Parties III, IV, V

La troisième partie n'était pas difficile. Aussi, une bonne vingtaine de candidates ont-elles pu gagner des points en traitant correctement la première question et les deux premières parties de la seconde.

De même, les deux premières questions de la partie IV ont été bien traitées dans une quinzaine de copies.

Enfin, la question (a) de la cinquième partie a été correctement résolue dans huit copies ; mais il ne s'agissait pas d'une question proprement probabiliste et, peut-être, ce résultat assez classique était-il connu de certaines candidates. La question (b), par contre, n'a été que partiellement vue, et par quatre candidates seulement.

II.10.5 LES NOTES DES CANDIDATS (sur 40)

Nombre de copies corrigées : 528 – Moyenne : 7,9.
272 notes $\geqslant 7$; 184 notes $\geqslant 11$; 131 notes $\geqslant 13$.

Répartition des notes par classes d'amplitude 4 :

0	1 à 4	5 à 9	10 à 14	15 à 19	20 à 24	25 à 29	30 à 34	35 à 40
52	165	109	93	61	24	14	5	5

II.10.6 LES NOTES DES CANDIDATES (sur 40)

Nombre de copies corrigées : 337 – Moyenne : 7,5 (copies blanches exclues).
171 notes $\geqslant 4$; 119 notes $\geqslant 9$; 87 notes $\geqslant 13$; 69 notes $\geqslant 15$.
Répartition des notes par classes d'amplitude 5 :

0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35
92	67	48	43	37	19	3	2

III - ÉPREUVES ORALES

CANDIDATS

III.1 – REMARQUES GENERALES

- Comme les années précédentes, les candidats ont été répartis, en fonction des résultats de l'écrit, entre deux demi-jurys comprenant chacun une commission d'analyse et une commission d'algèbre. Une rotation des examinateurs a permis d'harmoniser les notes attribuées par ces deux demi-jurys.

- Les modifications du programme(d'ailleurs reconduites pour 1976)n'ont causé aucune difficulté. Dans le cas d'une leçon de probabilités couplée avec une leçon d'analyse – ce qui, en cette année d'innovation, était systématique – peu de candidats ont opté pour la première ; ceux qui l'ont fait ont d'ailleurs rarement eu à le regretter. Il va de soi que le jury se réserve le droit, pour les concours suivants, de coupler un sujet de mécanique et un sujet de probabilités, ou deux sujets concernant la même discipline.

- A plusieurs reprises, un candidat s'est vu refuser la possibilité d'utiliser un cours polycopié par les soins d'une université à l'usage exclusif de ses étudiants. Le jury tient à préciser à cette occasion qu'il n'a nullement l'intention de «figer» la préparation au concours, mais qu'il se doit de garantir l'égalité, au moins théorique, des chances des candidats. Il n'ignore d'ailleurs pas que les échecs de certains professeurs en exercice sont souvent dûs à leur isolement et à la difficulté qu'ils ont de bénéficier de la préparation que certains centres dispensent avec beaucoup d'efficacité, et il se félicite de l'initiative prise cette année par le C.N.T.E. d'organiser un séminaire de préparation à l'oral à l'intention de ceux des admissibles qui avaient suivi son enseignement.

- Enfin, sans anticiper sur les rapports techniques qui vont suivre, le président du jury croit devoir souligner l'importance des exercices dans l'enseignement des mathématiques et, par voie de conséquence, dans le déroulement du concours. Lorsqu'un candidat n'a prévu aucun exemple ni exercice dans son plan, il incite le jury à lui proposer les siens (en restant, bien entendu, dans le cadre du sujet traité). Loin de s'affoler, le candidat doit alors profiter de l'occasion qui lui est donnée de faire preuve de sang-froid et d'intuition ; il va de soi qu'on n'exige pas de lui la même virtuosité que s'il s'agissait d'une question préparée et que, dans certains cas, on admet volontiers qu'il ne fournisse qu'une partie de la solution.

  Voici, à titre d'exemple, trois exercices proposés au cours d'exposés sur la divisibilité des polynômes, sur le théorème du point fixe et sur les notions d'application linéaire continue et de norme :

– **Pour tout polynôme** $P \in K[X]$, $P(P(X)) - X$ **est divisible par** $P(X) - X$.

—**Existence d'un couple** $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ **vérifiant :**

$$x = \frac{1}{4} \sin (x + y) \quad \text{et} \quad y = 1 + \frac{2}{3} \text{ Arc } tg\,(x - y)$$

– **Existence d'un réel M tel que, pour toute application** f **deux fois dérivable de** $\mathbb{R}$ **dans** $\mathbb{R}$ **vérifiant**

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \qquad f''(t) + ch\, t.\, f'(t) + sh\, t.\, f(t) = 0$$

On ait :

$$|f'''(3)| \leqslant \mathrm{M}\left(|f'(\pi)| + \int_2^4 |f(t)|\,dt\right)$$

III.2 – EPREUVE D'ANALYSE, MECANIQUE, PROBABILITES

III.2.1 OBSERVATIONS GENERALES

Le jury a constaté cette année que les candidats sont plus nombreux à avoir compris la nature des épreuves d'oral, c'est-à-dire plan, exposé et questions. Toutefois, proposer un seul point du plan pour l'exposé – ce qui est contraire aux dispositions réglementaires – ne peut que conduire le jury à demander l'exposé d'un autre point du plan que celui cité par le candidat. En outre, un certain nombre d'erreurs catastrophiques concernant les sujets et les plans amènent le jury à formuler les remarques suivantes, qui ont valeur de mise en garde :

- **Le respect du titre de l'exposé choisi doit être absolu.** Ainsi «Série de Taylor» n'est évidemment pas «Formules de Taylor»; «Fonctions implicites , Applications» n'est pas «Fonctions implicites» ; «Problèmes d'extremum » n'est pas «Applications du calcul différentiel aux problèmes d'extremum» etc. A ce propos, rappelons que le jury a la possibilité de modifier d'une année à l'autre les titres des sujets proposés aux candidats, et que des sujets dont les titres paraissent voisins peuvent se révéler en fait sensiblement différents. Il est donc recommandé aux candidats de ne pas essayer à tout prix de parler du sujet analogue qu'ils connaissent mieux, mais bien plutôt de bâtir un plan efficace autour du titre exact, laissant aux préliminaires et aux conséquences lointaines la place qui leur revient.

- Cette année encore, le jury est obligé de constater que la plupart des candidats ignorent le rôle fondamental que jouent les **exemples et contre-exemples** pour illustrer intelligemment une notion mathématique, et accessoirement aussi pour convaincre le jury que le candidat a assimilé le sujet qu'il a à traiter. Et, justement, dans de nombreuses leçons, on appelle expressément le candidat à construire son exposé à partir d'exemples («illustrer par des exemples la notion de ... » ou «exemples d'utilisation de ...»). Il est clair que, dans ce cas, il faut composer sa leçon autrement que sous la forme d'une liste de théorèmes recopiés dans un ouvrage (aussi bon soit-il !), et que le choix des exemples joue un très grand rôle

dans l'appréciation du jury. Ne pas confondre, d'ailleurs, exemples et exercices : ainsi le théorème de Stone-Weierstrass est un exemple d'utilisation en analyse de la notion de compacité, l'étude de la série $(-1)^{\mathrm{E}(\sqrt{n})}/n$ (E = partie entière) un exemple d'utilisation de la «sommation par paquets», alors que :

$\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \sqrt[n]{|\sin n|} = 1$ n'est qu'un exercice sur les suites ou les séries...

III.2.2. REMARQUES PARTICULIERES SUR CERTAINS SUJETS

- **Topologie et dénombrabilité : parties dénombrables denses, suites, suites extraites, suites de compacts...** Il s'agit typiquement d'un sujet de composition, qui ne se range pas parmi les plus faciles ; si le jury ne s'attend évidemment pas à ce que les candidats exposent tout ce qui concerne les rapports entre topologie et dénombrabilité dans le temps qui leur est imparti, il souhaite toutefois que soient abordé un certain nombre des points suivants : *espaces où tout point a une base dénombrable de voisinages* (suites extraites, continuité, etc.) ; plus particulièrement *espaces métrisables* (caractérisation des fermés ; tout fermé est un G_δ ; théorèmes de prolongement etc.) ; plus particulièrement encore, *compacts métrisables* (caractérisations ; leur topologie est à base dénombrable, donc séparable..., leur cardinal est au plus celui de $\mathbb{R}$ etc.) ; suites de parties d'un espace topologique : *suite d'ouverts* (topologies à base dénombrable...), *suite de fermés* (caractérisation des métriques complets ; espaces de Baire ; exemples de tels espaces ; sont bienvenues quelques-unes des utilisations bien connues de la propriété de Baire en analyse classique et en analyse fonctionnelle : théorème des isomorphismes de Banach, et de Banach-Steinhaus, dimension algébrique des Banach, fonctions de classe de Baire etc. etc.), *suites de compacts* (espaces localement compacts dénombrables à l'infini etc.) ; *suites de points* (suites croissantes dans $\mathbb{R}$, suites de Cauchy, limites inférieures ou supérieures de suites etc. ; ne pas oublier les suites de fonctions dans les espaces fonctionnels, les suites faiblement convergentes dans les espaces de Hilbert...) ; *espaces séparables* (par exemple, si E est un Banach, si E' est séparable, E l'est, etc.). Beaucoup d'autres points peuvent être également évoqués, *et les remarques ci-dessus ne sauraient en aucun cas être considérées comme exhaustives, ni comme imposé l'ordre dans lequel elles apparaissent.*

- **Illustrer par des exemples la notion d'application linéaire continue entre espaces vectoriels normés et la notion de norme de telles applications.** En plus des remarques générales faites au début du rapport sur ce genre de sujets, on peut indiquer que le jury souhaite avec cette nouvelle leçon entendre les candidats proposer des exemples de problèmes exprimés en termes d'analyse «classique» et dont la solution est simplifiée en introduisant des applications linéaires continues entre espaces vectoriels normés. Ce genre de problème peut aller du théorème de Riemann-Lebesgue aux contre-exemples classiques en théorie des séries de Fourier, en passant par les équations intégrales.

- **Solutions, solutions maximales des équations différentielles** $y' = f(x, y)$. Ce sujet nouveau n'a évidemment pas été choisi souvent par les candidats. Il importe donc de préciser ce que le jury souhaiterait entendre. Tout d'abord, il n'est pas naturel de se limiter au cas où la fonction f n'est définie que sur un rectangle ouvert de $\mathbf{R}^2$, cas qui ne correspond pas aux problèmes concrets qui se posent en analyse. Ensuite il convient de bien préciser ce qu'est une solution, à savoir un couple (I, φ) constitué d'un intervalle I de $\mathbf{R}$, et d'une application dérivable φ de source I, tels que, pour tout x élément de I, le point $(x, \varphi(x))$ appartienne à l'ouvert de définition de f, et satisfasse à la relation $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$. On peut alors définir correctement la notion de solutions maximales et établir moyennant certaines conditions l'existence et l'unicité de telles solutions. Enfin, il est indispensable de donner des exemples illustrant les différents phénomènes qui peuvent apparaître. En particulier, les candidats doivent pouvoir étudier correctement le cas de l'équation : $y' = f(y)$, où f est une fonction continue sur un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ ne s'annulant par exemple qu'en un point de cet intervalle.

- **Etude sur des exemples d'équations différentielles de la forme** $\mathrm{F}(x, y, y') = 0$
Le candidat n'est évidemment pas tenu de traiter tous les cas «classiques», et il doit en particulier éviter une liste fastidieuse de calculs à peine ébauchés.
Il est plus intéressant en effet de dégager les idées conduisant aux réductions du problème : paramétrages, invariants, transformations, etc. Des exemples de nature géométrique sont souvent fructueux ; c'est le cas quand des remarques faciles sur la figure fournissent un fil conducteur, que l'on peut suivre jusqu'à la présentation finale du résultat. Il faut évidemment d'autre part, sur les exemples proposés, ne pas se contenter de la solution générale, mais aussi savoir expliquer les intégrales singulières, les recollements, les «solutions parasites», et, selon les définitions adoptées, distinguer les solutions des courbes intégrales. Rappelons enfin qu'il s'agit d'une leçon d'exemples : il appartient au candidat de choisir et de présenter ces exemples pour qu'ils soient les plus instructifs possible.

- **Sous-variétés différentiables de dimension 1 ou 2 de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$. Espace tangent. Exemples.** Dans cet exposé, les candidats ne doivent pas se limiter aux définitions de sous-variété et d'espace tangent. Quelques exemples et contre-exemples traités clairement mettront bien en évidence les vraies difficultés. Il est souhaitable d'aborder les problèmes d'intersection de sous-variétés, de courbes tracées sur une «surface», et il est possible d'envisager ceux de «contour apparent», orientation, extrèma liés...
Le problème de la position d'une surface par rapport à son plan tangent gagne à être traité par des méthodes conduisant à des calculs pratiques. Si l'on juge utile d'énoncer le lemme de Morse, il paraît normal d'en tirer des conséquences plus sérieuses : intersection avec le plan tagent, comparaison des ensembles de niveaux etc.

- **Systèmes de coordonnées curvilignes. Applications diverses.** Si, conformément au programme, on ne peut exiger des candidats de dominer les notions de variété et de systèmes de coordonnées locales, le jury souhaite toutefois que ceux-ci sachent donner une définition correcte des systèmes de coordonnées curvilignes servant à paramétrer un ouvert de $\mathbf{R}^n$, utilisés couramment en physique par exemple. Le

problème du passage d'un système à un autre est alors l'occasion d'utiliser le théorème d'inversion locale. Les candidats doivent connaître les précautions qu'il convient de prendre pour manier de tels systèmes, en particulier pour les coordonnées polaires et les coordonnées sphériques. Enfin il est indispensable que des exemples illustrent ce genre de manipulations qui permettent de faire «qu'en passant en tel ou tel système de coordonnées les équations du problème prennent la forme plus simple suivante...». Les changements de variables dans les intégrales multiples, illustrés par des exemples aussi concrets qu'usuels trouvent aussi naturellement leur place dans ce sujet.

- **Exposés de théorie des probabilités.** Pour la première fois, des sujets de probabilité ont été proposés aux candidats. Les notes obtenues ont montré qu'il n'est pas nécessaire d'être un spécialiste pour faire un bon exposé de probabilités. En tout cas, le jury souhaite un équilibre entre les développements théoriques, les exemples et la mise en évidence d'applications ; les propositions d'exposés ne devraient pas se réduire à la preuve d'un corollaire théorique, mais concerner plutôt le passage de définitions premières à un théorème de base. Il est désagréable par exemple de voir centrer la notion d'indépendance sur celle d'indépendance de tribus, et de constater que la mise en œuvre par le candidat de la moindre application ne fait intervenir que les densités de la loi conjointe et de ses lois marginales.
Par ailleurs, un candidat a donné quatre définitions différentes de l'espérance (espérance de X, de $\varphi(\mathrm{X})$, ...) sans se soucier d'en vérifier la compatibilité...
La leçon sur le conditionnement fait intervenir plusieurs notions : probabilité conditionnelle d'un événement, espérance conditionnelle d'une variable aléatoire, densités conditionnelles... . Il est souhaitable de faire apparaître les liens entre ces notions et d'en donner des applications. On peut encore signaler que les théorèmes d'addition de variables aléatoires indépendantes peuvent être illustrés par des applications aux lois usuelles (lois du (0,1), lois normales, lois de Poisson...) et éventuellement à des processus simples, tels que les marches aléatoires par exemple.

- **Exposés de cinématique.** Les exposés de cinématique ne sauraient être abordés avec un esprit de moindre rigueur ; toute notion que le candidat juge bon d'introduire doit être définie avec précision, quel que soit le point de vue adopté : point coïncident, espace mobile, mouvement de solide, base, roulante etc. ; la théorie doit être correctement développée et illustrée par des exemples explicites et pratiques et des contre-exemples ; c'est à ce prix que l'on évite les plans squelettiques ou incorrects.
Il est souhaitable, dans différentes leçons et indépendamment de la présentation choisie, que le candidat fasse nettement ressortir qu'étudier le champ des vitesses dans un mouvement de solide, c'est essentiellement étudier la dérivée d'une application $t \mapsto u(t)$, qui à t associe une isométrie affine directe. De même l'étude de la composition des mouvements est essentiellement celle de la dérivée première [et seconde] d'une application $t \mapsto u(t).\, m(t)$, à laquelle on peut appliquer des théorèmes généraux de calcul différentiel ; on saura alors préciser les hypothèses adoptées, et les théorèmes mis en cause ; on pourra même savoir, avant d'être interrogé par le jury, s'il peut se faire qu'il y ait un rapport entre la composition des mouvements et la notion générale de composition des applications !

L'exposé «Mouvement d'un plan sur un plan» a été l'occasion de trop lourdes erreurs pour qu'un commentaire particulier ne soit nécessaire ; il est intolérable d'entendre des candidats affirmer (et même proposer à la démonstration) que la roulante est, soit un point fixe du plan mobile, soit une courbe isométrique à la base... . En application des remarques précédentes, il importe de définir très précisément les notions de centre instantané de rotation, base, roulante, et des exemples effectifs sont les bienvenus. Si l'on parle de la cycloïde, ce ne peut être seulement pour en rattacher la définition à un mouvement plan sur plan : les tangentes, les rebroussements donnent lieu à des remarques cinématiques ; en outre, il existe d'autres courbes cycloïdales que la cycloïde, qui fournissent des exemples fructueux et pour lesquelles des remarques analogues s'imposent.

Il peut être intéressant de pousser plus loin l'étude du mouvement dans le cas général : cercle des inflexions, formule d'Euler-Savary, alignement de centres instantanés de rotation, etc. et de donner de ces nouveaux résultats quelques applications pratiques. Il peut aussi être intéressant de donner des conséquences géométriques variées : repère de Frênet, podaires, conchoïdes, etc., et de proposer quelques problèmes d'enveloppes. Une dernière recommandation est qu'il est bon, avant d'être sollicité par le jury, d'avoir réfléchi aux problèmes soulevés par l'emploi de symboles du type $\frac{d}{d\theta}$, où, comme le disent nombre de candidats, « θ est un angle»...

III.2.3. LISTE DES SUJETS D'ANALYSE, DE MECANIQUE ET DE PROBABILITES

1. *Applications à l'analyse de la notion de compacité.*
2. *Applications à l'analyse de la notion de connexité.*
3. *Théorème du point fixe. Applications.*
4. *Espaces métriques complets ; espaces métriques compacts ; comparaison des deux théories.*
5. *Espaces vectoriels normés ; espace de Banach. Sous-espaces denses.*
6. *Illustrer par des exemples la notion d'application linéaire continue entre espaces vectoriels normés et la notion de norme de telles applications.*
7. *Espace vectoriel normé de dimension finie.*
8. *Une construction de* $\mathbf{R}$ *et ses principales propriétés.*
9. *Une construction du corps des nombres réels étant acquise, donner différentes caractérisations de* $\mathbf{R}$.
10. *Topologie de la droite numérique* $\mathbf{R}$ *. Droite numérique achevée.*
11. *Propriétés topologiques de* $\mathbf{R}^n$ *et leur utilisation en analyse.*
12. *Limites.*
13. *Applications continues.*
14. *Suites de nombres réels.*

15. *Limite, limite inférieure, limite supérieure de suites numériques.*
16. *Approximation d'un nombre réel par des rationnels. Fractions continues.*
17. *Topologie et dénombrabilité : parties dénombrables denses, suites, suites extraites, suites de compacts...*
18. *Etude sur des exemples de suites définies par une relation de récurrence.*
19. *Fonction réelle d'une variable réelle : continuité, dérivabilité...*
20. *Fonctions à variation bornée. Fonctions croissantes. Applications diverses.*
21. *Fonctions réciproques.*
22. *Fonctions implicites. Applications.*
23. *Fonctions convexes d'une ou plusieurs variables réelles.*
24. *Prolongement des fonctions. Exemples.*
25. *Fonction différentiable.*
26. *Fonction de plusieurs variables réelles : formule des accroissements finis, formule de Taylor...*
27. *Applications de classe* C^k d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$.
28. *Les différentes formules de Taylor.*
29. *Problèmes d'extremum.*
30. *Applications des formules des accroissements finis et de Taylor aux problèmes de calcul numérique.*
31. *Comparaison des fonctions au voisinage d'un point.*
32. *Applications de la méthode des développements limités ou asymptotiques.*
33. *Fonction logarithme, fonction exponentielle d'une variable réelle.*
34. *Fonction exponentielle complexe.*
35. *Extensions de la notion de fonction exponentielle.*
36. *Fonctions circulaires directes et réciproques.*
37. *Séries à termes réels ou complexes. Exemples.*
38. *Illustrer par des exemples et contre-exemples la théorie des séries à termes réels.*
39. *Opérations sur les séries à termes réels ou complexes.*
40. *Continuité, dérivabilité, intégralité de la somme d'une série de fonctions d'une variable réelle.*
41. *Les différentes notions de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions. Exemples.*
42. *Exemples d'utilisation du critère de convergence de Cauchy (suites, séries, fonctions...).*
43. *Exemples de problèmes d'interversion de limites.*
44. *Séries entières.*

45. *Méthodes de développement d'une fonction en série entière. Exemples.*

46. *Série de Taylor.*

47. *Fonction* $x \mapsto e^{ix}$ *de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{C}$ *; nombre* π *; module et argument d'un nombre complexe.*

48. *Le nombre* π.

49. *Nombre irrationnels. Nombres transcendants.*

50. *Solutions, solutions maximales des équations différentielles* $y' = f(x, y)$.

51. *Equations différentielles linéaires ; exemples.*

52. *Systèmes différentiels linéaires à cœfficients constants ; exemples.*

53. *Equations différentielles linéaires à cœfficients constants ; exemples.*

54. *Etude sur des exemples d'équations différentielles de la forme* $F(x, y, y') = 0$.

55. *Sous-variétés différentiables de dimension un et deux de* $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$. *Espace tangent. Exemples.*

56. *Etude locale des courbes : propriétés métriques. Exemples.*

57. *Tracé des courbes* $\overrightarrow{OM} = \vec{f}(t)$. *Exemples.*

58. *Tracé des courbes* $\rho = f(\theta)$. *Exemples.*

59. *Rectification des courbes planes ; courbure ; développée ; développantes.*

60. *Rectification des courbes planes ; courbure ; recherche des courbes dont la courbure algébrique est une fonction donnée de l'arc.*

61. *Courbure et torsion des courbes en géométrie euclidienne de dimension 3 ; recherche des courbes dont la courbure et la torsion sont des fonctions données de l'arc.*

62. *Systèmes de coordonnées curvilignes. Applications diverses.*

63. *Mouvement à accélération centrale.*

64. *Mouvement relatif ; changement de repère ; applications.*

65. *Cinématique du solide.*

66. *Mouvement d'un repère orthonormé ; applications à la théorie métrique des courbes gauches et à la cinématique du solide.*

67. *Mouvement d'un plan sur un plan.*

68. *Exemples de méthodes de calcul approché d'une fonction.*

69. *Exemples de lois de distribution.*

70. *Lois de variables aléatoires. Notion d'indépendance.*

71. *Probabilités conditionnelles et événements indépendants.*

72. *Mesures de probabilités, notamment prolongement, produit, image... Exemples.*

73. *Loi faible des grands nombres. Enoncé et exemples d'utilisation d'un théorème de convergence vers la loi normale.*

74. *Le jeu de pile ou face.*

75. *Le conditionnement en théorie des probabilités. Exemples.*

76. *Illustrer par des exemples l'intégration des variables aléatoires : valeur moyenne, variance, inégalités...*

III. 3 – EPREUVE D'ALGEBRE, GEOMETRIE

III.3.1. OBSERVATIONS GENERALES

- Le temps qui est alloué au candidat pour présenter son étude ne doit pas être gaspillé. S'il est indispensable de bien situer le cadre de l'exposé, il est inutile de faire des introductions trop longues. Le jury veut avoir le temps de tester la culture du candidat sur les questions du programme en rapport avec l'énoncé. Par ailleurs, il faut traiter correctement l'essentiel de la question proposée avant de se permettre des extensions, aussi intéressantes soient-elles ; et le choix proposé au jury pour l'exposé doit porter sur les théorèmes importants du sujet et non sur des questions annexes. Ce n'est pas non plus le nombre de théorèmes cités qui importe : même lorsque les preuves complètes ne sont pas demandées, le schéma doit en être connu du candidat.

- Dans les questions pouvant mettre en jeu une certaine variété d'hypothèses, il est bon de les formuler précisément, et de prévoir des contre-exemples mettant en valeur leur bien-fondé : finitude pour les espaces vectoriels, commutativité, existence d'un élément unité, intégrité pour les anneaux, etc.

- L'étude de la géométrie semble trop délaissée. Pourtant les théories générales (qui en sont parfois issues !) y trouvent un large champ d'applications concrètes. Toute étude géométrique est inséparable de la notion de groupe opérant sur un ensemble.

III.3.2. REMARQUES PARTICULIERES SUR CERTAINS SUJETS

- **Groupes.** La conjugaison dans un groupe est conçue de manière trop abstraite : de l'origine géométrique d'une relation du type $x \mapsto u x u^{-1}$ devrait découler à l'évidence que deux cycles de même longueur dans $\mathcal{S}_n$ sont conjugués. Les théorèmes d'isomorphisme sont souvent cités incomplètement.

- **Anneaux.** Les candidats changent de conventions à leur gré sans préciser. Le jury n'exige pas des hypothèses minimales, mais précises. A défaut de théorie générale, des exemples concernant des anneaux non commutatifs (produits de tels anneaux, anneaux de matrices) pourraient être cités.

  Les notions de $pgcd$, de $ppcm$ n'ont pas cours uniquement dans les anneaux principaux, mais dans $K[X,Y]$ par exemple, et ceci justifie une définition générale.

A propos des corps, on peut signaler l'abus trop commode de référence à une clôture algébrique, dans des cas où une extension finie suffit.

Les propriétés des polynômes dérivés ne doivent pas être limitées au cas d'une variable, et la dérivation des polynômes composés doit être traitée.

- **Sous-espaces vectoriels.** A se restreindre aux espaces de type fini, il faut mettre l'accent sur le fait que les sous-espaces le sont aussi. Dans une optique plus vaste, utilisant le théorème de Zorn, l'existence de supplémentaires peut être mise directement en évidence, et les décompositions en sommes directes de droites en résultent. On conçoit mal par ailleurs une leçon sur les sous-espaces qui n'utilise pas la dualité, et, au moins en dimension finie, des équations.

- **Réduction des endomorphismes, et sous-espaces stables.** Les énoncés du théorème de Jordan restent souvent une formalité, et des critères de similitude n'en sont pas dégagés.

  L'étude des sous-espaces stables ne doit pas être limitée à celle des sous-espaces propres, ni même de ceux qui conduisent à une réduction de la matrice. Il est choquant de voir qu'un endomorphisme et son transposé ne soient pas étudiés de pair : il est aussi facile d'obtenir les hyperplans stables que les droites propres.

  La leçon relative au cas réel a toujours été mal comprise. Un rappel des propriétés valables lorsque le polynôme minimal est scindé, ne suffit pas. Il existe toujours des plans, et des sous-espaces de dimension 2, qui soient stables, et parfois une décomposition en somme directe de droites et plans stables. Cette leçon montre clairement que le «complexifié» n'est pas conçu de manière intrinsèque, et qu'on sait mal l'utiliser.

- **Formes quadratiques.** Les candidats définissent formellement une application linéaire de l'espace dans son dual, liée à une forme bilinéaire symétrique f, et oublient d'utiliser sa restriction à un sous-espace pour connaître la dimension de son f-orthogonal.

- **Déplacements, similitudes.** Les formes canoniques, et les invariants sont mal dégagés : angle d'une similitude directe dans le plan, coefficients des matrices de SO (2) qui figurent dans les décompositions en blocs de matrices orthogonales d'ordre quelconque.

- **Calcul barycentrique.** Des énoncés incluant le cas où la somme des masses est nulle doivent être donnés, en particulier pour la question d'associativité.

- **Inversion.** La nature des angles prétenduement conservés par l'inversion doit être précisée : angles orientés ou non, de droites ou de demi-droites ?

III.3.3. LISTE DES SUJETS D'ALGEBRE ET DE GEOMETRIE

1. *Structures algébriques quotients.*

2. *Groupes quotients.*
3. *Homorphismes de groupes.*
4. *Systèmes de générateurs d'un groupe.*
5. *Exemples de groupes. (la théorie des groupes est supposée connue).*
6. *Groupes cycliques.*
7. *Groupe symétrique.*
8. *Groupe opérant sur un ensemble.*
9. *Homomorphismes d'anneaux.*
10. *Exemples d'anneaux (la théorie des anneaux est supposée connue ; on ne considèrera que des anneaux avec élément unité).*
11. *Idéaux d'un anneau à élément unité.*
12. *Exemples de corps.*
13. *Sous-corps. Corps premiers. Caractéristique.*
14. *Corps des nombres complexes.*
15. *Algèbres sur un corps commutatif.*
16. *Divisibilité dans un anneau commutatif intègre.*
17. *Identité de Bezout ; applications.*
18. *Anneaux euclidiens.*
19. *Anneau des classes résiduelles modulo n dans $\mathbf{Z}$.*
20. *Plus grand diviseur commun. Plus petit multiple commun.*
21. *Nombre premiers.*
22. *Numérations ; approximations.*
23. *Dérivation des polynômes.*
24. *Valeurs d'un polynôme à une ou plusieurs indéterminées (la théorie des polynômes est supposée faite).*
25. *Racines d'un polynôme ; multiplicité d'une racine.*
26. *Polynômes symétriques.*
27. *Résultant de deux polynômes ; applications (élimination).*
28. *Divisions dans une algèbre de polynômes sur un corps commutatif.*
29. *Divisibilité dans une algèbre de polynômes sur un corps commutatif.*
30. *Fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Décomposition (la théorie du corps des fractions d'un anneau intègre est supposée connue).*
31. *Bases d'un espace vectoriel.*
32. *Sous-espaces d'un espace vectoriel.*
33. *Dualité en algèbre linéaire.*

34. *Notion de rang en algèbre linéaire.*
35. *Notion de déterminant.*
36. *Applications des déterminants.*
37. *Calcul matriciel.*
38. *Systèmes d'équations linéaires.*
39. *Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.*
40. *Sous-espaces propres d'un endomorphisme.*
41. *Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme. Applications.*
42. *Polynôme caractéristique d'un endomorphisme.*
43. *Polynôme minimal d'un endomorphisme.*
44. *Réduction d'un endomorphisme d'un* $\mathbf{R}$ *– espace vectoriel de dimension finie.*
45. *Complexification d'un espace vectoriel réel, d'une application linéaire. Applications.*
46. *Réduite de Jordan d'une matrice carrée sur un corps algébriquement clos.*
47. *Formes bilinéaires.*
48. *Forme bilinéaire alternée. Groupe symplectique.*
49. *Formes quadratiques.*
50. *Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension* n.
51. *Groupe unitaire d'un espace vectoriel hermitien de dimension* n.
52. *Dualité dans les espaces euclidiens.*
53. *Dualité dans les espaces hermitiens.*
54. *Produit mixte et produit vectoriel dans un espace euclidien orienté de dimension 3.*
55. *Problèmes d'angles en géométrie métrique.*
56. *Barycentres ; applications (la théorie des espaces affines est supposée connue)*
57. *Problèmes de géométrie affine.*
58. *Convexité dans les espaces affines réels ; applications.*
59. *Groupe affine (dimension finie).*
60. *Projections vectorielles et affines.*
61. *Symétries.*
62. *Distance entre deux sous-espaces d'un espace affine.*
63. *Isométries d'un espace affine euclidien de dimension* n. *Déplacements. Antidéplacements.*
64. *Formes réduites des isométries d'un espace affine euclidien de dimension inférieure ou égale à 3.*

65. *Exemples de groupes d'isométries laissant globalement stable une partie d'un espace affine euclidien de dimension 2 ou 3.*
66. *Similitudes planes directes et indirectes.*
67. *Inversion plane.*
68. *Transformations de la droite projective complexe définies par* $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ $(ad - bc \neq 0)$

    Groupe circulaire du plan.
69. *Espaces projectifs.*
70. *Liaison entre espaces affines et espaces projectifs. Eléments à l'infini.*
71. *Droite projective. Homographies ; involutions.*
72. *Torseurs.*
73. *Dualité dans les espaces projectifs.*
74. *Pôles et polaires.*
75. *Quadriques dans un espace projectif de dimension* n.
76. *Propriétés projectives des coniques non dégénérées.*
77. *Propriétés affines des coniques.*
78. *Propriétés métriques des coniques.*
79. *Groupe linéaire.*

IV - ÉPREUVES ORALES

CANDIDATES

IV. 1 – REMARQUES GENERALES

Les candidates sont invitées à relire attentivement les rapports antérieurs – notamment celui qui concerne le concours de 1974 : les conseils qu'ils renferment restent valables, mais ils ne sont pas tous rappelés dans le présent rapport.

Les modalités des épreuves orales semblent désormais familières aux candidates – en particulier à celles qui ont bénéficié d'une préparation méthodique.

Les plans proposés sont généralement satisfaisants mais les exposés, trop souvent, témoignent d'un manque d'assurance et nécessitent une aide excessive du jury.

L'entretien qui termine l'épreuve en constitue la phase décisive. Il permet au jury d'asseoir définitivement son jugement quant à la solidité des connaissances et aux facultés de réflexion des candidates. Il est fatal aux esprits superficiels dont les carences, à propos de questions souvent fort élémentaires, laissent de bien fâcheuses impressions. Pour s'y préparer, dans de bonnes conditions, les candidates seraient bien avisées, avant de se présenter au jury, de prévoir certaines explications complémentaires ou quelques contre-exemples et exercices susceptibles de mettre en valeur les définitions et résultats essentiels.

IV. 2 – EPREUVE D'ANALYSE, MECANIQUE, PROBABILITES

IV.2.1. OBSERVATIONS GENERALES

Trop souvent, les résultats intéressants que comporte le plan de la leçon, ou bien ne sont pas proposés et la candidate offre au jury des sujets dont la banalité le déçoit, ou bien ont été insuffisamment préparés et l'exposé consiste alors à combler des lacunes et à corriger de trop nombreuses fautes de raisonnement.

Comme il l'a déjà rappelé, le jury reste sensible à la présentation ; il apprécie, en particulier, les exposés conduits avec aisance, sans le secours de notes, et regrette la désinvolture – sans doute involontaire – de certaines candidates dont les négligences matérielles – au plan de l'élocution et de l'écriture – ne manqueraient pas de décourager les auditoires les plus indulgents.

IV.2.2. REMARQUES PARTICULIERES

Certaines leçons sont naturellement liées à la partie du programme des épreuves écrites qui concerne les fonctions holomorphes (séries entières, logarithme complexe, compacité (Ascoli et familles normales)). Le jury souhaite que ce lien soit mis en évidence. Aussi ne manque-t-il jamais de relever les omissions dans ce domaine. Il constate alors, trop souvent, que des résultats élémentaires (formule de Cauchy, prolongement analytique, zéros isolés) sont, depuis les épreuves écrites, tombés dans l'oubli. D'autres leçons (probabilités, géométrie différentielle, cinématique) utilisent une terminologie dont la résonance intuitive ne saurait dispenser des définitions précises des mots utilisés (convergence en loi, courbe, arc, orientation,...).

Une leçon d'exemples ne consiste pas, exclusivement, à énoncer des théorèmes généraux. Dans la leçon intitulée : «**Exemples d'espaces compacts**», l'énoncé du théorème de compactification d'Alexandroff devrait être suivi de la présentation explicite des compactifiés de certains espaces simples — $\mathbb{R}^n$, par exemple. Il est naturel de comparer le compactifié de $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$. D'une manière analogue, à propos de la présentation d'exemples d'espaces vectoriels normés, la définition du dual topologique devrait être accompagnée de la détermination du dual de chacun des espaces simples tels que l^1, l^p... . Peu de candidates signalent le cas particulier des espaces de Hilbert. Cette année, la leçon intitulée : «**Etude, à partir d'exemples, des méthodes de résolution d'équations différentielles du premier ou du second ordre**» a été mieux comprise. Néanmoins, rappelons qu'il ne s'agit pas de choisir, avec plus ou moins de bonheur, une dizaine d'exemples, mais, essentiellement, de bien préciser ce qu'est une solution et de montrer, sur une ou deux équations bien choisies, que les méthodes utilisées fournissent toutes les solutions d'un type de régularité imposé (être de classe C^1, C^2, analytique,...).

IV.2.3. REMARQUES CONCERNANT CERTAINES LECONS

- **Suites récurrentes définies par** $u_{n+1} = f(u_n)$ *(f* **est à valeurs dans** $\mathbb{R}$*)*. Il est essentiel de dégager la notion de point fixe (a tel que $a = f(a)$), «attractif» (en particulier si $|f'(a)| < 1$), respectivement «répulsif» (en particulier si $|f'(a)| > 1$). Le jury apprécierait l'étude d'un cas où $|f'(a)| = 1$, ainsi que celle d'un développement asymptotique de $(u_n - \lim u_n)$ (consulter par exemple l'ouvrage de Polya-Szego dans le cas non trivial où $f'(a) = 1$).Les exemples ne devraient pas être limités au seul cas où f' conserve un signe constant : le cas où $f'(a) = 0$ ne manque pas d'intérêt.

- **Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.** S'il convient de savoir rappeler les définitions d'objets algébriques tels que : sous-espaces caractéristiques, polynôme minimal..., il ne faut pas, pour autant, oublier qu'il s'agit d'une leçon d'analyse dans laquelle, la convergence de la série définissant exp A, le comportement à l'infini des solutions doivent, tout naturellement, trouver leurs places. Peu de candidates ont le souci de préciser qu'elles ont bien obtenu toutes les solutions, même dans le cas banal $y' = ay$. Dans le cas d'un système homogène, il convient de mettre clairement en évidence l'isomorphisme vectoriel de l'espace des conditions initiales vers celui des solutions dont on dégage ainsi la dimension. On songe rarement à comparer le polynôme caractéristique d'une équation différentielle linéaire, à cœfficients constants, d'ordre n, au polynôme minimal du système, d'ordre 1, associé.

- **Logarithme complexe.** Définir une détermination continue du logarithme ou celle de l'argument sont des problèmes équivalents ; il est donc inadmissible de ne pas savoir préciser la signification de la notation Arg.z. Peu de candidates réussissent à montrer correctement que la détermination, dite principale, est continue.

- **Fonctions convexes.** La continuité des fonctions convexes définies sur un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ est généralement ignorée, même des candidates qui énoncent le lemme qui conduit naturellement à ce résultat. Ce lemme étant généralement établi pour un e.v.n qui n'est pas nécessairement de dimension finie, il est naturel de se demander s'il existe des fonctions convexes non continues sur des espaces de dimensions infinies. La représentation des fonctions convexes sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, comme intégrale définie d'une fonction croissante est, elle aussi, ignorée bien que le lemme qui conduit à ce résultat soit souvent mentionné.

- **Le jeu de «Pile ou Face».** Cette leçon fait intervenir la plupart des chapitres de probabilités. Le jury attire l'attention des candidates sur les points suivants :

  1) Nécessité d'une construction explicite de l'espace des probabilités sous-jacent.

  2) Si $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi, définie par $P[X_n = \pm 1] = \frac{1}{2}$, et si l'on pose $S_n = X_1 + - + X_n$, la justification de $(P[S_n \geqslant \epsilon n] \leqslant [e^{-t\epsilon} \, ch t]^n)$, pour $t > 0$ et $\epsilon > 0$, conduit, en recourant au théorème de Borel-Cœntelli, au fait que $(\frac{1}{n} S_n)$ tend vers zéro, presque sûrement.

  3) $P[S_n < x\sqrt{n}] \longrightarrow \int_{-\infty}^{x} (\exp \frac{-t^2}{2}) \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}$

- **Loi binomiale, loi de Poisson, loi de Laplace-Gauss.** Aucune candidate n'a su donner une définition correcte de la convergence en loi. L'usage de fonction génératrice d'une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$ est complètement ignoré. Cette fonction permet pourtant de calculer simplement les moments, d'étudier les sommes de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de traduire certaines convergences de lois. Le «processus de Poisson» a été proposé par plusieurs candidates. A ce sujet, il convient de distinguer :

  1°) sa définition «mathématique» ;

  2°) une construction explicite d'un exemple pour s'assurer que la définition n'est pas « vide » (utiliser, par exemple, une somme de variables indépendantes suivant une même loi exponentielle) ;

  3°) l'examen de différentes situations concrètes (appels téléphoniques,...) dont le processus de Poisson est un modèle. Le jury déplore une totale confusion entre le premier et le troisième point.

- **Indépendance et conditionnement.** Un énoncé de la loi des grands nombres a sa place dans cette leçon. Il peut être considéré comme une application intéressante du théorème de Stone-Weierstrass. La distinction entre probabilité sur un espace et probabilité sur $\mathbf{R}^n$, transportée par une variable $\mathbf{X}$, à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, et définie sur le premier espace n'est pas clairement perçue. Cette notion deviendrait plus accessible si l'on rappelait quelques propriétés de la mesure image. Ajoutons qu'il n'est pas aisé d'obtenir des explications pertinentes à propos de l'espérance du produit de variables indépendantes.

IV.2.4. LISTE DES LECONS D'ANALYSE, MECANIQUE, PROBABILITES

1. *Espaces métriques compacts, espaces métriques complets.*
2. *Exemples d'espaces compacts.*
3. *Applications, à l'analyse, de la compacité.*
4. *Connexité.*
5. *Espaces homéomorphes ; exemples et contre-exemples.*
6. *Utilisation des suites en topologie.*
7. *Exemples, tirés de l'analyse, d'espaces vectoriels normés.*
8. *Applications linéaires continues d'un espace vectoriel normé dans un autre ; exemples.*
9. *Le théorème du point fixe et ses applications.*
10. *Le théorème des accroissements finis et applications.*
11. *Différentes notions de convergence des suites de fonctions.*
12. *Suites et séries de fonctions.*
13. *Interversion des limites en analyse.*
14. *Applications du théorème de la limite monotone*
15. *Prolongement des fonctions.*
16. *Fonctions convexes.*
17. *Fonctions convexes d'une variable réelle.*
18. *Inégalités de convexité.*
19. $\mathbf{R}$*; construction et propriétés fondamentales.*
20. *Caractérisation du corps des réels.*
21. *Parties connexes de* $\mathbf{R}$ *et applications entre de telles parties.*
22. *Topologie de* $\mathbf{R}^n$.
23. *L'exponentielle réelle et ses différentes généralisations.*
24. *L'exponentielle complexe.*
25. *Le logarithme complexe.*
26. *Fonctions circulaires.*

27. *Séries numériques.*
28. *Etude, à partir d'exemples, des critères de convergence des séries numériques.*
29. *Etude des critères de convergence des suites numériques, à partir d'exemples.*
30. *Séries entières ; leur utilisation en analyse.*
31. *Suites récurrentes, définies par une relation de la forme* $u_{n+1} = f(u_n)$, *où* f *est une fonction à valeurs réelles.*
32. *Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.*
33. *Etude, sur des exemples, des méthodes de résolution d'équations différentielles du 1er ou du 2e ordre (le cas des systèmes linéaires à coefficients constants est supposé connu).*
34. *Fonctions réciproques.*
35. *Utilisation des développements limités.*
36. *Propriétés métriques des courbes planes.*
37. *Propriétés métriques des courbes gauches.*
38. *Mouvement à accélération centrale.*
39. *Loi binomiale, Loi de Poisson.*
40. *Indépendance et conditionnement.*
41. *Le jeu de pile ou face, (variables de Bernouilli indépendantes).*
42. *Problèmes d'extremums.*

IV.3 – EPREUVE D'ALGEBRE, GEOMETRIE

IV.3.1. REMARQUES GENERALES

Le programme de l'épreuve étant très limité, et l'algèbre (resp. la géométrie) n'étant que peu (resp. très peu) enseignée dans les maîtrises, il est normal que la plupart des leçons se placent au niveau du premier cycle. En contrepartie, le jury s'estime en droit d'exiger une certaine perfection formelle et un minimum d'aisance, notamment dans les démonstrations. En particulier, les «exposés» incorrects ou incomplets ont été à la source de bien des mauvaises notes. Certaines candidates confondent leçon élémentaire et leçon vide. D'autres, pensant masquer leur ignorance du sujet choisi, énumèrent des théorèmes sans rapport avec la question.

IV.3.2. REMARQUES PARTICULIERES (algèbre)

Les hypothèses concernant les anneaux ou les corps sont souvent imprécises. C'est en particulier le cas pour les éléments unités ou la caractéristique. Les notions les plus élémentaires sur la théorie des corps sont trop souvent ignorées ; par exemple le jury a quelquefois eu du mal à savoir ce qu'étaient les racines d'un polynôme (dans le corps de base, dans une extension...). Il est maladroit de consacrer dix minutes, ou plus, à des banalités (opérations sur les polynômes par exemple). Enfin certaines candidates énoncent, dans leur plan, de nombreux et impressionnants théorèmes puis ne proposent, comme exposé que des banalités ; ceci indispose le jury !

- **Divisibilité dans les anneaux.** Il faut donner de nombreux exemples et contre-exemples. Il est inutile et même ridicule de faire appel au lemme de Zorn pour démontrer qu'un anneau principal est factoriel.

- **Polynômes.** Les candidates ont tendance à présenter un plan passe-partout indépendant du texte précis de la leçon. Rappelons qu'il existe une condition nécessaire et suffisante, valable en toute caractéristique pour qu'une racine soit multiple.

- **Formes quadratiques.** Si Q est une forme quadratique sur E, il lui est associé une application auto-adjointe de E dans son dual. Ce fait est généralement connu mais insuffisamment exploité d'où, parfois , un abus de matrices. Cette remarque s'étend aux leçons sur les coniques. Il est bien de connaître la définition des sous-espaces isotropes mais il ne serait pas mauvais d'être capable de les exhiber. Par exemple le jury n'a jamais réussi à savoir quels étaient les plans isotropes de la forme $x^2 + y^2 - z^2$ et s'est agréablement délassé en demandant à une candidate de représenter le cone isotrope.

- **Réduction des endomorphismes.** Il faut parler du polynôme minimal et aborder, au moins partiellement la réduction de Jordan.

- **Formes bilinéaires alternées, groupe symplectique.** Il convient d'étudier les sous-espaces totalement isotropes. Le fait qu'un endomorphisme symplectique soit de déterminant 1 est non trivial. D'une façon un peu plus générale, les plans sont très pauvres pour tout ce qui touche à la structure des groupes classiques.

- **Algèbre linéaire.** Le calcul matriciel ne doit être utilisé qu'à bon escient. Trop de candidates se réfugient dans les matrices, faute d'être capables de raisonner directement sur les endomorphismes. Le lien entre la dualité et les équations d'un sous-espace est souvent mal perçu. La notion de complexification n'est pas comprise.

IV.3.3. REMARQUES PARTICULIERES (géométrie)

On ne peut que reprendre ici les remarques du jury masculin (1974). A l'exception peut-être des leçons sur les isométries, les candidates ne choisissent les leçons de géométrie que contraintes et forcées. On a beaucoup de mal à obtenir des figures et le moindre exercice d'application sème la panique. Les leçons se réduisent bien souvent à un formalisme vide et généralement très mal dominé, ou encore à un inconsistant verbiage matriciel, digne héritier de la défunte «géométrie analytique» d'antan. Faut-il signaler aux candidates que les vieux livres de géométrie se transforment agréablement en une collection d'exercices (des cas d'égalité des triangles aux propriétés bifocales des coniques). En tout état de cause, compte tenu de la place importante que tient

la géométrie dans l'enseignement secondaire, les candidates ne doivent pas s'attendre à une prochaine disparition des leçons de géométrie. En particulier le jury continuera à proposer des couplages de géométrie.

- **Coniques.** Il s'agit avant tout d'une illustration de la théorie des formes quadratiques ; il faut donc mettre soigneusement en évidence les propriétés utilisées des formes quadratiques. Aucune candidate n'a été capable de définir de façon précise une conique affine. Les propriétés bifocales des coniques à centre sont oubliées.

- **Isométries laissant invariante une figure.** Le cas des réseaux n'est jamais abordé.

- **Liaison entre géométrie affine et géométrie projective.** Cette leçon est rarement traitée de façon correcte. Le lien entre coordonnées barycentriques et projectives n'est pas perçu.

IV.3.4. LISTE DES SUJETS D'ALGEBRE ET DE GEOMETRIE

1. *Structures algébriques quotients.*
2. *Groupes finis ; exemples.*
3. *Groupe symétrique.*
4. *Sous-groupes distingués ; exemples.*
5. *Groupes opérant sur un ensemble ; applications.*
6. *Structure d'anneau ; applications.*
7. *Anneaux quotients de Z.*
8. *Idéaux d'un anneau commutatif.*
9. *Anneaux principaux.*
10. *Divisibilité dans les anneaux intègres.*
11. *Numération, bases, critères de divisibilité. Anneau des nombres décimaux.*
12. *Structure de corps ; caractéristique. Exemples.*
13. *Corps des nombres complexes.*
14. *Anneau des polynômes, à une indéterminée, sur un corps commutatif ; factorisation et applications.*
15. *Anneau des polynômes à une ou plusieurs indéterminées sur un corps commutatif.*
16. *Polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif ; racines.*
17. *Polynômes symétriques à plusieurs indéterminées.*
18. *Polynômes, à une indéterminée, sur un corps commutatif ; division euclidienne, congruences.*
19. *Divisibilité dans les anneaux de polynômes.*

20. *Division des polynômes suivant les puissances croissantes ; applications.*
21. *Fonctions polynômes.*
22. *Elimination. Résultant de deux polynômes.*
23. *Corps des fractions rationnelles sur un corps commutatif. Décomposition en éléments simples, et applications.*
24. *Bases et dimension dans les espaces vectoriels ; applications.*
25. *Sous-espaces d'un espace vectoriel.*
26. *Applications linéaires ; espaces vectoriels quotients.*
27. *Le rang en algèbre linéaire.*
28. *Groupe linéaire.*
29. *Dualité dans les espaces vectoriels.*
30. *Formes bilinéaires sur un espace vectoriel de dimension finie.*
31. *Formes bilinéaires alternées.*
32. *Groupe symplectique (en dimension finie, sur un corps commutatif de caractéristique différente de 2).*
33. *Formes multilinéaires alternées ; exemples.*
34. *Déterminant d'un endomorphisme ; applications.*
35. *Applications des déterminants.*
36. *Résolution des systèmes d'équations linéaires.*
37. *Valeurs propres, sous-espaces propres.*
38. *Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme ; applications.*
39. *Expressions matricielles réduites d'un endomorphisme d'espace vectoriel de dimension finie.*
40. *Polynôme minimal d'un endomorphisme.*
41. *Formes quadratiques. Décomposition en carrés. Classification sur* $\mathbb{R}$ *et sur* $\mathbb{C}$.
42. *Réduction d'une forme quadratique.*
43. *Espaces vectoriels euclidiens.*
44. *Groupe orthogonal en dimension finie.*
45. *Espaces vectoriels hermitiens.*
46. *Groupe unitaire en dimension finie.*
47. *Dualité dans les espaces euclidiens. Adjoint d'un endomorphisme. Endomorphismes symétriques. Réduction.*
48. *Dualité dans les espaces hermitiens. Adjoint d'un endomorphisme. Endomorphismes auto-adjoints. Réduction.*
49. *Espaces projectifs. Sous-espaces projectifs. Intersection. Repères projectifs.*
50. *Dualité dans les espaces projectifs.*

51. *Groupe projectif d'une droite projective complexe.*
52. *Groupe projectif dans un espace de dimension finie.*
53. *Homographies d'une droite projective réelle sur elle-même.*
54. *Homographies d'un plan projectif réel sur lui-même.*
55. *Homographies d'un plan projectif dans son dual.*
56. *Liaison entre géométrie affine et géométrie projective.*
57. *Groupe affine en dimension finie.*
58. *Sous-groupes et groupes quotients du groupe affine d'un espace affine de dimension finie.*
59. *Variétés affines d'un espace affine de dimension finie.*
60. *Espace affine de dimension finie : barycentre, groupe affine.*
61. *Isométries dans un plan affine euclidien.*
62. *Isométries dans un espace affine euclidien de dimension 3.*
63. *Isométries dans un espace affine euclidien de dimension finie.*
64. *Isométries d'un plan affine euclidien laissant globalement invariante une figure donnée.*
65. *Isométries d'un espace affine euclidien de dimension 3 laissant globalement invariante une figure donnée.*
66. *Similitudes directes et inverses dans un plan affine euclidien.*
67. *Similitudes dans un espace affine euclidien de dimension finie.*
68. *Projection orthogonale dans un espace affine euclidien ; problèmes d'angles et de distances.*
69. *Espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 ; produit mixte ; produit vectoriel ; applications.*
70. *Applications antisymétriques sur un espace vectoriel euclidien ; torseurs.*
71. *Pôles et polaires en géométrie plane.*
72. *Pôles et polaires en dimension 3.*
73. *Propriétés projectives des coniques ; dualité.*
74. *Coniques dans le plan affine réel.*
75. *Coniques dans le plan projectif réel.*
76. *Propriétés affines des coniques.*
77. *Propriétés métriques des coniques ; foyers.*
78. *Propriétés métriques des coniques ; équations réduites.*
79. *Faisceaux linéaires ponctuels des coniques.*
80. *Inversion plane ; groupe circulaire.*

81. *Vecteurs et sous-espaces isotropes relativement à une forme bilinéaire symétrique ou alternée.*
82. *Complexification ; vecteurs isotropes. Applications aux cercles.*
83. *Le cercle en géométrie plane.*
84. *La sphère et le cercle.*
85. *Réduction d'une matrice orthogonale. Applications géométriques.*
86. *Génératrices rectilignes des quadriques en dimension 3.*
87. *Propriétés métriques des quadriques en dimension 3.*
88. *Utilisations des nombres complexes en géométrie.*
89. *Racines n-ièmes de l'unité.*

V – BIBLIOTHEQUE DE L'AGREGATION

Les candidats étaient autorisés à utiliser pendant la préparation de leurs leçons tout livre imprimé vendu dans le commerce (à l'exclusion des textes dactylographiés ou ronéotypés).

En outre, ils pouvaient consulter sur place les ouvrages suivants :

ARTIN	*Algèbre géométrique* (Gauthier-Villars)
BASS	*Cours de Mathématiques* (Masson)
BERGER et GOSTIAUX	*Géométrie différentielle* (Colin)
BLANCHARD	*Corps non commutatifs* (Presses Universitaires)
BOURBAKI	Les tomes suivants : *Théorie des ensembles* *Algèbre* *Fonction d'une variable réelle* *Topologie générale* *Espaces vectoriels topologiques* *Intégration*
BROUSSE	*Mécanique* (Colin)
CABANNES H.	*Cours de mécanique générale* (Dunod)
CAGNAC	*Nouveau cours de mathématiques spéciales* (Masson) *Cours de mathématiques supérieures* (Masson)
CAGNAC et THIBERGE	*Géométrie.* Classes terminales C (Masson) *Arithmétique/Algèbre* – Classes terminales (Masson)
CARTAN	*Fonctions analytiques* (Hermann) *Formes différentielles* (Hermann) *Calcul différentiel* (Hermann)
CASANOVA	*Cours de mathématiques spéciales* (Belin)

CHAMBADAL et OVAERT	*Cours de mathématiques* (Gauthier Villars) (tome I, tome II, algèbre – tome II, analyse) *Algèbre linéaire* et *algèbre tensorielle* (Dunod)
CHAZEL	*Traité de mathématiques* (Hachette)
CHOQUET	*Cours d'analyse* (Masson) *L'enseignement de la géométrie* (Hermann)
CONDAMINE et VISSIO	*Mathématiques :* Terminales C et T (Delagrave)
COUTY	*Analyse* (Colin)
DIEUDONNE	*Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* (Hermann) *Sur les groupes classiques* (Hermann) *Calcul infinitésimal* (Hermann) *Eléments d'analyse* (Gauthier Villars) – tomes 1 et 2
DIXMIER	*Fondements de l'analyse* (Hermann) *Analyse M.P.* (Gauthier Villars)
DONEDDU	*Arithmétique générale* (Dunod) *Cours de mathématiques spéciales* (Dunod)
DUBREIL (M. et Mme)	*Leçons d'algèbre moderne* (Dunod)
DUBUC	*Géométrie plane* (Presses Universitaires)
EXBRAYAT et MAZET	*Algèbre, analyse, topologie* (Hatier)
FRENKEL	*Algèbre et géométrie* *Géométrie pour l'élève professeur* (Hermann)
GODEMENT	*Algèbre* (Hermann)
GOURSAT	*Cours d'analyse* (Gauthier Villars)
GOUYON	*Précis de mathématiques spéciales* (Vuibert)
HARDY G.H.	*A course of pure mathematics* (Cambridge University Press)
HOCQUENGHEM et JAFFARD	*Mathématiques* (Masson)
KREE	*Introduction aux mathématiques appliquées* (Dunod)
KRIVINE	*Théorie axiomatique des ensembles* (Presses universitaires)
LANG	*Introduction aux variétés différentiables* (traduction française) *Algebra* – *Linear Algebra*
LEFORT	*Mathématiques pour les sciences biologiques et agronomiques* (Colin)
MAC-LANE et BIRKHOFF	*Algèbre, structures fondamentales* (traduction française) *Les grands théorèmes* (traduction française)
Mme LELONG-FERRAND et ARNAUDIES	*Cours de mathématiques*, 4 tomes (Dunod)
Mme LELONG-FERRAND	*Géométrie différentielle* (Masson)
MAILLARD	*Classes terminales C* (Hachette)

MALLIAVIN	*Géométrie différentielle intrinsèque* (Hermann)
MARTIN P.	*Géométrie* (Colin)
NEVEU J.	*Bases mathématiques du calcul des probabilités* (Masson)
PISOT et ZAMANSKY	*Mathématiques générales* (Dunod) *Algèbre et algèbre linéaire* (Dunod)
QUEYSANNE	*Algèbre* (Colin)
RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX	*Mathématiques spéciales* (Masson) tome I : algèbre
RIESZ et NAGY	*Leçons d'analyse fonctionnelle* (Gauthier Villars)
RUDIN	*Réal and complex analysis* (Mac Granhill)
SAMUEL	*Théorie algébrique des nombres* (Hermann)
SCHWARTZ	*Cours d'analyse* (Hermann)
SERRE	*Cours d'arithmétique* (Presses universitaires)
VALIRON	*Cours d'analyse* (Masson)
VAUQUOIS	*Les probabilités* (Hermann)
ZAMANSKY	*Algèbre et analyse moderne* (Dunod)
ZISMAN	*Topologie algébrique* (Colin)