1}{\xi_2} = \dfrac{\eta_1}{\eta_2} = \dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}$

Les équations deviennent :

$$\begin{cases} \Delta_1\, \omega^2 = \dfrac{m_3 + m_1}{\Delta_1^3} + \dfrac{m_2}{\Delta_2^3} + \dfrac{m_2}{\Delta^3} \\ \Delta_2\, \omega^2 = \dfrac{m_1}{\Delta_1^3} + \dfrac{m_2 + m_3}{\Delta_2^3} - \dfrac{m_2}{\Delta^3} \end{cases}$$

Ecrivant qu'elles sont compatibles, on obtient une équation du 5e degré pour $\rho = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$ et le théorème de Descartes montre aisément qu'elle a une racine positive et une seule. Donc si les masses sont données, on obtient une famille de mouvements à deux paramètres : Δ et l'angle fixant la position initiale de la droite portant les points.

2e cas — Les points forment un véritable triangle

Alors : $\dfrac{\xi_1}{\xi_2} \neq \dfrac{\eta_1}{\eta_2}$, de sorte que les cœfficients des ξ_i, η_i sont nuls ;

donc :

$$\begin{cases} \Delta = \Delta_1 = \Delta_2 & \text{: le triangle est équilatéral} \\ \omega^2 = \dfrac{m_1 + m_2 + m_3}{\Delta^3} = \text{constante} \end{cases}$$

On retrouve les résultats obtenus dans la première partie du problème dans le cas λ = constante.

II.8.4 LES NOTES (sur 40)

Candidats : 167 copies ; candidates : 73 copies

	0	1 à 5	6 à 10	11 à 15
Candidats :	17	60	47	27
Candidates :	20	27	12	5

	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 40
Candidats :	12	3	1	0
Candidates :	6	3	0	0

II.9 TEXTE DE L'EPREUVE DE PROBABILITES ET STATISTIQUES

INTRODUCTION

1° Soit $(\Omega , \mathcal{A})$ un espace mesurable et T un sous-ensemble de la droite réelle **R** ; on appelle fonction aléatoire réelle (en abrégé f.a.r.), construite sur $(\Omega , \mathcal{A})$ et T, toute application X de $T \times \Omega$ dans la droite réelle achevée $\overline{\mathbf{R}}(=[-\infty , +\infty])$, telle que, pour tout t de T l'application X_t définie par

$$(\forall \omega \in \Omega) \qquad X_t(\omega) = X(t, \omega)$$

soit mesurable de $(\Omega , \mathcal{A})$ dans $(\overline{\mathbf{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ (où $\overline{\mathcal{B}}$ désigne la tribu borélienne de $\overline{\mathbf{R}}$).

2° Soit P une probabilité sur $(\Omega , \mathcal{A})$; une f.a.r. X construite sur $(\Omega , \mathcal{A})$ et T est dite du second ordre relativement à P si et seulement si

$$(\forall t \in T) \qquad \int_\Omega (X_t)^2 dP < \infty$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur P, on pourra :

— dire plus brièvement que « X est du second ordre »;

— noter, pour toute variable aléatoire réelle (v.a.r.) Y définie sur $(\Omega , \mathcal{A})$, et intégrable par rapport à P $\quad E(Y) = \int Y\, dP$;

— noter m l'application de T dans **R** définie par $(\forall t \in T) \quad m(t) = E(X_t)$, et l'appeler moyenne de la f.a.r. X;

— dire que X est centré si $\forall t \in T \quad m(t) = 0$;

— noter K l'application de $T \times T$ dans **R** qui, à tout couple (s, t), associe la covariance des v.a.r. X_s et X_t et l'appeler covariance de la f.a.r. X;

— commettre l'abus de langage consistant à confondre l'espace des v.a.r. de carré intégrable et celui de leurs classes d'équivalence pour l'égalité P presque sûre (on le notera $L^2(P)$) .

3° On rappelle qu'un noyau symétrique de type positif sur un sous-ensemble T de **R** est une application n de $T \times T$ dans **R** telle que

(i) $\quad (\forall (s, t) \in T \times T) \qquad n(s, t) = n(t, s)$

(ii) pour toute fonction réelle a sur T nulle sauf sur un ensemble fini de points on a

$$\sum_{(s,t) \in T\times T} a(s)\ a(t)\ n(s, t) \geqslant 0.$$

I

Soit P une probabilité sur $(\Omega , \mathcal{A})$ et X une f.a.r. du second ordre construite sur $(\Omega , \mathcal{A})$ et T.

1° Vérifier que $K(s, t)$ est un noyau symétrique de type positif.

2° Pour toute fonction réelle a nulle sauf sur un ensemble fini de points de T, $\sum_{t \in T} a(t) X_t$ est une v.a.r. de carré intégrable; l'ensemble de ces variables forme un espace vectoriel $L(X, T)$. On appelle espace engendré par X, pour la loi P, la fermeture $H_P(X, T)$ de $L(X, T)$ dans $L^2(P)$ [s'il n'y a pas de risque de confusion on notera cet espace H_P]. On appelle f.a. gaussienne une f.a.r. du second ordre telle que $L(X, T)$ soit formé de variables de Laplace-Gauss (toujours pour la loi P). Vérifier que H_P est formé aussi de variables de Laplace-Gauss. Cet espace s'appelle l'espace gaussien engendré par X.

3° On suppose que : $\forall\, t \in T \quad m(t) = 0$.

a. Montrer que l'application $J : H_P \longrightarrow \mathbf{R}^T$ définie par

$$J(Z)(t) = E[Z\, X_t] \quad \text{est injective;}$$

b. Soit $\mathcal{H}(K, T)$ [en abrégé $\mathcal{H}(K)$] l'image de H_P par J. Montrer qu'on peut munir $\mathcal{H}(K)$ d'une structure d'espace de Hilbert telle que J soit un isomorphisme de H_P sur $\mathcal{H}(K)$ [application linéaire, inversible, préservant la norme]. On notera $< f, g >_{\mathcal{H}(K)}$ le produit scalaire de deux éléments f et g de $\mathcal{H}(K)$;

c. Soit $K(s, .)$ la fonction définie sur T par $t \rightsquigarrow K(s, t)$ montrer que la famille $[K(s, .)]_{s \in T}$ engendre $\mathcal{H}(K)$, et que,

$$\forall h \in \mathcal{H}(K) \qquad h(t) = < h, K(t, .) >_{\mathcal{H}(K)} .$$

En déduire en particulier que deux f.a.r. centrées construites sur le même ensemble d'indice T et ayant même covariance déterminent par l'intermédiaire de J le même espace de Hilbert.

4° Cette question consiste à démontrer la proposition suivante :

À tout noyau K symétrique de type positif sur T on peut associer un espace unique $\mathcal{H}(K, T) \subset \mathbf{R}^T$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\mathcal{H}(K, T)$ est un espace de Hilbert engendré par $[K(t, .)]_{t \in T}$

(ii) $\forall\, h \in \mathcal{H}(K, T) \quad h(t) = < h,\ K(t, .) >_{\mathcal{H}(K)}$

Un tel espace s'appelle l'espace autoreproduisant associé à K.

On pourra admettre cette proposition ou la démontrer en considérant l'espace vectoriel $\mathcal{H}_0$ engendré par $[K(t, .)]_{t \in T}$ et en vérifiant que si a et b sont non nulles sur un ensemble fini de points les fonctions

$$f = \sum_{s \in T} a(s)\, K(s, .) \quad \text{et} \quad g = \sum_{t \in T} b(t)\, K(t, .) \text{ sont telles que}$$

$$\sum_{s \in T} a(s)\, g(s) = \sum_{t \in T} b(t)\, f(t).$$ En déduire qu'on peut munir $\mathcal{H}_0$ d'un produit scalaire qui permet de définir $\mathcal{H}(K, T)$ par complétion.

5° *Exemples.*

a. Soit $T = \{1, 2, \ldots, n\}$. Décrire $\mathcal{H}(K)$ et donner une expression du produit scalaire correspondant;

b. soit $T = [a, b]$, σ donné $\neq 0$ et $K(s, t) = \sigma^2 \inf(s, t)$.

Montrer que $\mathcal{H}(K)$ est égal à

$$\left\{ f \in \mathbf{R}^T ; \exists f^* : \int_a^b [f^*(u)]^2\, du < \infty \text{ et } \forall\, t, f(t) = f(a) + \int_a^t f^*(u)\, du \right\}$$

muni du produit scalaire $< f, g >_{\mathcal{H}(K)} = \int_a^b f^*(u)\, g^*(u)\, du$.

II

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. On rappelle que deux mesures R et S sur $\mathcal{A}$ sont étrangères si $\exists\, A \in \mathcal{A} : R(A) = 0 = S(\complement A)$.

Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et Z un élément de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on notera $E_P^{\mathcal{B}}(Z)$ l'espérance conditionnelle de Z par rapport à $\mathcal{B}$ pour la probabilité P.

Soit X une f.a.r. gaussienne centrée construite sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et $\mathbf{R}_+$, et P une probabilité sur $\mathcal{A}$, on notera K la covariance de X pour P et H_P l'espace gaussien engendré par X dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que $\mathcal{A}$ est la tribu engendrée par $[X_t]_{t \in \mathbf{R}_+}$.

1° Soit $Y \in H_P$, Q_Y la mesure de densité $\exp\left[Y - \frac{1}{2} E_P(Y^2)\right]$ par rapport à P ; vérifier que Q_Y est une probabilité sur Ω telle que la f.a.r. X définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et $\mathbf{R}_+$ soit gaussienne pour Q_Y. Trouver sa moyenne m_Y et sa covariance K_Y. Soit $[Z_n]_{n \in N}$ une suite dans $L(X, T)$; vérifier que si $[Z_n]_{n \in N}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ elle l'est aussi dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, Q_Y)$ et réciproquement. Comparer les limites.

2° Soient sur $(\Omega, \mathcal{A})$ deux probabilités R et S absolument continues par rapport à une probabilité μ (on remarquera que R et S sont absolument continues par rapport à $\frac{R + S}{2}$), soient $\frac{dR}{d\mu}$ et $\frac{dS}{d\mu}$ les densités correspondantes.

a. Montrer que $\int \sqrt{\frac{dR}{d\mu}\,\frac{dS}{d\mu}}\, d\mu$ ne dépend pas de μ ; on notera cette quantité $\int \sqrt{dR\, dS}$;

b. Montrer que R et S sont étrangères si et seulement si

$$\int \sqrt{dR\, dS} = 0\,;$$

c. Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$; $R_{\mathcal{B}}$, $S_{\mathcal{B}}$ et $\mu_{\mathcal{B}}$ les restrictions de R, S et μ à $\mathcal{B}$. Exprimer $\dfrac{dR_{\mathcal{B}}}{d\mu_{\mathcal{B}}}$ et $\dfrac{dS_{\mathcal{B}}}{d\mu_{\mathcal{B}}}$ comme des espérances conditionnelles par rapport à $\mathcal{B}$. Montrer que

$$\int \sqrt{dR_{\mathcal{B}}\, dS_{\mathcal{B}}} \geqslant \int \sqrt{dR\, dS}$$

[on rappelle l'inégalité de Jensen : soit Y concave sur un domaine convexe $\mathcal{D}$ de R^n, soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire; pour toute sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$

$$E^{\mathcal{B}}\, Y(X_1, \ldots, X_n) \leqslant Y\left(E^{\mathcal{B}} X_1, \ldots, E^{\mathcal{B}} X_n\right)\Big].$$

3° Soit Q une deuxième probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que X soit gaussienne pour Q de même covariance que pour P, de moyenne

$m_Q(t) = \int X_t\, dQ$ et d'espace gaussien H_Q.

Soit $Z \in L(X, T)$.

a. Soit $\mathcal{B}$ la sous-tribu de $\mathcal{A}$ engendrée par Z : calculer

$$\int \sqrt{dP_{\mathcal{B}}\, dQ_{\mathcal{B}}}\ ;$$

b. Vérifier que si P et Q ne sont pas étrangères, il existe une constante C telle que :

$$\forall Z \in L(X, T) \quad \left|\int Z\, dQ\right| \leqslant C\, \|Z\|_2\ ;$$

en déduire que P et Q sont soit étrangères, soit équivalentes. Vérifier que si P et Q sont équivalentes : $m_Q \in \mathcal{H}(K)$, calculer dans ce cas $\dfrac{dQ}{dP}$.

4° On suppose qu'il existe un système orthonormal de fonctions a_i dans $\mathcal{H}(K)$ tel que $\quad m = \sum_{i=1}^{r} \theta_i a_i$, où $\theta_i \in \mathbf{R} \quad \forall i \in [1, \ldots, r]$.

Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ_i.

III

Soit X une f.a.r. du second ordre construite sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et T, de moyenne m et de covariance K pour une probabilité P. On suppose que $X(t, \omega) = m(t) + Y(t, \omega)$ de sorte que la loi P_m de X est complètement déterminée par m et par la loi P_0 de Y. On suppose qu'il existe r fonctions $a_i(t)$ dans $\mathcal{H}(K)$ telles que $m = \sum_{i=1}^{r} \theta_i a_i$ $(\theta_i \in \mathbf{R}\ \forall i)$ de sorte que m décrit le sous-espace M de $\mathcal{H}(K)$ engendré par la famille $[a_i]_{i=1,\ldots,r}$. On suppose connus P_0 et la famille a_i et on désire estimer une fonction f de m au moyen de X (f est à valeur dans $\overline{\mathbf{R}}$). Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P_m \quad m \in M)$ le modèle statistique correspondant. On supposera que $H_{P_m}(X, T) = H_{P_0}(X, T) \quad \forall m$ (on le notera H (X)), on notera J l'isomorphisme défini en I, 3°, *a*.

On dit que U est un Estimateur Linéaire Sans Biais de $f(m)$ [en abrégé ELSB] si $U \in H(X)$ et $E_m(U) = \int U dP_m = f(m) \quad \forall\, m \in M$.

On vérifiera que : $\forall U \in H(X)$ la variance de U ne dépend pas de m et on la notera var U.

On dit que U* est un Estimateur Linéaire Sans Biais de Variance Minimum [ELSBVM] de $f(m)$ si var U* $\leqslant$ var U pour tout U ELSB de $f(m)$.

1° *a.* Vérifier que $\forall\, V \in H(X) \quad E_m(V) = \langle m, J(V) \rangle_{\mathcal{H}(K)}$

b. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que f soit linéairement estimable sans biais.

c. Soit f linéairement estimable sans biais, montrer qu'il existe un unique ELSBVM $\hat{f}$ de f. Exprimer $\hat{f}$ au moyen de l'isomorphisme J et de l'opérateur de projection P^M de $\mathcal{H}(K)$ sur M.

2° Soit p un entier $p \geqslant r$. Soit $T = \{0, 1, \ldots, p\}$. On désigne par A la matrice $\{A_{ij} = \langle a_i, a_j \rangle_{\mathcal{H}(K)}\}$ et par a le vecteur de coordonnées a_i $(i = 1, \ldots, r)$. On suppose K et A inversibles.

a. Vérifier que θ_i est linéairement estimable sans biais;

b. Si A est la matrice identité trouver $\widehat{\theta}_i$ ELSBVM de θ_i;

c. Trouver $\widehat{\theta}_i$ dans le cas général (soit B une matrice telle que $B\,B^t = A^{-1}$, on pourra poser $\alpha = B\,a$; B^t désigne la matrice transposée de B).

3° On se replace dans les conditions de II, 4°; trouver un ELSBVM de θ_i.

IV

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P_\theta, \theta \in \Theta \subset R)$ un modèle statistique et μ une probabilité dominant P_θ pour tout θ de Θ, soit $p_\theta = \frac{dP_\theta}{d\mu}$, on suppose $p_\theta \in L^2(\mu)$. On dit que f est estimable sans biais s'il existe $U \in L^2(\mu)$ tel que $f(\theta) = E_\theta(U) = \int U\,dP_\theta \quad \forall\, \theta \in \Theta$. U^* est dit μ-efficace si $\|U^*\|_{L^2(\mu)} \leqslant \|U\|_{L^2(\mu)} \quad \forall\, U$ estimateur sans biais de f.

1° Soit $R(\theta_1, \theta_2) = \langle p_{\theta_1}, p_{\theta_2} \rangle_{L^2(\mu)}$. Vérifier que R est un noyau symétrique de type positif, décrire $\mathcal{H}(R)$. Soit $L^2(p_\theta, \theta \in \Theta)$ le sous-espace engendré par $[p_\theta]_{\theta \in \Theta}$ dans $L^2(\mu)$.

On notera encore J l'isomorphisme de $L^2(p_\theta, \theta \in \Theta)$ sur $\mathcal{H}(R)$.

2° Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit estimable sans biais. Trouver un estimateur sans biais μ-efficace de f.

3° Si $\mu = P_{\theta_0}$, que peut-on dire d'un estimateur P_{θ_0} efficace pour tout θ_0. Vérifier que si $\mu = P_{\theta_0}$, $1 \in \mathcal{H}(R)$ et $J(1) = 1$.

4° On se place dans les conditions de II, 4°;

$$\text{soit } \theta^0 = (\theta_1^0, \ldots, \theta_r^0) \text{ fixé et } \mu = P_{\theta^0}.$$

(de façon générale on notera θ_i la coordonnée d'ordre i du vecteur θ).

Calculer $R(\theta^1, \theta^2)$ et $\frac{\partial}{\partial u_i} R(u, v)\,[\theta^0, \theta]$ (dérivée de R prise au point (θ^0, θ)). Vérifier que

$$\frac{\partial}{\partial u_i} R(u, v)\,[\theta^0, \theta] = \left\langle \frac{\partial p_\theta}{\partial \theta_i}(\theta^0), p_\theta \right\rangle_{L^2(\mu)}.$$

En déduire un estimateur sans biais de variance minimum de θ_i.

V

Quand on observe un phénomène et qu'on veut estimer une fonction f on ne connaît généralement pas tout le passé de ce phénomène, il est intéressant de comparer l'estimation qu'on peut faire connaissant le passé de $-n$ à 0 à celle qu'on pourrait faire si on le connaissait depuis $-\infty$.

Si K un noyau symétrique de type positif sur $\mathbf{Z}$, $\mathcal{H}(K)$ l'espace autoreproduisant associé. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit $T_n = \{-n, \ldots, -1, 0\}$, soit K_n la restriction de K à T_n et soit $f \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{H}(K_n, T_n)$.

a. Soit H un espace de Hilbert, $[H_n]_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de sous-espaces fermés de H tels que

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad H_n \subset H_{n+1} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_n} = H\ ;$$

Soit $[Z_n]_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de H tels que $\forall\, m \leqslant n \quad P^{H_m}(Z_n) = Z_m$ (P^{H_m} désigne le projecteur de H sur H_m).

Montrer que si $\lim_{n \to \infty} \|Z_n\|^2 < \infty$, il existe $Z \in H$ tel que $\|Z_n - Z\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ et $Z_n = P^{H_n}(Z) \ \forall\, n$.

b. Soit H_n le sous-espace fermé de $\mathcal{H}(K)$ engendré par

$$[K(t, .)]_{t \in T_n}.$$

Montrer qu'il existe une suite $[f^{(n)}]_{n \in \mathbf{N}}$, telle que $\forall\, n \in \mathbf{N} \quad f^{(n)} \in H_n, \quad \forall\, t \in T_n \quad f^{(n)}(t) = f(t)$ et $f^{(m)} = P^{H_m}[f^{(n)}]$; en déduire que $f \in \mathcal{H}(K)$ si et seulement si $\lim_{n \to \infty} \|f\|_{\mathcal{H}(K_n, T_n)} < \infty$.

c. Soit f estimable linéairement sans biais sur Z et $\widehat{f}$ un ELSBVM de f. Soit $\widehat{f}_n$ un ELSBVM de f obtenu en ne considérant X que sur T_n, vérifier que $\widehat{f}_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \widehat{f}$ dans $\mathcal{H}(K)$.

II. 10 RAPPORT SUR L'EPREUVE DE PROBABILITES ET STATISTIQUES

II.10.1 THEME DU SUJET

Il s'agit de la théorie des noyaux reproduisants (ARONSJAHN 1954) et de ses applications à la statistique des processus gaussiens (PARZEW 1960). Certaines des démonstrations demandées se trouvent dans un cours de J. NEVEU (Montréal 1969).

II.10.2 *RESUME DE LA SOLUTION*

Il ne s'agit que d'indications relatives à certaines questions.

Partie I

1) Pratiquement une question de cours.

2) Il suffit de remarquer que $E(X_n) \to E(X)$ et $\sigma^2(X_n) \to \sigma^2(X)$ grâce à l'inégalité de Schwarz et de conclure en utilisant la convergence des fonctions caractéristiques et en identifiant les limites en loi et dans L^2.

3) a) Z, orthogonale dans H_P, à un système de générateurs constitué par $\{X_t,\ t \in \tau\}$, est nulle : donc $E(Z_1 X_t) = E(Z_2 X_t)$ entraîne $Z_1 = Z_2$.

b) Il suffit de transporter sur $J(H_P)$ la structure de H_P en posant $<f, g>_{\mathscr{H}(K)} = <J^{-1}f,\ J^{-1}g>_{H_P}$.

c) Comme $J(X_s) = K(S, \cdot)$ la famille $(K(S, \cdot), s \in T)$ engendre $J(H_P) = \mathscr{H}(K)$; $<h, K(t, \cdot)>_{\mathscr{H}(K)} = <J^{-1}(h), X_t>_{H_P} =$

$J \cdot J^{-1}(h)(t) = h(t)$.

L'espace vectoriel $\mathscr{H}o$ engendré par $K(S_o\ \cdot)$ est indépendant des processus de covariance K ainsi que la norme : sa fermeture pour cette norme est donc indépendante du processus de covariance K.

4) L'égalité à démontrer établit que $<f, g>_{\mathscr{H}_o} = \sum a(.s) g(s) =$ $\sum b(t) f(t)$ ne dépend pas de la représentation de f et g; comme $<f, g>_o$ ainsi défini est bilinéaire et positive (du fait que K est de type positif) il existe une inégalité de Schwarz : $|f(t)|^2 = |<f, K(t,.)>_{\mathscr{H}_o}|^2 \leqslant \|f\|_{\mathscr{H}_o} K(t,t)$ de sorte que $f = 0 \Rightarrow f \equiv 0$. On pouvait aussi vérifier que $<f, g>_{\mathscr{H}_0} = 0$ $\forall g \in \mathscr{H}_0$ entraîne $f = 0$ ce qui est immédiat puisque $f(t) = <f, K(t, \cdot)>_{\mathscr{H}_0}$.

Cette dernière inégalité, prolongée à $\mathscr{H}(K)$ permet d'identifier $\mathscr{H}(K)$ à un sous-ensemble de R^T.

a) $\mathscr{H}(K) = \left\{ f;\ \exists\, C_k(f) : f = \sum_1^n C_k(f)\, K(k, \cdot) \right\}$

si K^{-1} existe, $\mathscr{H}(K) = \mathbf{R}^n$ et $<f, g> = {}^t f\, K^{-1} g$

si rang $K = r$ $\mathscr{H}(K) \sim \mathbf{R}^r$ et $<f, g>$ est défini comme en 4.

b) le produit scalaire à considérer est $\frac{1}{\sigma^2}\left[\frac{f(a)\, g(a)}{a^2} + \int f^*(u) g^*(u)\, du\right]$

où $[a, b] \subset \mathbf{R}^+$.

Il suffit alors de vérifier que l'ensemble indiqué est un espace de Hilbert, engendré par $K(t, \cdot)$ tel que $h(t) = <h, K(t, \cdot)>_{\mathscr{H}(K)}$ ce qui est élémentaire.

Partie II

Faut-il rappeler que X est gaussienne réelle si et seulement si

$$E(\exp uX) = \exp\left\{\frac{u^2}{2} E(X^2) + u\, E(X)\right\} ?$$

1) Si $Z \in H_P$ $\int \exp u Z\, d\, Q_Y = E_P \left\{\exp\ uZ + Y - \frac{1}{2} E_P(Y^2)\right\}$,

comme $u Z + Y \in H_P$ cette expression est égale à

$\exp\left[\frac{u^2}{2} E_P(Z^2) + u\, E_P(ZY)\right]$ ce qui indique que pour Q_Y Z est gaussienne de moyenne $E_P(ZY)$ et de moment d'ordre deux $E_P(Z^2)$

En particulier $E_{Q_Y}(X_t) = m_Y(t) = E(X_t\ Y) = J(Y)$

$$E_{Q_Y}(X_t^2) = E_P(X_t^2) \text{ et } K_Y(s,t) = K(s,t)$$

Enfin $E_P(Z_n - Z_m)^2 = E_Q(Z_n - Z_m)^2 - (E_Q(Z_n - Z_m))^2$ et si

Z_n est de Cauchy dans $L^2(P)$ elle l'est dans $L^2(Q)$ et réciproquement. Il est immédiat d'identifier les limites.

2) a) Si B est la tribu engendrée par Z, l'image de P_B (resp Q_B) par Z pour P (resp Q) de sorte que

$$\int \sqrt{d P_B \, d Q_B} = \int_R \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[\exp -\frac{x^2}{2\sigma^2} \exp -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right]^{1/2} dx =$$

$$\exp\left(-\frac{m^2}{8\sigma^2}\right)^{1/2}$$

en posant $m = E_Q(Z)$, $\sigma^2 = E_P(Z^2) = E_Q(Z-m)^2$

b) Si P et Q ne sont pas étrangères $\int \sqrt{d P_B \, d Q_B} \geqslant \int \sqrt{dP\, dQ} = c > 0$

Donc $|m| \leqslant c\,\sigma$ soit $|\int Z\, dQ| \leqslant c \, \| Z \|_2$ dans $L(X,T)$.

$Z \mapsto \int Z\, dQ$ se prolonge à H_P en une forme linéaire bornée, il existe donc

W dans H_P tel que $\forall\, Z \in H_P \; <W, Z>_{H_P} = \int Z\, dQ$.

En particulier $m_Q = E_P(W X_t) \in \mathscr{H}(K)$.

Soit $Q_W = exp\,(W - \frac{1}{2} E_P W^2)$. P, Q_W fait de X une *f.a* gaussienne de

covariance K, d'espérance $J(W)$ et $\int exp\, X\, dQ = \int exp\, X\, dQ_W$

donc Q et Q_W coïncident

sur $B(H)$; ainsi $\frac{dQ}{dP} = exp\left[J^{-1}(m_Q) - \frac{1}{2} E \left([J^{-1}(m_Q)]^2 \right) \right]$.

4) Soit $T_i = J^{-1}(a_i)$, T_i est centrée réduite et $\frac{dQ}{dP} = exp \left[\sum_1^r \theta_i T_i - \frac{1}{2} \sum_1^r \theta_i^2 \right]$

T_i est donc estimateur du maximum de vraisemblance.

Partie III

$E_m(X_t - m(t))^2 = E_o(Y_t + m)^2 - m(t)^2 = K(t,t)$: *var* X_t est indépendant de m donc aussi *var* U, $\forall U \in H(X)$.

1) a) Comme $m \in \mathscr{H}(K)$, $E_m(X_s) = m(s) = <m, K(s,\cdot)>_{\mathscr{H}(K)} =$

$<m, J(X_s)>_{\mathscr{H}(K)}$, égalité qui s'étend à $H(X)$.

b) f est estimable sans biais si et seulement s'il existe $g \in \mathscr{H}(K)$: $f(m) = <m, g>_{\mathscr{H}(K)}$

c) $<m, g>_{\mathscr{H}(K)} = <m, P^M g>_{\mathscr{H}(K)}$ et $\hat{f} = J^{-1}(P^M g)$.

2) b) $\theta_i = <m, a_i>$ donc $\hat{\theta} = J^{-1}(a)$ $\left(\hat{\theta} = (\theta_i), a = (a_i) \right)$

c) α est une famille orthornormée dans $\mathscr{H}(R)$, or $m = {}^t\theta B^{-1} \alpha$ comme

J et P^M sont linéaires ${}^t\hat{\theta} B^{-1} = J^{-1}({}^t\alpha)$: $\hat{\theta} = J^{-1}(A^{-1}\alpha)$

3) $J^{-1}(a_i) = T_i$: on retrouve le maximum de vraisemblance.

Partie IV

2) f estimable sans biais $\Leftrightarrow f \in \mathscr{H}(R)$ et $\hat{f} = J^{-1}(f)$.

4) $$\frac{dP_\theta}{dP_{\theta^0}} = exp \left\{ \sum_1^r (\theta_i - \theta_i^0) T_i - \frac{1}{2} \left[\sum_1^r \theta_i^2 - \sum_1^r (\theta_i^0)^2 \right] \right\}$$

$$R(\theta^1, \theta^2) = exp \sum_1^r (\theta_i^1 - \theta_i^0)(\theta_i^2 - \theta_i^0) \text{ et}$$

$$\frac{\partial}{\partial u_i} R(u,v)[\theta^0, \theta] = \langle \frac{\partial p\theta}{\partial \theta_i}(\theta^0), P\theta \rangle_{L^2(\mu)}$$

par dérivation (à justifier) sous le signe intégral, ce qui signifie que $\frac{\partial}{\partial u_i}(R) \in \mathscr{H}(R)$

et que $J^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial u_i} R\right) = \frac{\partial p\theta}{\partial \theta_i}(\theta^0)$ de sorte que, de nouveau, $\hat{\theta}_i = T_i$.

Partie V

b) $f \in \mathscr{H}(K_n, T_n) \Leftrightarrow f(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} C_i^{(n)}(f)\, K(t_i, \cdot)$ sur T_n, soit

$f^{(n)} = \sum_{1}^{n} C_i^{(n)}(f)\, K(t_i, \cdot)$ sur T, $f^{(n)}$ satisfait aux conditions de l'énoncé

puisque si $m < n$, si $t_m \in T_m \subset T_n$.

$$< f^{(n)}, K(t_m, \cdot) > = f^{(n)}(t_m) = f(t_m) = f^{(m)}(t_m) = < f^{(m)}, K(t_m, \cdot) >$$

Ainsi $\|f\|_{\mathscr{H}(K_n, T_1)} = \|f^{(n)}\|_{\mathscr{H}(K_n, T_n)}$ est croissante avec n.

Alors si $f \in \mathscr{H}(K)$, $f^{(n)} = P\left[f \mid \mathscr{H}(K_n, T_n)\right]$ et

$$\|f\|_{\mathscr{H}(K_n, T_n)} \leqslant \|f\|_{\mathscr{H}(K)} < \infty$$

Si $\lim \|f\|_{\mathscr{H}(K_n, T_n)} < \infty$, il existe F dans $\mathscr{H}(K)$ tel que

$f^{(n)} = P\left[F \mid \mathscr{H}(K_n, T_n)\right]$ et,sur T_n, $< F, K(t, \cdot) > = F(t) = f(t)$,

donc $f \in \mathscr{H}(K)$.

II.10.3 OBSERVATIONS SUR LES COPIES DES CANDIDATS

L'impression dominante des correcteurs est que la plupart des candidats n'ont qu'une connaissance superficielle des notions élémentaires de la théorie des probabilités et qu'en particulier une écrasante majorité ignore la notion de mesure image et donc de loi de variable aléatoire.

Le problème contenait de nombreuses questions de géométrie élémentaire dans les espaces d'Hilbert destinées seulement à préparer, puis à exploiter les résultats purement probabilistes. Ces questions ont été traitées avec plus ou moins de rigueur et de maladresse. Dans les plus simples, il faut souvent déplorer un laisser-aller affligeant, conduisant parfois à un discours incohérent.

Dans les deux parties plus typiquement probabilistes, les candidats ont rivalisé d'imagination,de fantaisie : on confond variable aléatoire et fonctions déterministes,

espace de probabilité et espace où une variable prend ses valeurs ; bien des candidats ont cherché la densité de Radon-Nykodim d'une mesure sur Ω par rapport à une mesure sur $\mathbf{R}$! C'est vraiment là le point auquel il faudra s'attaquer sérieusement : il est illusoire de prétendre étudier une théorie sans en établir solidement les fondements ; s'il est probable que la plupart des candidats sont capables de définir une mesure image, il est manifeste qu'ils ont une totale inexpérience du maniement de cette notion.

Signalons maintenant les principales erreurs commises.

Partie I

1) Cette question est élémentaire, on a relevé cependant quelques erreurs grossières : de nombreux candidats se ramènent au cas d'un vecteur aléatoire et affirment alors que la matrice de covariance est «définie positive» sans d'ailleurs que le sens de cette expression soit bien clair. Certains essaient de grouper les termes par couples et ne s'aperçoivent pas qu'ils doublent les termes carrés, d'autres raisonnent par récurrence sans aucune correction, quelques-uns confondent covariance et corrélation, sans parler de ceux qui affirment que $\forall X, Y$ cov. $(X, Y) \geqslant 0$!

2) Beaucoup de candidats semblent avoir entendu dire que la limite en moyenne quadratique ou en loi de variables gaussiennes est gaussienne, bien peu malheureusement l'expriment avec la rigueur nécessaire à un énoncé de théorème. Parmi ceux qui essaient de faire la démonstration,beaucoup s'obstinent à passer par la convergence en loi et, pour les uns, affirment qu'elle est équivalente à la convergence ponctuelle des densités (sans se soucier d'ailleurs de son existence pour la mesure limite), pour les autres, se livrent à quelques trafics suspects sur un logarithme douteux de la fonction caractéristique. Enfin nombreux sont ceux qui affirment que la somme de deux variables gaussiennes est toujours gaussienne !

3) Une des questions la moins maltraitée , mais le plus souvent abordée maladroitement. Presque toujours le raisonnement conduisant à l'identité des espaces autoreproduisants associés à deux fonctions aléatoires de même covariance se décompose comme suit : les combinaisons linéaires de fonctions $K(S, \cdot)$ sont identiques donc aussi leur fermeture (sans préciser pour quelle norme !) ensuite on identifie d'une façon ou d'une autre les topologies.

4) Il y avait deux points à bien remarquer : d'une part une fonction f de $\mathscr{H}_0$ peut avoir plusieurs représentations et il importe que $<f, g>_{\mathscr{H}_0}$ ne dépende pas de cette représentation, d'autre part pour assurer que $<f, g>$ est un produit scalaire il faut vérifier que $<f, f> = 0 \Rightarrow f \equiv 0$. D'une façon générale ces points n'ont pas été abordés alors que certains essaient de vérifier que $<f, g> \geqslant 0 \ \forall f, g$!!

5) La première partie a le plus souvent donné lieu à des développements inutiles, alors que les candidats ne distinguaient pas les cas,suivant que K est inversible ou pas. Dans la deuxième partie, malheureusement entachée d'une erreur de transcription du produit scalaire, on rencontre plus de maladresses que d'erreurs.

Partie II

1) On a dit plus haut ce qu'il faut penser des erreurs monumentales rencontrées dans cette partie.

2) Ces questions sont souvent convenablement traitées.

4) Ceci devait constituer une prime pour les candidats ayant obtenu la forme de la densité en 3 b, il ne s'en est malheureusement pas trouvé !

Parties III, IV, V

Ces parties ont été souvent abordées et particulièrement par les candidats du type «grappilleur» qui croient rentables de traiter toutes les questions faciles de toutes les parties. On notera surtout des négligences et des imprécisions, nous n'en citerons que deux :

En III 1) a) la majorité des candidats affirme que $m = \mathrm{J}(1)$, sans s'assurer que $1 \in \mathrm{H}(\mathrm{X})$; aucun candidat n'a remarqué que J, défini comme en I.3, est défini à partir de la variable centrée de sorte que

$$\mathrm{J}(\mathrm{U})(t) = \mathrm{E}_{\mathrm{P}_0}(\mathrm{UX}_t) \text{ qui diffère de } \mathrm{E}_m(\mathrm{UX}_t).$$

II.10.4 OBSERVATIONS SUR LES COPIES DES CANDIDATES

Une fois de plus, il faut constater qu'un trop grand nombre de candidates abordent cette épreuve sans avoir de véritables connaissances en calcul des probabilités. Malgré la difficulté du sujet, il est inadmissible que, sur 337 copies, l'on en trouve 26 blanches, 92 qui méritent la note 0 et que, sur les 219 copies restantes, il n'y en ait que 113, soit à peine la moitié, qui sachent résoudre correctement la première question qui est pratiquement une question de cours.

Sur le plan de la forme, disons que trop de candidates prennent leur copie pour une feuille de brouillon et alignent des calculs qui n'aboutissent à aucun résultat. Une remarque concernant l'orthographe : les noms et les adjectifs semblent être devenus invariants au pluriel, les articles, eux, continuant à en prendre la marque !

Passons le problème en revue et signalons les principales erreurs commises.

Partie I

Nous avons déjà commenté la première question.

Dans la seconde, beaucoup de candidates perdent un temps fou à montrer un résultat classique que l'énoncé se contente de rappeler : $\mathrm{L}^2(\mathrm{P})$ est un espace vectoriel, donc $\mathrm{L}(\mathrm{X},\mathrm{T})$ aussi. Pour montrer que la limite (en m. q.) d'une suite de variables gaussiennes est elle-même gaussienne (éventuellement dégénérée, cela n'a été signalé qu'une fois), on cherche trop souvent sans précautions la limite de

la densité que l'on baptise parfois «fonction de répartition» ou «fonction caractéristique» pour les besoins de la cause. A signaler la rencontre fréquente d'une définition inhabituelle de la fonction caractéristique sous la forme

$$\Phi_{\mathrm{X}}(t) = \mathrm{E}(e^{2i\pi t\mathrm{X}}) \text{ ; les correcteurs l'ont admise.}$$

A la troisième question, l'injectivité est souvent partiellement ou mal démontrée et l'on trouve plusieurs fois l'argument suivant :

$$\mathrm{E}(\mathrm{ZX}_t) = 0 \Rightarrow \mathrm{ZX}_t = 0 \quad \mathrm{P}.p.p. !$$

Le transport de structure qui fait l'objet du (b) ne devrait pas donner lieu à des développements touffus : manque de connaissances en algèbre. En fait, quelques lignes suffisaient.

De même, la partie (c) était rapidement traitée si l'on avait bien compris (b). Mais on ignore souvent ce qu'est une famille génératrice d'un espace de Hilbert et l'on invoque de façon confuse les familles sommables.

La quatrième question était délicate. L'égalité demandée est en général bien traitée, le produit scalaire correctement défini, mais sa définition n'est justifiée que dans une copie car les candidates oublient que la décomposition suivant les générateurs n'est pas nécessairement unique. Une seule candidate a su montrer que le produit ainsi défini était séparant et la fin de la question, la complétion, est presque toujours escamotée.

Enfin, le premier exemple, très simple, aurait dû être traité correctement quand il a été abordé ; ce n'est malheureusement pas le cas. Le second était délicat et les insuffisances $(a \geqslant 0)$ et erreurs (sur le produit scalaire) de l'énoncé ne facilitaient pas la tâche.

Partie II

Le début de la première question (montrer que Q_{Y} est une probabilité sur Ω) aurait dû n'offrir aucune difficulté si les candidates avaient des idées claires sur les mesures et leurs densités ; ce n'est, hélas, le cas que de quelques-unes d'entre elles. La suite de la question, très difficile, n'a été traitée entièrement par aucune candidate. Tout au plus a-t-on récompensé quelques copies qui avaient des idées sur la démonstration.

A la deuxième question, de nouveau les lacunes en matière de théorie de la mesure et d'intégration apparaissent au grand jour : on écrit des densités sans s'occuper de savoir s'il y a absolue continuité, on met en dénominateur des densités qui risquent d'être nulles, on ne sait pas interpréter la nullité d'une intégrale... La partie (c), relative aux probabilités conditionnelles, est souvent bien vue, mais quatre candidates seulement se donnent la peine de montrer que l'application Y considérée est concave.

Enfin, les questions trois et quatre n'ont pratiquement été abordées par aucune candidate.

Parties III, IV, V

La troisième partie n'était pas difficile. Aussi, une bonne vingtaine de candidates ont-elles pu gagner des points en traitant correctement la première question et les deux premières parties de la seconde.

De même, les deux premières questions de la partie IV ont été bien traitées dans une quinzaine de copies.

Enfin, la question (a) de la cinquième partie a été correctement résolue dans huit copies ; mais il ne s'agissait pas d'une question proprement probabiliste et, peut-être, ce résultat assez classique était-il connu de certaines candidates. La question (b), par contre, n'a été que partiellement vue, et par quatre candidates seulement.

II.10.5 LES NOTES DES CANDIDATS (sur 40)

Nombre de copies corrigées : 528 — Moyenne : 7,9.
272 notes $\geqslant 7$; 184 notes $\geqslant 11$; 131 notes $\geqslant 13$.

Répartition des notes par classes d'amplitude 4 :

0	1 à 4	5 à 9	10 à 14	15 à 19	20 à 24	25 à 29	30 à 34	35 à 40
52	165	109	93	61	24	14	5	5

II.10.6 LES NOTES DES CANDIDATES (sur 40)

Nombre de copies corrigées : 337 — Moyenne : 7,5 (copies blanches exclues).
171 notes $\geqslant 4$; 119 notes $\geqslant 9$; 87 notes $\geqslant 13$; 69 notes $\geqslant 15$.
Répartition des notes par classes d'amplitude 5 :

0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35
92	67	48	43	37	19	3	2

III - ÉPREUVES ORALES

CANDIDATS

III.1 — REMARQUES GENERALES

- Comme les années précédentes, les candidats ont été répartis, en fonction des résultats de l'écrit, entre deux demi-jurys comprenant chacun une commission d'analyse et une commission d'algèbre. Une rotation des examinateurs a permis d'harmoniser les notes attribuées par ces deux demi-jurys.

- Les modifications du programme(d'ailleurs reconduites pour 1976)n'ont causé aucune difficulté. Dans le cas d'une leçon de probabilités couplée avec une leçon d'analyse — ce qui, en cette année d'innovation, était systématique — peu de candidats ont opté pour la première ; ceux qui l'ont fait ont d'ailleurs rarement eu à le regretter. Il va de soi que le jury se réserve le droit, pour les concours suivants, de coupler un sujet de mécanique et un sujet de probabilités, ou deux sujets concernant la même discipline.

- A plusieurs reprises, un candidat s'est vu refuser la possibilité d'utiliser un cours polycopié par les soins d'une université à l'usage exclusif de ses étudiants. Le jury tient à préciser à cette occasion qu'il n'a nullement l'intention de «figer» la préparation au concours, mais qu'il se doit de garantir l'égalité, au moins théorique, des chances des candidats. Il n'ignore d'ailleurs pas que les échecs de certains professeurs en exercice sont souvent dûs à leur isolement et à la difficulté qu'ils ont de bénéficier de la préparation que certains centres dispensent avec beaucoup d'efficacité, et il se félicite de l'initiative prise cette année par le C.N.T.E. d'organiser un séminaire de préparation à l'oral à l'intention de ceux des admissibles qui avaient suivi son enseignement.

- Enfin, sans anticiper sur les rapports techniques qui vont suivre, le président du jury croit devoir souligner l'importance des exercices dans l'enseignement des mathématiques et, par voie de conséquence, dans le déroulement du concours. Lorsqu'un candidat n'a prévu aucun exemple ni exercice dans son plan, il incite le jury à lui proposer les siens (en restant, bien entendu, dans le cadre du sujet traité). Loin de s'affoler, le candidat doit alors profiter de l'occasion qui lui est donnée de faire preuve de sang-froid et d'intuition ; il va de soi qu'on n'exige pas de lui la même virtuosité que s'il s'agissait d'une question préparée et que, dans certains cas, on admet volontiers qu'il ne fournisse qu'une partie de la solution.

Voici, à titre d'exemple, trois exercices proposés au cours d'exposés sur la divisibilité des polynômes, sur le théorème du point fixe et sur les notions d'application linéaire continue et de norme :

— **Pour tout polynôme** $P \in K[X]$, $P(P(X)) - X$ **est divisible par** $P(X) - X$.

— **Existence d'un couple $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ vérifiant :**

$$x = \frac{1}{4} \sin (x + y) \quad \text{et} \quad y = 1 + \frac{2}{3} \text{ Arc } tg (x - y)$$

— **Existence d'un réel M tel que, pour toute application f deux fois dérivable de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant**

$$\forall t \in \mathbf{R} \qquad f''(t) + ch\, t.\, f'(t) + sh\, t.\, f(t) = 0$$

On ait :

$$|f'''(3)| \leqslant \mathrm{M} \left(|f'(\pi)| + \int_2^4 |f(t)|\, dt \right)$$

III.2 — EPREUVE D'ANALYSE, MECANIQUE, PROBABILITES

III.2.1 OBSERVATIONS GENERALES

Le jury a constaté cette année que les candidats sont plus nombreux à avoir compris la nature des épreuves d'oral, c'est-à-dire plan, exposé et questions. Toutefois, proposer un seul point du plan pour l'exposé — ce qui est contraire aux dispositions réglementaires — ne peut que conduire le jury à demander l'exposé d'un autre point du plan que celui cité par le candidat. En outre, un certain nombre d'erreurs catastrophiques concernant les sujets et les plans amènent le jury à formuler les remarques suivantes, qui ont valeur de mise en garde :

- **Le respect du titre de l'exposé choisi doit être absolu.** Ainsi «Série de Taylor» n'est évidemment pas «Formules de Taylor»; «Fonctions implicites , Applications» n'est pas «Fonctions implicites» ; «Problèmes d'extremum » n'est pas «Applications du calcul différentiel aux problèmes d'extremum» etc. A ce propos, rappelons que le jury a la possibilité de modifier d'une année à l'autre les titres des sujets proposés aux candidats, et que des sujets dont les titres paraissent voisins peuvent se révéler en fait sensiblement différents. Il est donc recommandé aux candidats de ne pas essayer à tout prix de parler du sujet analogue qu'ils connaissent mieux, mais bien plutôt de bâtir un plan efficace autour du titre exact, laissant aux préliminaires et aux conséquences lointaines la place qui leur revient.

- Cette année encore, le jury est obligé de constater que la plupart des candidats ignorent le rôle fondamental que jouent les **exemples et contre-exemples** pour illustrer intelligemment une notion mathématique, et accessoirement aussi pour convaincre le jury que le candidat a assimilé le sujet qu'il a à traiter. Et, justement, dans de nombreuses leçons, on appelle expressément le candidat à construire son exposé à partir d'exemples («illustrer par des exemples la notion de ... » ou «exemples d'utilisation de ...»). Il est clair que, dans ce cas, il faut composer sa leçon autrement que sous la forme d'une liste de théorèmes recopiés dans un ouvrage (aussi bon soit-il !), et que le choix des exemples joue un très grand rôle dans l'appréciation du jury. Ne pas confondre, d'ailleurs, exemples et exercices : ainsi le théorème de Stone-Weierstrass est un exemple d'utilisation en analyse de la notion de compacité, l'étude de la série $(-1)^{\mathrm{E}(\sqrt{n})}/n$ (E = partie entière) un exemple d'utilisation de la «sommation par paquets», alors que : $\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \sqrt[n]{|\sin n|} = 1$ n'est qu'un exercice sur les suites ou les séries...

III.2.2. REMARQUES PARTICULIERES SUR CERTAINS SUJETS

- **Topologie et dénombrabilité : parties dénombrables denses, suites, suites extraites, suites de compacts...** Il s'agit typiquement d'un sujet de composition, qui ne se range pas parmi les plus faciles ; si le jury ne s'attend évidemment pas à ce que les candidats exposent tout ce qui concerne les rapports entre topologie et dénombrabilité dans le temps qui leur est imparti, il souhaite toutefois que soient abordé un certain nombre des points suivants : *espaces où tout point a une base dénombrable de voisinages* (suites extraites, continuité, etc.) ; plus particulièrement *espaces métrisables* (caractérisation des fermés ; tout fermé est un G_δ ; théorèmes de prolongement etc.) ; plus particulièrement encore, *compacts métrisables* (caractérisations ; leur topologie est à base dénombrable, donc séparable..., leur cardinal est au plus celui de $\mathbf{R}$ etc.) ; suites de parties d'un espace topologique : *suite d'ouverts* (topologies à base dénombrable...), *suite de fermés* (caractérisation des métriques complets ; espaces de Baire ; exemples de tels espaces ; sont bienvenues quelques-unes des utilisations bien connues de la propriété de Baire en analyse classique et en analyse fonctionnelle : théorème des isomorphismes de Banach, et de Banach-Steinhaus, dimension algébrique des Banach, fonctions de classe de Baire etc. etc.), *suites de compacts* (espaces localement compacts dénombrables à l'infini etc.) ; *suites de points* (suites croissantes dans $\mathbf{R}$, suites de Cauchy, limites inférieures ou supérieures de suites etc. ; ne pas oublier les suites de fonctions dans les espaces fonctionnels, les suites faiblement convergentes dans les espaces de Hilbert...) ; *espaces séparables* (par exemple, si $\mathbf{E}$ est un Banach, si $\mathbf{E}'$ est séparable, $\mathbf{E}$ l'est, etc.). Beaucoup d'autres points peuvent être également évoqués, *et les remarques ci-dessus ne sauraient en aucun cas être considérées comme exhaustives, ni comme imposé l'ordre dans lequel elles apparaissent.*

- **Illustrer par des exemples la notion d'application linéaire continue entre espaces vectoriels normés et la notion de norme de telles applications.** En plus des remarques générales faites au début du rapport sur ce genre de sujets, on peut indiquer que le jury souhaite avec cette nouvelle leçon entendre les candidats proposer des exemples de problèmes exprimés en termes d'analyse «classique» et dont la solution est simplifiée en introduisant des applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés. Ce genre de problème peut aller du théorème de Riemann-Lebesgue aux contre-exemples classiques en théorie des séries de Fourier, en passant par les équations intégrales.

- **Solutions, solutions maximales des équations différentielles** $y' = f(x, y)$. Ce sujet nouveau n'a évidemment pas été choisi souvent par les candidats. Il importe donc de préciser ce que le jury souhaiterait entendre. Tout d'abord, il n'est pas naturel de se limiter au cas où la fonction f n'est définie que sur un rectangle ouvert de $\mathbf{R}^2$, cas qui ne correspond pas aux problèmes concrets qui se posent en analyse. Ensuite il convient de bien préciser ce qu'est une solution, à savoir un couple (I, φ) constitué d'un intervalle I de $\mathbf{R}$, et d'une application dérivable φ de source I, tels que, pour tout x élément de I, le point $(x, \varphi(x))$ appartienne à l'ouvert de définition de f, et satisfasse à la relation $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$. On peut alors définir correctement la notion de solutions maximales et établir moyennant certaines conditions l'existence et l'unicité de telles solutions. Enfin, il est indispensable de donner des exemples illustrant les différents phénomènes qui peuvent apparaître. En particulier, les candidats doivent pouvoir étudier correctement le cas de l'équation : $y' = f(y)$, où f est une fonction continue sur un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ ne s'annulant par exemple qu'en un point de cet intervalle.

- **Etude sur des exemples d'équations différentielles de la forme** $\mathrm{F}(x, y, y') = 0$
Le candidat n'est évidemment pas tenu de traiter tous les cas «classiques», et il doit en particulier éviter une liste fastidieuse de calculs à peine ébauchés.
Il est plus intéressant en effet de dégager les idées conduisant aux réductions du problème : paramétrages, invariants, transformations, etc. Des exemples de nature géométrique sont souvent fructueux ; c'est le cas quand des remarques faciles sur la figure fournissent un fil conducteur, que l'on peut suivre jusqu'à la présentation finale du résultat. Il faut évidemment d'autre part, sur les exemples proposés, ne pas se contenter de la solution générale, mais aussi savoir expliquer les intégrales singulières, les recollements, les «solutions parasites», et, selon les définitions adoptées, distinguer les solutions des courbes intégrales. Rappelons enfin qu'il s'agit d'une leçon d'exemples : il appartient au candidat de choisir et de présenter ces exemples pour qu'ils soient les plus instructifs possible.

- **Sous-variétés différentiables de dimension 1 ou 2 de** $\mathbf{R}^2$ **ou** $\mathbf{R}^3$. **Espace tangent. Exemples.** Dans cet exposé, les candidats ne doivent pas se limiter aux définitions de sous-variété et d'espace tangent. Quelques exemples et contre-exemples traités clairement mettront bien en évidence les vraies difficultés. Il est souhaitable d'aborder les problèmes d'intersection de sous-variétés, de courbes tracées sur une «surface», et il est possible d'envisager ceux de «contour apparent», orientation, extrèma liés...
Le problème de la position d'une surface par rapport à son plan tangent gagne à être traité par des méthodes conduisant à des calculs pratiques. Si l'on juge utile d'énoncer le lemme de Morse, il paraît normal d'en tirer des conséquences plus sérieuses : intersection avec le plan tagent, comparaison des ensembles de niveaux etc.

- **Systèmes de coordonnées curvilignes. Applications diverses.** Si, conformément au programme, on ne peut exiger des candidats de dominer les notions de variété et de systèmes de coordonnées locales, le jury souhaite toutefois que ceux-ci sachent donner une définition correcte des systèmes de coordonnées curvilignes servant à paramétrer un ouvert de $\mathbf{R}^n$, utilisés couramment en physique par exemple. Le

problème du passage d'un système à un autre est alors l'occasion d'utiliser le théorème d'inversion locale. Les candidats doivent connaître les précautions qu'il convient de prendre pour manier de tels systèmes, en particulier pour les coordonnées polaires et les coordonnées sphériques. Enfin il est indispensable que des exemples illustrent ce genre de manipulations qui permettent de faire «qu'en passant en tel ou tel système de coordonnées les équations du problème prennent la forme plus simple suivante...». Les changements de variables dans les intégrales multiples, illustrés par des exemples aussi concrets qu'usuels trouvent aussi naturellement leur place dans ce sujet.

- **Exposés de théorie des probabilités.** Pour la première fois, des sujets de probabilité ont été proposés aux candidats. Les notes obtenues ont montré qu'il n'est pas nécessaire d'être un spécialiste pour faire un bon exposé de probabilités. En tout cas, le jury souhaite un équilibre entre les développements théoriques, les exemples et la mise en évidence d'applications ; les propositions d'exposés ne devraient pas se réduire à la preuve d'un corollaire théorique, mais concerner plutôt le passage de définitions premières à un théorème de base. Il est désagréable par exemple de voir centrer la notion d'indépendance sur celle d'indépendance de tribus, et de constater que la mise en œuvre par le candidat de la moindre application ne fait intervenir que les densités de la loi conjointe et de ses lois marginales. Par ailleurs, un candidat a donné quatre définitions différentes de l'espérance (espérance de X, de $\varphi(\mathrm{X})$, ...) sans se soucier d'en vérifier la compatibilité...
La leçon sur le conditionnement fait intervenir plusieurs notions : probabilité conditionnelle d'un événement, espérance conditionnelle d'une variable aléatoire, densités conditionnelles... . Il est souhaitable de faire apparaître les liens entre ces notions et d'en donner des applications. On peut encore signaler que les théorèmes d'addition de variables aléatoires indépendantes peuvent être illustrés par des applications aux lois usuelles (lois du (0,1), lois normales, lois de Poisson...) et éventuellement à des processus simples, tels que les marches aléatoires par exemple.

- **Exposés de cinématique.** Les exposés de cinématique ne sauraient être abordés avec un esprit de moindre rigueur ; toute notion que le candidat juge bon d'introduire doit être définie avec précision, quel que soit le point de vue adopté : point coïncident, espace mobile, mouvement de solide, base, roulante etc. ; la théorie doit être correctement développée et illustrée par des exemples explicites et pratiques et des contre-exemples ; c'est à ce prix que l'on évite les plans squelettiques ou incorrects.
Il est souhaitable, dans différentes leçons et indépendamment de la présentation choisie, que le candidat fasse nettement ressortir qu'étudier le champ des vitesses dans un mouvement de solide, c'est essentiellement étudier la dérivée d'une application $t \mapsto u(t)$, qui à t associe une isométrie affine directe. De même l'étude de la composition des mouvements est essentiellement celle de la dérivée première [et seconde] d'une application $t \mapsto u(t).\, m(t)$, à laquelle on peut appliquer des théorèmes généraux de calcul différentiel ; on saura alors préciser les hypothèses adoptées, et les théorèmes mis en cause ; on pourra même savoir, avant d'être interrogé par le jury, s'il peut se faire qu'il y ait un rapport entre la composition des mouvements et la notion générale de composition des applications !

L'exposé «Mouvement d'un plan sur un plan» a été l'occasion de trop lourdes erreurs pour qu'un commentaire particulier ne soit nécessaire ; il est intolérable d'entendre des candidats affirmer (et même proposer à la démonstration) que la roulante est, soit un point fixe du plan mobile, soit une courbe isométrique à la base... . En application des remarques précédentes, il importe de définir très précisément les notions de centre instantané de rotation, base, roulante, et des exemples effectifs sont les bienvenus. Si l'on parle de la cycloïde, ce ne peut être seulement pour en rattacher la définition à un mouvement plan sur plan : les tangentes, les rebroussements donnent lieu à des remarques cinématiques ; en outre, il existe d'autres courbes cycloïdales que la cycloïde, qui fournissent des exemples fructueux et pour lesquelles des remarques analogues s'imposent.

Il peut être intéressant de pousser plus loin l'étude du mouvement dans le cas général : cercle des inflexions, formule d'Euler-Savary, alignement de centres instantanés de rotation, etc. et de donner de ces nouveaux résultats quelques applications pratiques. Il peut aussi être intéressant de donner des conséquences géométriques variées : repère de Frênet, podaires, conchoïdes, etc., et de proposer quelques problèmes d'enveloppes. Une dernière recommandation est qu'il est bon, avant d'être sollicité par le jury, d'avoir réfléchi aux problèmes soulevés par l'emploi de symboles du type $\frac{d}{d\theta}$, où, comme le disent nombre de candidats, « θ est un angle»...

III.2.3. LISTE DES SUJETS D'ANALYSE, DE MECANIQUE ET DE PROBABILITES

1. *Applications à l'analyse de la notion de compacité.*
2. *Applications à l'analyse de la notion de connexité.*
3. *Théorème du point fixe. Applications.*
4. *Espaces métriques complets ; espaces métriques compacts ; comparaison des deux théories.*
5. *Espaces vectoriels normés ; espace de Banach. Sous-espaces denses.*
6. *Illustrer par des exemples la notion d'application linéaire continue entre espaces vectoriels normés et la notion de norme de telles applications.*
7. *Espace vectoriel normé de dimension finie.*
8. *Une construction de* $\mathbf{R}$ *et ses principales propriétés.*
9. *Une construction du corps des nombres réels étant acquise, donner différentes caractérisations de* $\mathbf{R}$.
10. *Topologie de la droite numérique* $\mathbf{R}$ *. Droite numérique achevée.*
11. *Propriétés topologiques de* $\mathbf{R}^n$ *et leur utilisation en analyse.*
12. *Limites.*
13. *Applications continues.*
14. *Suites de nombres réels.*

15. *Limite, limite inférieure, limite supérieure de suites numériques.*
16. *Approximation d'un nombre réel par des rationnels. Fractions continues.*
17. *Topologie et dénombrabilité : parties dénombrables denses, suites, suites extraites, suites de compacts...*
18. *Etude sur des exemples de suites définies par une relation de récurrence.*
19. *Fonction réelle d'une variable réelle : continuité, dérivabilité...*
20. *Fonctions à variation bornée. Fonctions croissantes. Applications diverses.*
21. *Fonctions réciproques.*
22. *Fonctions implicites. Applications.*
23. *Fonctions convexes d'une ou plusieurs variables réelles.*
24. *Prolongement des fonctions. Exemples.*
25. *Fonction différentiable.*
26. *Fonction de plusieurs variables réelles : formule des accroissements finis, formule de Taylor...*
27. *Applications de classe* C^k d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$.
28. *Les différentes formules de Taylor.*
29. *Problèmes d'extremum.*
30. *Applications des formules des accroissements finis et de Taylor aux problèmes de calcul numérique.*
31. *Comparaison des fonctions au voisinage d'un point.*
32. *Applications de la méthode des développements limités ou asymptotiques.*
33. *Fonction logarithme, fonction exponentielle d'une variable réelle.*
34. *Fonction exponentielle complexe.*
35. *Extensions de la notion de fonction exponentielle.*
36. *Fonctions circulaires directes et réciproques.*
37. *Séries à termes réels ou complexes. Exemples.*
38. *Illustrer par des exemples et contre-exemples la théorie des séries à termes réels.*
39. *Opérations sur les séries à termes réels ou complexes.*
40. *Continuité, dérivabilité, intégralité de la somme d'une série de fonctions d'une variable réelle.*
41. *Les différentes notions de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions. Exemples.*
42. *Exemples d'utilisation du critère de convergence de Cauchy (suites, séries, fonctions...).*
43. *Exemples de problèmes d'interversion de limites.*
44. *Séries entières.*

45. *Méthodes de développement d'une fonction en série entière. Exemples.*

46. *Série de Taylor.*

47. *Fonction* $x \mapsto e^{ix}$ *de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{C}$ *; nombre* π *; module et argument d'un nombre complexe.*

48. *Le nombre* π.

49. *Nombre irrationnels. Nombres transcendants.*

50. *Solutions, solutions maximales des équations différentielles* $y' = f(x, y)$.

51. *Equations différentielles linéaires ; exemples.*

52. *Systèmes différentiels linéaires à cœfficients constants ; exemples.*

53. *Equations différentielles linéaires à cœfficients constants ; exemples.*

54. *Etude sur des exemples d'équations différentielles de la forme* $F(x, y, y') = 0$.

55. *Sous-variétés différentiables de dimension un et deux de* $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$. *Espace tangent. Exemples.*

56. *Etude locale des courbes : propriétés métriques. Exemples.*

57. *Tracé des courbes* $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{f}(t)$. *Exemples.*

58. *Tracé des courbes* $\rho = f(\theta)$. *Exemples.*

59. *Rectification des courbes planes ; courbure ; développée ; développantes.*

60. *Rectification des courbes planes ; courbure ; recherche des courbes dont la courbure algébrique est une fonction donnée de l'arc.*

61. *Courbure et torsion des courbes en géométrie euclidienne de dimension 3 ; recherche des courbes dont la courbure et la torsion sont des fonctions données de l'arc.*

62. *Systèmes de coordonnées curvilignes. Applications diverses.*

63. *Mouvement à accélération centrale.*

64. *Mouvement relatif ; changement de repère ; applications.*

65. *Cinématique du solide.*

66. *Mouvement d'un repère orthonormé ; applications à la théorie métrique des courbes gauches et à la cinématique du solide.*

67. *Mouvement d'un plan sur un plan.*

68. *Exemples de méthodes de calcul approché d'une fonction.*

69. *Exemples de lois de distribution.*

70. *Lois de variables aléatoires. Notion d'indépendance.*

71. *Probabilités conditionnelles et événements indépendants.*

72. *Mesures de probabilités, notamment prolongement, produit, image... Exemples.*

73. *Loi faible des grands nombres. Enoncé et exemples d'utilisation d'un théorème de convergence vers la loi normale.*

74. *Le jeu de pile ou face.*

75. *Le conditionnement en théorie des probabilités. Exemples.*

76. *Illustrer par des exemples l'intégration des variables aléatoires : valeur moyenne, variance, inégalités...*

III. 3 – EPREUVE D'ALGEBRE, GEOMETRIE

III.3.1. OBSERVATIONS GENERALES

- Le temps qui est alloué au candidat pour présenter son étude ne doit pas être gaspillé. S'il est indispensable de bien situer le cadre de l'exposé, il est inutile de faire des introductions trop longues. Le jury veut avoir le temps de tester la culture du candidat sur les questions du programme en rapport avec l'énoncé. Par ailleurs, il faut traiter correctement l'essentiel de la question proposée avant de se permettre des extensions, aussi intéressantes soient-elles ; et le choix proposé au jury pour l'exposé doit porter sur les théorèmes importants du sujet et non sur des questions annexes. Ce n'est pas non plus le nombre de théorèmes cités qui importe : même lorsque les preuves complètes ne sont pas demandées, le schéma doit en être connu du candidat.

- Dans les questions pouvant mettre en jeu une certaine variété d'hypothèses, il est bon de les formuler précisément, et de prévoir des contre-exemples mettant en valeur leur bien-fondé : finitude pour les espaces vectoriels, commutativité, existence d'un élément unité, intégrité pour les anneaux, etc.

- L'étude de la géométrie semble trop délaissée. Pourtant les théories générales (qui en sont parfois issues !) y trouvent un large champ d'applications concrètes. Toute étude géométrique est inséparable de la notion de groupe opérant sur un ensemble.

III.3.2. REMARQUES PARTICULIERES SUR CERTAINS SUJETS

- **Groupes.** La conjugaison dans un groupe est conçue de manière trop abstraite : de l'origine géométrique d'une relation du type $x \mapsto u x u^{-1}$ devrait découler à l'évidence que deux cycles de même longueur dans $\mathcal{S}_n$ sont conjugués. Les théorèmes d'isomorphisme sont souvent cités incomplètement.

- **Anneaux.** Les candidats changent de conventions à leur gré sans préciser. Le jury n'exige pas des hypothèses minimales, mais précises. A défaut de théorie générale, des exemples concernant des anneaux non commutatifs (produits de tels anneaux, anneaux de matrices) pourraient être cités.

  Les notions de *pgcd*, de *ppcm* n'ont pas cours uniquement dans les anneaux principaux, mais dans $K[X,Y]$ par exemple, et ceci justifie une définition générale.

A propos des corps, on peut signaler l'abus trop commode de référence à une clôture algébrique, dans des cas où une extension finie suffit.

Les propriétés des polynômes dérivés ne doivent pas être limitées au cas d'une variable, et la dérivation des polynômes composés doit être traitée.

- **Sous-espaces vectoriels.** A se restreindre aux espaces de type fini, il faut mettre l'accent sur le fait que les sous-espaces le sont aussi. Dans une optique plus vaste, utilisant le théorème de Zorn, l'existence de supplémentaires peut être mise directement en évidence, et les décompositions en sommes directes de droites en résultent. On conçoit mal par ailleurs une leçon sur les sous-espaces qui n'utilise pas la dualité, et, au moins en dimension finie, des équations.

- **Réduction des endomorphismes, et sous-espaces stables.** Les énoncés du théorème de Jordan restent souvent une formalité, et des critères de similitude n'en sont pas dégagés.

  L'étude des sous-espaces stables ne doit pas être limitée à celle des sous-espaces propres, ni même de ceux qui conduisent à une réduction de la matrice. Il est choquant de voir qu'un endomorphisme et son transposé ne soient pas étudiés de pair : il est aussi facile d'obtenir les hyperplans stables que les droites propres.

  La leçon relative au cas réel a toujours été mal comprise. Un rappel des propriétés valables lorsque le polynôme minimal est scindé, ne suffit pas. Il existe toujours des plans, et des sous-espaces de dimension 2, qui soient stables, et parfois une décomposition en somme directe de droites et plans stables. Cette leçon montre clairement que le «complexifié» n'est pas conçu de manière intrinsèque, et qu'on sait mal l'utiliser.

- **Formes quadratiques.** Les candidats définissent formellement une application linéaire de l'espace dans son dual, liée à une forme bilinéaire symétrique f, et oublient d'utiliser sa restriction à un sous-espace pour connaître la dimension de son f-orthogonal.

- **Déplacements, similitudes.** Les formes canoniques, et les invariants sont mal dégagés : angle d'une similitude directe dans le plan, coefficients des matrices de SO (2) qui figurent dans les décompositions en blocs de matrices orthogonales d'ordre quelconque.

- **Calcul barycentrique.** Des énoncés incluant le cas où la somme des masses est nulle doivent être donnés, en particulier pour la question d'associativité.

- **Inversion.** La nature des angles prétenduement conservés par l'inversion doit être précisée : angles orientés ou non, de droites ou de demi-droites ?

III.3.3. LISTE DES SUJETS D'ALGEBRE ET DE GEOMETRIE

1. *Structures algébriques quotients.*

2. *Groupes quotients.*
3. *Homorphismes de groupes.*
4. *Systèmes de générateurs d'un groupe.*
5. *Exemples de groupes. (la théorie des groupes est supposée connue).*
6. *Groupes cycliques.*
7. *Groupe symétrique.*
8. *Groupe opérant sur un ensemble.*
9. *Homomorphismes d'anneaux.*
10. *Exemples d'anneaux (la théorie des anneaux est supposée connue ; on ne considèrera que des anneaux avec élément unité).*
11. *Idéaux d'un anneau à élément unité.*
12. *Exemples de corps.*
13. *Sous-corps. Corps premiers. Caractéristique.*
14. *Corps des nombres complexes.*
15. *Algèbres sur un corps commutatif.*
16. *Divisibilité dans un anneau commutatif intègre.*
17. *Identité de Bezout ; applications.*
18. *Anneaux euclidiens.*
19. *Anneau des classes résiduelles modulo* n *dans* $\mathbf{Z}$.
20. *Plus grand diviseur commun. Plus petit multiple commun.*
21. *Nombre premiers.*
22. *Numérations ; approximations.*
23. *Dérivation des polynômes.*
24. *Valeurs d'un polynôme à une ou plusieurs indéterminées (la théorie des polynômes est supposée faite).*
25. *Racines d'un polynôme ; multiplicité d'une racine.*
26. *Polynômes symétriques.*
27. *Résultant de deux polynômes ; applications (élimination).*
28. *Divisions dans une algèbre de polynômes sur un corps commutatif.*
29. *Divisibilité dans une algèbre de polynômes sur un corps commutatif.*
30. *Fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Décomposition (la théorie du corps des fractions d'un anneau intègre est supposée connue).*
31. *Bases d'un espace vectoriel.*
32. *Sous-espaces d'un espace vectoriel.*
33. *Dualité en algèbre linéaire.*

34. *Notion de rang en algèbre linéaire.*

35. *Notion de déterminant.*

36. *Applications des déterminants.*

37. *Calcul matriciel.*

38. *Systèmes d'équations linéaires.*

39. *Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.*

40. *Sous-espaces propres d'un endomorphisme.*

41. *Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme. Applications.*

42. *Polynôme caractéristique d'un endomorphisme.*

43. *Polynôme minimal d'un endomorphisme.*

44. *Réduction d'un endomorphisme d'un* $\mathbf{R}$ *– espace vectoriel de dimension finie.*

45. *Complexification d'un espace vectoriel réel, d'une application linéaire. Applications.*

46. *Réduite de Jordan d'une matrice carrée sur un corps algébriquement clos.*

47. *Formes bilinéaires.*

48. *Forme bilinéaire alternée. Groupe symplectique.*

49. *Formes quadratiques.*

50. *Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension* n.

51. *Groupe unitaire d'un espace vectoriel hermitien de dimension* n.

52. *Dualité dans les espaces euclidiens.*

53. *Dualité dans les espaces hermitiens.*

54. *Produit mixte et produit vectoriel dans un espace euclidien orienté de dimension 3.*

55. *Problèmes d'angles en géométrie métrique.*

56. *Barycentres ; applications (la théorie des espaces affines est supposée connue)*

57. *Problèmes de géométrie affine.*

58. *Convexité dans les espaces affines réels ; applications.*

59. *Groupe affine (dimension finie).*

60. *Projections vectorielles et affines.*

61. *Symétries.*

62. *Distance entre deux sous-espaces d'un espace affine.*

63. *Isométries d'un espace affine euclidien de dimension* n. *Déplacements. Antidéplacements.*

64. *Formes réduites des isométries d'un espace affine euclidien de dimension inférieure ou égale à 3.*

65. *Exemples de groupes d'isométries laissant globalement stable une partie d'un espace affine euclidien de dimension 2 ou 3.*

66. *Similitudes planes directes et indirectes.*

67. *Inversion plane.*

68. *Transformations de la droite projective complexe définies par*

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\ ,\ z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}\quad (ad-bc \neq 0)$$

Groupe circulaire du plan.

69. *Espaces projectifs.*

70. *Liaison entre espaces affines et espaces projectifs. Eléments à l'infini.*

71. *Droite projective. Homographies ; involutions.*

72. *Torseurs.*

73. *Dualité dans les espaces projectifs.*

74. *Pôles et polaires.*

75. *Quadriques dans un espace projectif de dimension* n.

76. *Propriétés projectives des coniques non dégénérées.*

77. *Propriétés affines des coniques.*

78. *Propriétés métriques des coniques.*

79. *Groupe linéaire.*

IV - ÉPREUVES ORALES

CANDIDATES

IV. 1 — REMARQUES GENERALES

Les candidates sont invitées à relire attentivement les rapports antérieurs — notamment celui qui concerne le concours de 1974 : les conseils qu'ils renferment restent valables, mais ils ne sont pas tous rappelés dans le présent rapport.

Les modalités des épreuves orales semblent désormais familières aux candidates — en particulier à celles qui ont bénéficié d'une préparation méthodique.

Les plans proposés sont généralement satisfaisants mais les exposés, trop souvent, témoignent d'un manque d'assurance et nécessitent une aide excessive du jury.

L'entretien qui termine l'épreuve en constitue la phase décisive. Il permet au jury d'asseoir définitivement son jugement quant à la solidité des connaissances et aux facultés de réflexion des candidates. Il est fatal aux esprits superficiels dont les carences, à propos de questions souvent fort élémentaires, laissent de bien fâcheuses impressions. Pour s'y préparer, dans de bonnes conditions, les candidates seraient bien avisées, avant de se présenter au jury, de prévoir certaines explications complémentaires ou quelques contre-exemples et exercices susceptibles de mettre en valeur les définitions et résultats essentiels.

IV. 2 — EPREUVE D'ANALYSE, MECANIQUE, PROBABILITES

IV.2.1. OBSERVATIONS GENERALES

Trop souvent, les résultats intéressants que comporte le plan de la leçon, ou bien ne sont pas proposés et la candidate offre au jury des sujets dont la banalité le déçoit, ou bien ont été insuffisamment préparés et l'exposé consiste alors à combler des lacunes et à corriger de trop nombreuses fautes de raisonnement.

Comme il l'a déjà rappelé, le jury reste sensible à la présentation ; il apprécie, en particulier, les exposés conduits avec aisance, sans le secours de notes, et regrette la désinvolture — sans doute involontaire — de certaines candidates dont les négligences matérielles — au plan de l'élocution et de l'écriture — ne manqueraient pas de décourager les auditoires les plus indulgents.

IV.2.2. REMARQUES PARTICULIERES

Certaines leçons sont naturellement liées à la partie du programme des épreuves écrites qui concerne les fonctions holomorphes (séries entières, logarithme complexe, compacité (Ascoli et familles normales)). Le jury souhaite que ce lien soit mis en évidence. Aussi ne manque-t-il jamais de relever les omissions dans ce domaine. Il constate alors, trop souvent, que des résultats élémentaires (formule de Cauchy, prolongement analytique, zéros isolés) sont, depuis les épreuves écrites, tombés dans l'oubli. D'autres leçons (probabilités, géométrie différentielle, cinématique) utilisent une terminologie dont la résonance intuitive ne saurait dispenser des définitions précises des mots utilisés (convergence en loi, courbe, arc, orientation,...).

Une leçon d'exemples ne consiste pas, exclusivement,à énoncer des théorèmes généraux. Dans la leçon intitulée : **«Exemples d'espaces compacts»**, l'énoncé du théorème de compactification d'Alexandroff devrait être suivi de la présentation explicite des compactifiés de certains espaces simples — $\mathbf{R}^n$, par exemple. Il est naturel de comparer le compactifié de $\mathbf{R}$ à $\overline{\mathbf{R}}$. D'une manière analogue, à propos de la présentation d'exemples d'espaces vectoriels normés, la définition du dual topologique devrait être accompagnée de la détermination du dual de chacun des espaces simples tels que l^1, l^p... . Peu de candidates signalent le cas particulier des espaces de Hilbert. Cette année, la leçon intitulée : **«Etude, à partir d'exemples, des méthodes de résolution d'équations différentielles du premier ou du second ordre»** a été mieux comprise. Néanmoins, rappelons qu'il ne s'agit pas de choisir, avec plus ou moins de bonheur, une dizaine d'exemples, mais, essentiellement, de bien préciser ce qu'est une solution et de montrer, sur une ou deux équations bien choisies, que les méthodes utilisées fournissent toutes les solutions d'un type de régularité imposé (être de classe C^1, C^2, analytique,...).

IV.2.3. REMARQUES CONCERNANT CERTAINES LECONS

- **Suites récurrentes définies par** $u_{n+1} = f(u_n)$ (f **est à valeurs dans** $\mathbf{R}$). Il est essentiel de dégager la notion de point fixe (a tel que $a = f(a)$), «attractif» (en particulier si $|f'(a)| < 1$), respectivement «répulsif» (en particulier si $|f'(a)| > 1$). Le jury apprécierait l'étude d'un cas où $|f'(a)| = 1$, ainsi que celle d'un développement asymptotique de $(u_n - \lim u_n)$ (consulter par exemple l'ouvrage de Polya-Szego dans le cas non trivial où $f'(a) = 1$).Les exemples ne devraient pas être limités au seul cas où f' conserve un signe constant : le cas où $f'(a) = 0$ ne manque pas d'intérêt.

- **Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.** S'il convient de savoir rappeler les définitions d'objets algébriques tels que : sous-espaces caractéristiques, polynôme minimal..., il ne faut pas, pour autant, oublier qu'il s'agit d'une leçon d'analyse dans laquelle, la convergence de la série définissant exp A, le comportement à l'infini des solutions doivent, tout naturellement, trouver leurs places. Peu de candidates ont le souci de préciser qu'elles ont bien obtenu toutes les solutions, même dans le cas banal $y' = ay$. Dans le cas d'un système homogène, il convient de mettre clairement en évidence l'isomorphisme vectoriel de l'espace des conditions initiales vers celui des solutions dont on dégage ainsi la dimension. On songe rarement à comparer le polynôme caractéristique d'une équation différentielle linéaire, à cœfficients constants, d'ordre n, au polynôme minimal du système, d'ordre 1, associé.

- **Logarithme complexe.** Définir une détermination continue du logarithme ou celle de l'argument sont des problèmes équivalents ; il est donc inadmissible de ne pas savoir préciser la signification de la notation Arg.z. Peu de candidates réussissent à montrer correctement que la détermination, dite principale, est continue.

- **Fonctions convexes.** La continuité des fonctions convexes définies sur un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$ est généralement ignorée, même des candidates qui énoncent le lemme qui conduit naturellement à ce résultat. Ce lemme étant généralement établi pour un e.v.n qui n'est pas nécessairement de dimension finie, il est naturel de se demander s'il existe des fonctions convexes non continues sur des espaces de dimensions infinies. La représentation des fonctions convexes sur un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, comme intégrale définie d'une fonction croissante est, elle aussi, ignorée bien que le lemme qui conduit à ce résultat soit souvent mentionné.

- **Le jeu de «Pile ou Face».** Cette leçon fait intervenir la plupart des chapitres de probabilités. Le jury attire l'attention des candidates sur les points suivants :

  1) Nécessité d'une construction explicite de l'espace des probabilités sous-jacent.

  2) Si $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi, définie par $P[X_n = \pm 1] = \frac{1}{2}$, et si l'on pose $S_n = X_1 + - + X_n$, la justification de ($P[S_n \geqslant \epsilon n] \leqslant [e^{-t\epsilon} \, ch t]^n$), pour $t > 0$ et $\epsilon > 0$, conduit, en recourant au théorème de Borel-Cœntelli, au fait que $(\frac{1}{n} S_n)$ tend vers zéro, presque sûrement.

  3) $P[S_n < x\sqrt{n}] \rightarrow \int_{-\infty}^{x} (\exp \frac{-t^2}{2}) \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}$

- **Loi binomiale, loi de Poisson, loi de Laplace-Gauss.** Aucune candidate n'a su donner une définition correcte de la convergence en loi. L'usage de fonction génératrice d'une loi de probabilité sur $\mathbf{N}$ est complètement ignoré. Cette fonction permet pourtant de calculer simplement les moments, d'étudier les sommes de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$ et de traduire certaines convergences de lois. Le «processus de Poisson» a été proposé par plusieurs candidates. A ce sujet, il convient de distinguer :

  1°) sa définition «mathématique» ;

  2°) une construction explicite d'un exemple pour s'assurer que la définition n'est pas « vide » (utiliser, par exemple, une somme de variables indépendantes suivant une même loi exponentielle) ;

  3°) l'examen de différentes situations concrètes (appels téléphoniques,...) dont le processus de Poisson est un modèle. Le jury déplore une totale confusion entre le premier et le troisième point.

- **Indépendance et conditionnement.** Un énoncé de la loi des grands nombres a sa place dans cette leçon. Il peut être considéré comme une application intéressante du théorème de Stone-Weierstrass. La distinction entre probabilité sur un espace et probabilité sur $\mathbf{R}^n$, transportée par une variable $\mathbf{X}$, à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, et définie sur le premier espace n'est pas clairement perçue. Cette notion deviendrait plus accessible si l'on rappelait quelques propriétés de la mesure image. Ajoutons qu'il n'est pas aisé d'obtenir des explications pertinentes à propos de l'espérance du produit de variables indépendantes.

IV.2.4. LISTE DES LECONS D'ANALYSE, MECANIQUE, PROBABILITES

1. *Espaces métriques compacts, espaces métriques complets.*
2. *Exemples d'espaces compacts.*
3. *Applications, à l'analyse, de la compacité.*
4. *Connexité.*
5. *Espaces homéomorphes ; exemples et contre-exemples.*
6. *Utilisation des suites en topologie.*
7. *Exemples, tirés de l'analyse, d'espaces vectoriels normés.*
8. *Applications linéaires continues d'un espace vectoriel normé dans un autre ; exemples.*
9. *Le théorème du point fixe et ses applications.*
10. *Le théorème des accroissements finis et applications.*
11. *Différentes notions de convergence des suites de fonctions.*
12. *Suites et séries de fonctions.*
13. *Interversion des limites en analyse.*
14. *Applications du théorème de la limite monotone*
15. *Prolongement des fonctions.*
16. *Fonctions convexes.*
17. *Fonctions convexes d'une variable réelle.*
18. *Inégalités de convexité.*
19. $\mathbf{R}$*; construction et propriétés fondamentales.*
20. *Caractérisation du corps des réels.*
21. *Parties connexes de* $\mathbf{R}$ *et applications entre de telles parties.*
22. *Topologie de* $\mathbf{R}^n$.
23. *L'exponentielle réelle et ses différentes généralisations.*
24. *L'exponentielle complexe.*
25. *Le logarithme complexe.*
26. *Fonctions circulaires.*

27. *Séries numériques.*
28. *Etude, à partir d'exemples, des critères de convergence des séries numériques.*
29. *Etude des critères de convergence des suites numériques, à partir d'exemples.*
30. *Séries entières ; leur utilisation en analyse.*
31. *Suites récurrentes, définies par une relation de la forme* $u_{n+1} = f(u_n)$, *où* f *est une fonction à valeurs réelles.*
32. *Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.*
33. *Etude, sur des exemples, des méthodes de résolution d'équations différentielles du 1er ou du 2e ordre (le cas des systèmes linéaires à coefficients constants est supposé connu).*
34. *Fonctions réciproques.*
35. *Utilisation des développements limités.*
36. *Propriétés métriques des courbes planes.*
37. *Propriétés métriques des courbes gauches.*
38. *Mouvement à accélération centrale.*
39. *Loi binomiale, Loi de Poisson.*
40. *Indépendance et conditionnement.*
41. *Le jeu de pile ou face, (variables de Bernouilli indépendantes).*
42. *Problèmes d'extremums.*

IV.3 – EPREUVE D'ALGEBRE, GEOMETRIE

IV.3.1. REMARQUES GENERALES

Le programme de l'épreuve étant très limité, et l'algèbre (resp. la géométrie) n'étant que peu (resp. très peu) enseignée dans les maîtrises, il est normal que la plupart des leçons se placent au niveau du premier cycle. En contrepartie, le jury s'estime en droit d'exiger une certaine perfection formelle et un minimum d'aisance, notamment dans les démonstrations. En particulier, les «exposés» incorrects ou incomplets ont été à la source de bien des mauvaises notes. Certaines candidates confondent leçon élémentaire et leçon vide. D'autres, pensant masquer leur ignorance du sujet choisi, énumèrent des théorèmes sans rapport avec la question.

IV.3.2. REMARQUES PARTICULIERES (algèbre)

Les hypothèses concernant les anneaux ou les corps sont souvent imprécises. C'est en particulier le cas pour les éléments unités ou la caractéristique. Les notions les plus élémentaires sur la théorie des corps sont trop souvent ignorées ; par exemple le jury a quelquefois eu du mal à savoir ce qu'étaient les racines d'un polynôme (dans le corps de base, dans une extension...). Il est maladroit de consacrer dix minutes, ou plus, à des banalités (opérations sur les polynômes par exemple). Enfin certaines candidates énoncent, dans leur plan, de nombreux et impressionnants théorèmes puis ne proposent, comme exposé que des banalités ; ceci indispose le jury !

- **Divisibilité dans les anneaux.** Il faut donner de nombreux exemples et contre-exemples. Il est inutile et même ridicule de faire appel au lemme de Zorn pour démontrer qu'un anneau principal est factoriel.

- **Polynômes.** Les candidates ont tendance à présenter un plan passe-partout indépendant du texte précis de la leçon. Rappelons qu'il existe une condition nécessaire et suffisante, valable en toute caractéristique pour qu'une racine soit multiple.

- **Formes quadratiques.** Si Q est une forme quadratique sur E, il lui est associé une application auto-adjointe de E dans son dual. Ce fait est généralement connu mais insuffisamment exploité d'où, parfois , un abus de matrices. Cette remarque s'étend aux leçons sur les coniques. Il est bien de connaître la définition des sous-espaces isotropes mais il ne serait pas mauvais d'être capable de les exhiber. Par exemple le jury n'a jamais réussi à savoir quels étaient les plans isotropes de la forme $x^2 + y^2 - z^2$ et s'est agréablement délassé en demandant à une candidate de représenter le cone isotrope.

- **Réduction des endomorphismes.** Il faut parler du polynôme minimal et aborder, au moins partiellement la réduction de Jordan.

- **Formes bilinéaires alternées, groupe symplectique.** Il convient d'étudier les sous-espaces totalement isotropes. Le fait qu'un endomorphisme symplectique soit de déterminant 1 est non trivial. D'une façon un peu plus générale, les plans sont très pauvres pour tout ce qui touche à la structure des groupes classiques.

- **Algèbre linéaire.** Le calcul matriciel ne doit être utilisé qu'à bon escient. Trop de candidates se réfugient dans les matrices, faute d'être capables de raisonner directement sur les endomorphismes. Le lien entre la dualité et les équations d'un sous-espace est souvent mal perçu. La notion de complexification n'est pas comprise.

IV.3.3. REMARQUES PARTICULIERES (géométrie)

On ne peut que reprendre ici les remarques du jury masculin (1974). A l'exception peut-être des leçons sur les isométries, les candidates ne choisissent les leçons de géométrie que contraintes et forcées. On a beaucoup de mal à obtenir des figures et le moindre exercice d'application sème la panique. Les leçons se réduisent bien souvent à un formalisme vide et généralement très mal dominé, ou encore à un inconsistant verbiage matriciel, digne héritier de la défunte «géométrie analytique» d'antan. Faut-il signaler aux candidates que les vieux livres de géométrie se transforment agréablement en une collection d'exercices (des cas d'égalité des triangles aux propriétés bifocales des coniques). En tout état de cause, compte tenu de la place importante que tient

la géométrie dans l'enseignement secondaire, les candidates ne doivent pas s'attendre à une prochaine disparition des leçons de géométrie. En particulier le jury continuera à proposer des couplages de géométrie.

- **Coniques.** Il s'agit avant tout d'une illustration de la théorie des formes quadratiques ; il faut donc mettre soigneusement en évidence les propriétés utilisées des formes quadratiques. Aucune candidate n'a été capable de définir de façon précise une conique affine. Les propriétés bifocales des coniques à centre sont oubliées.

- **Isométries laissant invariante une figure.** Le cas des réseaux n'est jamais abordé.

- **Liaison entre géométrie affine et géométrie projective.** Cette leçon est rarement traitée de façon correcte. Le lien entre coordonnées barycentriques et projectives n'est pas perçu.

IV.3.4. LISTE DES SUJETS D'ALGEBRE ET DE GEOMETRIE

1. *Structures algébriques quotients.*
2. *Groupes finis ; exemples.*
3. *Groupe symétrique.*
4. *Sous-groupes distingués ; exemples.*
5. *Groupes opérant sur un ensemble ; applications.*
6. *Structure d'anneau ; applications.*
7. *Anneaux quotients de Z.*
8. *Idéaux d'un anneau commutatif.*
9. *Anneaux principaux.*
10. *Divisibilité dans les anneaux intègres.*
11. *Numération, bases, critères de divisibilité. Anneau des nombres décimaux.*
12. *Structure de corps ; caractéristique. Exemples.*
13. *Corps des nombres complexes.*
14. *Anneau des polynômes, à une indéterminée, sur un corps commutatif ; factorisation et applications.*
15. *Anneau des polynômes à une ou plusieurs indéterminées sur un corps commutatif.*
16. *Polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif ; racines.*
17. *Polynômes symétriques à plusieurs indéterminées.*
18. *Polynômes, à une indéterminée, sur un corps commutatif ; division euclidienne, congruences.*
19. *Divisibilité dans les anneaux de polynômes.*

20. *Division des polynômes suivant les puissances croissantes ; applications.*
21. *Fonctions polynômes.*
22. *Elimination. Résultant de deux polynômes.*
23. *Corps des fractions rationnelles sur un corps commutatif. Décomposition en éléments simples, et applications.*
24. *Bases et dimension dans les espaces vectoriels ; applications.*
25. *Sous-espaces d'un espace vectoriel.*
26. *Applications linéaires ; espaces vectoriels quotients.*
27. *Le rang en algèbre linéaire.*
28. *Groupe linéaire.*
29. *Dualité dans les espaces vectoriels.*
30. *Formes bilinéaires sur un espace vectoriel de dimension finie.*
31. *Formes bilinéaires alternées.*
32. *Groupe symplectique (en dimension finie, sur un corps commutatif de caractéristique différente de 2).*
33. *Formes multilinéaires alternées ; exemples.*
34. *Déterminant d'un endomorphisme ; applications.*
35. *Applications des déterminants.*
36. *Résolution des systèmes d'équations linéaires.*
37. *Valeurs propres, sous-espaces propres.*
38. *Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme ; applications.*
39. *Expressions matricielles réduites d'un endomorphisme d'espace vectoriel de dimension finie.*
40. *Polynôme minimal d'un endomorphisme.*
41. *Formes quadratiques. Décomposition en carrés. Classification sur* $\mathbb{R}$ *et sur* $\mathbb{C}$.
42. *Réduction d'une forme quadratique.*
43. *Espaces vectoriels euclidiens.*
44. *Groupe orthogonal en dimension finie.*
45. *Espaces vectoriels hermitiens.*
46. *Groupe unitaire en dimension finie.*
47. *Dualité dans les espaces euclidiens. Adjoint d'un endomorphisme. Endomorphismes symétriques. Réduction.*
48. *Dualité dans les espaces hermitiens. Adjoint d'un endomorphisme. Endomorphismes auto-adjoints. Réduction.*
49. *Espaces projectifs. Sous-espaces projectifs. Intersection. Repères projectifs.*
50. *Dualité dans les espaces projectifs.*

51. *Groupe projectif d'une droite projective complexe.*
52. *Groupe projectif dans un espace de dimension finie.*
53. *Homographies d'une droite projective réelle sur elle-même.*
54. *Homographies d'un plan projectif réel sur lui-même.*
55. *Homographies d'un plan projectif dans son dual.*
56. *Liaison entre géométrie affine et géométrie projective.*
57. *Groupe affine en dimension finie.*
58. *Sous-groupes et groupes quotients du groupe affine d'un espace affine de dimension finie.*
59. *Variétés affines d'un espace affine de dimension finie.*
60. *Espace affine de dimension finie : barycentre, groupe affine.*
61. *Isométries dans un plan affine euclidien.*
62. *Isométries dans un espace affine euclidien de dimension 3.*
63. *Isométries dans un espace affine euclidien de dimension finie.*
64. *Isométries d'un plan affine euclidien laissant globalement invariante une figure donnée.*
65. *Isométries d'un espace affine euclidien de dimension 3 laissant globalement invariante une figure donnée.*
66. *Similitudes directes et inverses dans un plan affine euclidien.*
67. *Similitudes dans un espace affine euclidien de dimension finie.*
68. *Projection orthogonale dans un espace affine euclidien ; problèmes d'angles et de distances.*
69. *Espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 ; produit mixte ; produit vectoriel ; applications.*
70. *Applications antisymétriques sur un espace vectoriel euclidien ; torseurs.*
71. *Pôles et polaires en géométrie plane.*
72. *Pôles et polaires en dimension 3.*
73. *Propriétés projectives des coniques ; dualité.*
74. *Coniques dans le plan affine réel.*
75. *Coniques dans le plan projectif réel.*
76. *Propriétés affines des coniques.*
77. *Propriétés métriques des coniques ; foyers.*
78. *Propriétés métriques des coniques ; équations réduites.*
79. *Faisceaux linéaires ponctuels des coniques.*
80. *Inversion plane ; groupe circulaire.*

81. *Vecteurs et sous-espaces isotropes relativement à une forme bilinéaire symétrique ou alternée.*

82. *Complexification ; vecteurs isotropes. Applications aux cercles.*

83. *Le cercle en géométrie plane.*

84. *La sphère et le cercle.*

85. *Réduction d'une matrice orthogonale. Applications géométriques.*

86. *Génératrices rectilignes des quadriques en dimension 3.*

87. *Propriétés métriques des quadriques en dimension 3.*

88. *Utilisations des nombres complexes en géométrie.*

89. *Racines n-ièmes de l'unité.*

V – BIBLIOTHEQUE DE L'AGREGATION

Les candidats étaient autorisés à utiliser pendant la préparation de leurs leçons tout livre imprimé vendu dans le commerce (à l'exclusion des textes dactylographiés ou ronéotypés).

En outre, ils pouvaient consulter sur place les ouvrages suivants :

ARTIN	*Algèbre géométrique* (Gauthier-Villars)
BASS	*Cours de Mathématiques* (Masson)
BERGER et GOSTIAUX	*Géométrie différentielle* (Colin)
BLANCHARD	*Corps non commutatifs* (Presses Universitaires)
BOURBAKI	Les tomes suivants : *Théorie des ensembles* *Algèbre* *Fonction d'une variable réelle* *Topologie générale* *Espaces vectoriels topologiques* *Intégration*
BROUSSE	*Mécanique* (Colin)
CABANNES H.	*Cours de mécanique générale* (Dunod)
CAGNAC	*Nouveau cours de mathématiques spéciales* (Masson) *Cours de mathématiques supérieures* (Masson)
CAGNAC et THIBERGE	*Géométrie.* Classes terminales C (Masson) *Arithmétique/Algèbre* – Classes terminales (Masson)
CARTAN	*Fonctions analytiques* (Hermann) *Formes différentielles* (Hermann) *Calcul différentiel* (Hermann)
CASANOVA	*Cours de mathématiques spéciales* (Belin)

CHAMBADAL et OVAERT	*Cours de mathématiques* (Gauthier Villars) (tome I, tome II, algèbre – tome II, analyse) *Algèbre linéaire* et *algèbre tensorielle* (Dunod)
CHAZEL	*Traité de mathématiques* (Hachette)
CHOQUET	*Cours d'analyse* (Masson) *L'enseignement de la géométrie* (Hermann)
CONDAMINE et VISSIO	*Mathématiques :* Terminales C et T (Delagrave)
COUTY	*Analyse* (Colin)
DIEUDONNE	*Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* (Hermann) *Sur les groupes classiques* (Hermann) *Calcul infinitésimal* (Hermann) *Eléments d'analyse* (Gauthier Villars) – tomes 1 et 2
DIXMIER	*Fondements de l'analyse* (Hermann) *Analyse M.P.* (Gauthier Villars)
DONEDDU	*Arithmétique générale* (Dunod) *Cours de mathématiques spéciales* (Dunod)
DUBREIL (M. et Mme)	*Leçons d'algèbre moderne* (Dunod)
DUBUC	*Géométrie plane* (Presses Universitaires)
EXBRAYAT et MAZET	*Algèbre, analyse, topologie* (Hatier)
FRENKEL	*Algèbre et géométrie* *Géométrie pour l'élève professeur* (Hermann)
GODEMENT	*Algèbre* (Hermann)
GOURSAT	*Cours d'analyse* (Gauthier Villars)
GOUYON	*Précis de mathématiques spéciales* (Vuibert)
HARDY G.H.	*A course of pure mathematics* (Cambridge University Press)
HOCQUENGHEM et JAFFARD	*Mathématiques* (Masson)
KREE	*Introduction aux mathématiques appliquées* (Dunod)
KRIVINE	*Théorie axiomatique des ensembles* (Presses universitaires)
LANG	*Introduction aux variétés différentiables* (traduction française) *Algebra* – *Linear Algebra*
LEFORT	*Mathématiques pour les sciences biologiques et agronomiques* (Colin)
MAC-LANE et BIRKHOFF	*Algèbre, structures fondamentales* (traduction française) *Les grands théorèmes* (traduction française)
Mme LELONG-FERRAND et ARNAUDIES	*Cours de mathématiques*, 4 tomes (Dunod)
Mme LELONG-FERRAND	*Géométrie différentielle* (Masson)
MAILLARD	*Classes terminales C* (Hachette)

MALLIAVIN	*Géométrie différentielle intrinsèque* (Hermann)
MARTIN P.	*Géométrie* (Colin)
NEVEU J.	*Bases mathématiques du calcul des probabilités* (Masson)
PISOT et ZAMANSKY	*Mathématiques générales* (Dunod) *Algèbre et algèbre linéaire* (Dunod)
QUEYSANNE	*Algèbre* (Colin)
RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX	*Mathématiques spéciales* (Masson) tome I : algèbre
RIESZ et NAGY	*Leçons d'analyse fonctionnelle* (Gauthier Villars)
RUDIN	*Réal and complex analysis* (Mac Granhill)
SAMUEL	*Théorie algébrique des nombres* (Hermann)
SCHWARTZ	*Cours d'analyse* (Hermann)
SERRE	*Cours d'arithmétique* (Presses universitaires)
VALIRON	*Cours d'analyse* (Masson)
VAUQUOIS	*Les probabilités* (Hermann)
ZAMANSKY	*Algèbre et analyse moderne* (Dunod)
ZISMAN	*Topologie algébrique* (Colin)