donc :

$$\begin{cases} \Delta = \Delta_1 = \Delta_2 & \text{: le triangle est équilatéral} \\ \omega^2 = \dfrac{m_1 + m_2 + m_3}{\Delta^3} = \text{constante} \end{cases}$$

On retrouve les résultats obtenus dans la première partie du problème dans le cas λ = constante.

II.8.4 LES NOTES (sur 40)

Candidats : 167 copies ; candidates : 73 copies

	0	1 à 5	6 à 10	11 à 15
Candidats :	17	60	47	27
Candidates :	20	27	12	5

	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 40
Candidats :	12	3	1	0
Candidates :	6	3	0	0

II.9 TEXTE DE L'EPREUVE DE PROBABILITES ET STATISTIQUES

INTRODUCTION

1° Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et T un sous-ensemble de la droite réelle $\mathbf{R}$; on appelle fonction aléatoire réelle (en abrégé f.a.r.), construite sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et T, toute application X de $T \times \Omega$ dans la droite réelle achevée $\overline{\mathbf{R}}(=[-\infty, +\infty])$, telle que, pour tout t de T l'application X_t définie par

$$(\forall \omega \in \Omega) \qquad X_t(\omega) = X(t, \omega)$$

soit mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\overline{\mathbf{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ (où $\overline{\mathcal{B}}$ désigne la tribu borélienne de $\overline{\mathbf{R}}$).

2° Soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$; une f.a.r. X construite sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et T est dite du second ordre relativement à P si et seulement si

$$(\forall t \in T) \qquad \int_\Omega (X_t)^2 dP < \infty$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur P, on pourra :

— dire plus brièvement que « X est du second ordre »;

— noter, pour toute variable aléatoire réelle (v.a.r.) Y définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$, et intégrable par rapport à P $\quad E(Y) = \int Y\,dP$;

— noter m l'application de T dans $\mathbf{R}$ définie par $(\forall t \in T) \quad m(t) = E(X_t)$, et l'appeler moyenne de la f.a.r. X ;

— dire que X est centré si $\forall t \in T \quad m(t) = 0$;

— noter K l'application de $T \times T$ dans $\mathbf{R}$ qui, à tout couple (s, t), associe la covariance des v.a.r. X_s et X_t et l'appeler covariance de la f.a.r. X;

— commettre l'abus de langage consistant à confondre l'espace des v.a.r. de carré intégrable et celui de leurs classes d'équivalence pour l'égalité P presque sûre (on le notera $L^2(P)$).

3° On rappelle qu'un noyau symétrique de type positif sur un sous-ensemble T de $\mathbf{R}$ est une application n de $T \times T$ dans $\mathbf{R}$ telle que

(i) $\quad (\forall (s, t) \in T \times T) \qquad n(s, t) = n(t, s)$

(ii) pour toute fonction réelle a sur T nulle sauf sur un ensemble fini de points on a

$$\sum_{(s,t) \in T\times T} a(s)\, a(t)\, n(s, t) \geqslant 0.$$

I

Soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et X une f.a.r. du second ordre construite sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et T.

1° Vérifier que $K(s, t)$ est un noyau symétrique de type positif.

2° Pour toute fonction réelle a nulle sauf sur un ensemble fini de points de T, $\sum_{t \in T} a(t) X_t$ est une v.a.r. de carré intégrable ; l'ensemble de ces variables forme un espace vectoriel $L(X, T)$. On appelle espace engendré par X, pour la loi P, la fermeture $H_P(X, T)$ de $L(X, T)$ dans $L^2(P)$ [s'il n'y a pas de risque de confusion on notera cet espace H_P]. On appelle f.a. gaussienne une f.a.r. du second ordre telle que $L(X, T)$ soit formé de variables de Laplace-Gauss (toujours pour la loi P). Vérifier que H_P est formé aussi de variables de Laplace-Gauss. Cet espace s'appelle l'espace gaussien engendré par X.

3° On suppose que : $\forall\, t \in \mathrm{T} \qquad m(t) = 0.$

a. Montrer que l'application $\mathrm{J} : \mathrm{H_P} \longrightarrow \mathbf{R}^{\mathrm{T}}$ définie par

$$\mathrm{J}(\mathrm{Z})\,(t) = \mathrm{E}[\mathrm{Z}\,\mathrm{X}_t] \quad \text{est injective;}$$

b. Soit $\mathcal{H}(\mathrm{K}, \mathrm{T})$ [en abrégé $\mathcal{H}(\mathrm{K})$] l'image de $\mathrm{H_P}$ par J. Montrer qu'on peut munir $\mathcal{H}(\mathrm{K})$ d'une structure d'espace de Hilbert telle que J soit un isomorphisme de $\mathrm{H_P}$ sur $\mathcal{H}(\mathrm{K})$ [application linéaire, inversible, préservant la norme]. On notera $< f, g >_{\mathcal{H}(\mathrm{K})}$ le produit scalaire de deux éléments f et g de $\mathcal{H}(\mathrm{K})$;

c. Soit $\mathrm{K}(s, .)$ la fonction définie sur T par $t \rightsquigarrow \mathrm{K}(s, t)$ montrer que la famille $[\mathrm{K}(s, .)]_{s\in\mathrm{T}}$ engendre $\mathcal{H}(\mathrm{K})$, et que,

$$\forall h \in \mathcal{H}(\mathrm{K}) \qquad h(t) = < h, \mathrm{K}(t, .) >_{\mathcal{H}(\mathrm{K})} .$$

En déduire en particulier que deux f.a.r. centrées construites sur le même ensemble d'indice T et ayant même covariance déterminent par l'intermédiaire de J le même espace de Hilbert.

4° Cette question consiste à démontrer la proposition suivante :

À tout noyau K symétrique de type positif sur T on peut associer un espace unique $\mathcal{H}(\mathrm{K}, \mathrm{T}) \subset \mathbf{R}^{\mathrm{T}}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\mathcal{H}(\mathrm{K}, \mathrm{T})$ est un espace de Hilbert engendré par $[\mathrm{K}(t, .)]_{t\in\mathrm{T}}$

(ii) $\forall\, h \in \mathcal{H}(\mathrm{K}, \mathrm{T}) \qquad h(t) = < h, \ \mathrm{K}(t, .) >_{\mathcal{H}(\mathrm{K})}$

Un tel espace s'appelle l'espace autoreproduisant associé à K.

On pourra admettre cette proposition ou la démontrer en considérant l'espace vectoriel $\mathcal{H}_0$ engendré par $[\mathrm{K}(t, .)]_{t\in\mathrm{T}}$ et en vérifiant que si a et b sont non nulles sur un ensemble fini de points les fonctions

$$f = \sum_{s\in\mathrm{T}} a(s)\,\mathrm{K}(s, .) \quad \text{et} \quad g = \sum_{t\in\mathrm{T}} b(t)\,\mathrm{K}(t, .) \text{ sont telles que}$$

$$\sum_{s\in\mathrm{T}} a(s)\ g(s) = \sum_{t\in\mathrm{T}} b(t)\ f(t).$$ En déduire qu'on peut munir $\mathcal{H}_0$ d'un produit scalaire qui permet de définir $\mathcal{H}(\mathrm{K}, \mathrm{T})$ par complétion.

5° *Exemples.*

a. Soit $\mathrm{T} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Décrire $\mathcal{H}(\mathrm{K})$ et donner une expression du produit scalaire correspondant;

b. soit $\mathrm{T} = [a, b]$, σ donné $\neq 0$ et $\mathrm{K}(s, t) = \sigma^2 \inf(s, t)$.

Montrer que $\mathcal{H}(\mathrm{K})$ est égal à

$$\left\{ f \in \mathbf{R}^{\mathrm{T}};\ \exists f^* : \int_a^b [f^*(u)]^2\, du < \infty \ \text{ et } \ \forall\, t, f(t) = f(a) + \int_a^t f^*(u)\, du \right\}$$

muni du produit scalaire $< f, g >_{\mathcal{H}(\mathrm{K})} = \int_a^b f^*(u)\, g^*(u)\, du$.

II

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace de probabilité. On rappelle que deux mesures R et S sur $\mathcal{A}$ sont étrangères si $\exists\, \mathrm{A} \in \mathcal{A} : \mathrm{R}(\mathrm{A}) = 0 = \mathrm{S}\left(\complement \mathrm{A}\right)$.

Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et Z un élément de $\mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, on notera $\mathrm{E}_{\mathrm{P}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{Z})$ l'espérance conditionnelle de Z par rapport à $\mathcal{B}$ pour la probabilité P.

Soit X une f.a.r. gaussienne centrée construite sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et $\mathbf{R}_+$, et P une probabilité sur $\mathcal{A}$, on notera K la covariance de X pour P et $\mathrm{H_P}$ l'espace gaussien engendré par X dans $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

On suppose que $\mathcal{A}$ est la tribu engendrée par $\left[\mathrm{X}_t\right]_{t\in\mathbf{R}_+}$.

1° Soit $\mathrm{Y} \in \mathrm{H_P}$, $\mathrm{Q_Y}$ la mesure de densité $\exp\left[\mathrm{Y} - \frac{1}{2}\mathrm{E_P}(\mathrm{Y}^2)\right]$ par rapport à P ; vérifier que $\mathrm{Q_Y}$ est une probabilité sur Ω telle que la f.a.r. X définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et $\mathbf{R}_+$ soit gaussienne pour $\mathrm{Q_Y}$. Trouver sa moyenne m_{Y} et sa covariance $\mathrm{K_Y}$. Soit $[\mathrm{Z}_n]_{n\in\mathrm{N}}$ une suite dans $\mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{T})$; vérifier que si $[\mathrm{Z}_n]_{n\in\mathrm{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ elle l'est aussi dans $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Q_Y})$ et réciproquement. Comparer les limites.

2° Soient sur $(\Omega, \mathcal{A})$ deux probabilités R et S absolument continues par rapport à une probabilité μ (on remarquera que R et S sont absolument continues par rapport à $\frac{\mathrm{R}+\mathrm{S}}{2}$), soient $\frac{d\mathrm{R}}{d\mu}$ et $\frac{d\mathrm{S}}{d\mu}$ les densités correspondantes.

a. Montrer que $\int \sqrt{\frac{d\mathrm{R}}{d\mu}\,\frac{d\mathrm{S}}{d\mu}}\; d\mu$ ne dépend pas de μ; on notera cette quantité $\int \sqrt{dR\,dS}$;

b. Montrer que R et S sont étrangères si et seulement si

$$\int \sqrt{dR\,dS} = 0\,;$$

c. Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$; $R_{\mathcal{B}}$, $S_{\mathcal{B}}$ et $\mu_{\mathcal{B}}$ les restrictions de R, S et μ à $\mathcal{B}$. Exprimer $\frac{dR_{\mathcal{B}}}{d\mu_{\mathcal{B}}}$ et $\frac{dS_{\mathcal{B}}}{d\mu_{\mathcal{B}}}$ comme des espérances conditionnelles par rapport à $\mathcal{B}$. Montrer que

$$\int \sqrt{dR_{\mathcal{B}}\,dS_{\mathcal{B}}} \geqslant \int \sqrt{dR\,dS}$$

[on rappelle l'inégalité de Jensen : soit Y concave sur un domaine convexe $\mathcal{D}$ de R^n, soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire; pour toute sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$

$$E^{\mathcal{B}}\, Y(X_1, \ldots, X_n) \leqslant Y\left(E^{\mathcal{B}} X_1, \ldots, E^{\mathcal{B}} X_n\right)\Big].$$

3º Soit Q une deuxième probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que X soit gaussienne pour Q de même covariance que pour P, de moyenne

$m_Q(t) = \int X_t\, dQ$ et d'espace gaussien H_Q.

Soit $Z \in L(X, T)$.

a. Soit $\mathcal{B}$ la sous-tribu de $\mathcal{A}$ engendrée par Z : calculer

$$\int \sqrt{dP_{\mathcal{B}}\,dQ_{\mathcal{B}}}\ ;$$

b. Vérifier que si P et Q ne sont pas étrangères, il existe une constante C telle que :

$$\forall Z \in L(X, T) \quad \left|\int Z\, dQ\right| \leqslant C\, \|Z\|_2\ ;$$

en déduire que P et Q sont soit étrangères, soit équivalentes. Vérifier que si P et Q sont équivalentes : $m_Q \in \mathcal{H}(K)$, calculer dans ce cas $\frac{dQ}{dP}$.

4º On suppose qu'il existe un système orthonormal de fonctions a_i dans $\mathcal{H}(K)$ tel que $m = \sum_{i=1}^{r} \theta_i a_i$, où $\theta_i \in \mathbf{R}$ $\forall i \in [1, \ldots, r]$.

Trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ_i.

III

Soit X une f.a.r. du second ordre construite sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et T, de moyenne m et de covariance K pour une probabilité P. On suppose que $X(t, \omega) = m(t) + Y(t, \omega)$ de sorte que la loi P_m de X est complètement déterminée par m et par la loi P_0 de Y. On suppose qu'il existe r fonctions $a_i(t)$ dans $\mathcal{H}(K)$ telles que $m = \sum_{i=1}^{r} \theta_i a_i$ $(\theta_i \in \mathbf{R}\ \forall i)$ de sorte que m décrit le sous-espace M de $\mathcal{H}(K)$ engendré par la famille $[a_i]_{i=1,\ldots,r}$. On suppose connus P_0 et la famille a_i et on désire estimer une fonction f de m au moyen de X (f est à valeur dans $\overline{\mathbf{R}}$). Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P_m \quad m \in M)$ le modèle statistique correspondant. On supposera que $H_{P_m}(X, T) = H_{P_0}(X, T)$ $\forall m$ (on le notera $H(X)$), on notera J l'isomorphisme défini en I, 3º, *a*.

On dit que U est un Estimateur Linéaire Sans Biais de $f(m)$ [en abrégé ELSB] si $U \in H(X)$ et $E_m(U) = \int U dP_m = f(m)$ $\forall m \in M$.

On vérifiera que : $\forall U \in H(X)$ la variance de U ne dépend pas de m et on la notera var U.

On dit que U^* est un Estimateur Linéaire Sans Biais de Variance Minimum [ELSBVM] de $f(m)$ si var $U^* \leqslant$ var U pour tout U ELSB de $f(m)$.

1º *a.* Vérifier que $\forall V \in H(X)$ $E_m(V) = \langle m, J(V)\rangle_{\mathcal{H}(K)}$

b. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que f soit linéairement estimable sans biais.

c. Soit f linéairement estimable sans biais, montrer qu'il existe un unique ELSBVM $\hat{f}$ de f. Exprimer $\hat{f}$ au moyen de l'isomorphisme J et de l'opérateur de projection P^M de $\mathcal{H}(K)$ sur M.

2º Soit p un entier $p \geqslant r$. Soit $T = \{0, 1, \ldots, p\}$. On désigne par A la matrice $\{A_{ij} = \langle a_i, a_j\rangle_{\mathcal{H}(K)}\}$ et par a le vecteur de coordonnées a_i $(i = 1, \ldots, r)$. On suppose K et A inversibles.

a. Vérifier que θ_i est linéairement estimable sans biais;

b. Si A est la matrice identité trouver $\widehat{\theta}_i$ ELSBVM de θ_i;

c. Trouver $\widehat{\theta}_i$ dans le cas général (soit B une matrice telle que $BB^t = A^{-1}$, on pourra poser $\alpha = B\,a$; B^t désigne la matrice transposée de B).

3° On se replace dans les conditions de II, 4°; trouver un ELSBVM de θ_i.

IV

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P_\theta, \theta \in \Theta \subset R)$ un modèle statistique et μ une probabilité dominant P_θ pour tout θ de Θ, soit $p_\theta = \dfrac{dP_\theta}{d\mu}$, on suppose $p_\theta \in L^2(\mu)$. On dit que f est estimable sans biais s'il existe $U \in L^2(\mu)$ tel que $f(\theta) = E_\theta(U) = \int U\,dP_\theta \quad \forall\,\theta \in \Theta$. U^* est dit μ-efficace si $\|U^*\|_{L^2(\mu)} \leqslant \|U\|_{L^2(\mu)} \quad \forall\, U$ estimateur sans biais de f.

1° Soit $R(\theta_1, \theta_2) = \langle p_{\theta_1}, p_{\theta_2} \rangle_{L^2(\mu)}$. Vérifier que R est un noyau symétrique de type positif, décrire $\mathcal{H}(R)$. Soit $L^2(p_\theta, \theta \in \Theta)$ le sous-espace engendré par $[p_\theta]_{\theta \in \Theta}$ dans $L^2(\mu)$.

On notera encore J l'isomorphisme de $L^2(p_\theta, \theta \in \Theta)$ sur $\mathcal{H}(R)$.

2° Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit estimable sans biais. Trouver un estimateur sans biais μ-efficace de f.

3° Si $\mu = P_{\theta_0}$, que peut-on dire d'un estimateur P_{θ_0} efficace pour tout θ_0. Vérifier que si $\mu = P_{\theta_0}$, $1 \in \mathcal{H}(R)$ et $J(1) = 1$.

4° On se place dans les conditions de II, 4°;

soit $\theta^0 = (\theta_1^0, \ldots, \theta_r^0)$ fixé et $\mu = P_{\theta^0}$.

(de façon générale on notera θ_i la coordonnée d'ordre i du vecteur θ).

Calculer $R(\theta^1, \theta^2)$ et $\dfrac{\partial}{\partial u_i} R(u, v)\,[\theta^0, \theta]$ (dérivée de R prise au point (θ^0, θ)). Vérifier que

$$\frac{\partial}{\partial u_i} R(u, v)\,[\theta^0, \theta] = \left\langle \frac{\partial p_\theta}{\partial \theta_i}(\theta^0), p_\theta \right\rangle_{L^2(\mu)}.$$

En déduire un estimateur sans biais de variance minimum de θ_i.

V

Quand on observe un phénomène et qu'on veut estimer une fonction f on ne connaît généralement pas tout le passé de ce phénomène, il est intéressant de comparer l'estimation qu'on peut faire connaissant le passé de $-n$ à 0 à celle qu'on pourrait faire si on le connaissait depuis $-\infty$.

Si K un noyau symétrique de type positif sur $\mathbf{Z}$, $\mathcal{H}(K)$ l'espace auto-reproduisant associé. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit $T_n = \{-n, \ldots, -1, 0\}$, soit K_n la restriction de K à T_n et soit $f \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{H}(K_n, T_n)$.

a. Soit H un espace de Hilbert, $[H_n]_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de sous-espaces fermés de H tels que

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad H_n \subset H_{n+1} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_n} = H\ ;$$

Soit $[Z_n]_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de H tels que $\forall\, m \leqslant n \quad P^{H_m}(Z_n) = Z_m$ (P^{H_m} désigne le projecteur de H sur H_m).

Montrer que si $\lim\limits_{n \to \infty} \|Z_n\|^2 < \infty$, il existe $Z \in H$ tel que $\|Z_n - Z\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ et $Z_n = P^{H_n}(Z) \ \forall\, n$.

b. Soit H_n le sous-espace fermé de $\mathcal{H}(K)$ engendré par

$$[K(t, .)]_{t \in T_n}.$$

Montrer qu'il existe une suite $[f^{(n)}]_{n \in \mathbf{N}}$, telle que $\forall\, n \in \mathbf{N} \quad f^{(n)} \in H_n, \ \forall\, t \in T_n \quad f^{(n)}(t) = f(t)$ et $f^{(m)} = P^{H_m}[f^{(n)}]$; en déduire que $f \in \mathcal{H}(K)$ si et seulement si $\lim\limits_{n \to \infty} \|f\|_{\mathcal{H}(K_n, T_n)} < \infty$.

c. Soit f estimable linéairement sans biais sur Z et $\widehat{f}$ un ELSBVM de f. Soit $\widehat{f}_n$ un ELSBVM de f obtenu en ne considérant X que sur T_n, vérifier que $\widehat{f}_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \widehat{f}$ dans $\mathcal{H}(K)$.

II. 10 RAPPORT SUR L'EPREUVE DE PROBABILITES ET STATISTIQUES

II.10.1 THEME DU SUJET

Il s'agit de la théorie des noyaux reproduisants (ARONSJAHN 1954) et de ses applications à la statistique des processus gaussiens (PARZEW 1960). Certaines des démonstrations demandées se trouvent dans un cours de J. NEVEU (Montréal 1969).

II.10.2 *RESUME DE LA SOLUTION*

Il ne s'agit que d'indications relatives à certaines questions.

Partie I

1) Pratiquement une question de cours.

2) Il suffit de remarquer que $E(X_n) \to E(X)$ et $\sigma^2(X_n) \to \sigma^2(X)$ grâce à l'inégalité de Schwarz et de conclure en utilisant la convergence des fonctions caractéristiques et en identifiant les limites en loi et dans L^2.

3) a) Z, orthogonale dans H_P, à un système de générateurs constitué par $\{X_t,\ t \in \tau\}$, est nulle : donc $E(Z_1 X_t) = E(Z_2 X_t)$ entraîne $Z_1 = Z_2$.

b) Il suffit de transporter sur $J(H_P)$ la structure de H_P en posant $<f, g>_{\mathscr{H}(K)} = <J^{-1} f, J^{-1} g>_{H_P}$.

c) Comme $J(X_s) = K(S, \cdot)$ la famille $(K(S, \cdot), s \in T)$ engendre $J(H_P) = \mathscr{H}(K); <h, K(t, \cdot)>_{\mathscr{H}(K)} = <J^{-1}(h), X_t>_{H_P} = J \cdot J^{-1}(h)(t) = h(t)$.

L'espace vectoriel $\mathscr{H}_o$ engendré par $K(S_o \cdot)$ est indépendant des processus de covariance K ainsi que la norme : sa fermeture pour cette norme est donc indépendante du processus de covariance K.

4) L'égalité à démontrer établit que $<f, g>_{\mathscr{H}_o} = \sum a(.s) g(s) = \sum b(t) f(t)$ ne dépend pas de la représentation de f et g ; comme $<f, g>_o$ ainsi défini est bilinéaire et positive (du fait que K est de type positif) il existe une inégalité de Schwarz : $|f(t)|^2 = |<f, K(t,.)>_{\mathscr{H}_o}|^2 \leqslant \| f \|_{\mathscr{H}_o} K(t,t)$ de sorte que $f = 0 \Rightarrow f \equiv 0$. On pouvait aussi vérifier que $<f, g>_{\mathscr{H}_0} = 0$

$\forall g \in \mathscr{H}_0$ entraîne $f = 0$ ce qui est immédiat puisque $f(t) = <f, K(t, \cdot)>_{\mathscr{H}_0}$.

Cette dernière inégalité, prolongée à $\mathscr{H}(K)$ permet d'identifier $\mathscr{H}(K)$ à un sous-ensemble de R^T.

a) $\mathscr{H}(K) = \left\{ f;\ \exists C_k(f) : f = \sum_1^n C_k(f) K(k, \cdot) \right\}$

si K^{-1} existe, $\mathscr{H}(K) = \mathbf{R}^n$ et $<f, g> = {}^t f K^{-1} g$

si rang $K = r$ $\mathscr{H}(K) \sim \mathbf{R}^r$ et $<f, g>$ est défini comme en 4.

b) le produit scalaire à considérer est $\frac{1}{\sigma^2}\left[\frac{f(a)\, g(a)}{a^2} + \int f^*(u) g^*(u)\, du\right]$

où $[a, b] \subset \mathbf{R}^+$.

Il suffit alors de vérifier que l'ensemble indiqué est un espace de Hilbert, engendré par $K(t, \cdot)$ tel que $h(t) = <h, K(t, \cdot)>_{\mathscr{H}(K)}$ ce qui est élémentaire.

Partie II

Faut-il rappeler que X est gaussienne réelle si et seulement si

$$E(\exp u X) = \exp\left\{\frac{u^2}{2} E(X^2) + u\, E(X)\right\} ?$$

1) Si $Z \in H_P$ $\int \exp u Z\, d Q_Y = E_P\left\{\exp\ u Z + Y - \frac{1}{2} E_P(Y^2)\right\}$,

comme $u Z + Y \in H_P$ cette expression est égale à

$\exp\left[\frac{u^2}{2} E_P(Z^2) + u\, E_P(ZY)\right]$ ce qui indique que pour Q_Y Z est gaussienne de moyenne $E_P(ZY)$ et de moment d'ordre deux $E_P(Z^2)$

En particulier $E_{Q_Y}(X_t) = m_Y(t) = E(X_t Y) = J(Y)$

$$E_{Q_Y}(X_t^2) = E_P(X_t^2) \text{ et } K_Y(s, t) = K(s, t)$$

Enfin $E_P (Z_n - Z_m)^2 = E_Q (Z_n - Z_m)^2 - (E_Q (Z_n - Z_m))^2$ et si

Z_n est de Cauchy dans $L^2(P)$ elle l'est dans $L^2(Q)$ et réciproquement. Il est immédiat d'identifier les limites.

2) a) Si B est la tribu engendrée par Z, l'image de P_B (resp Q_B) par Z pour P (resp Q) de sorte que

$$\int \sqrt{dP_B\, dQ_B} = \int_R \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[\exp -\frac{x^2}{2\sigma^2} \exp -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right]^{1/2} dx =$$

$$\exp\left(-\frac{m^2}{8\sigma^2}\right)^{1/2}$$

en posant $m = E_Q(Z)$, $\sigma^2 = E_P(Z^2) = E_Q(Z-m)^2$

b) Si P et Q ne sont pas étrangères $\int \sqrt{dP_B\, dQ_B} \geqslant \int \sqrt{dP\, dQ} = c > 0$

Donc $|m| \leqslant c\,\sigma$ soit $|\int Z\, dQ| \leqslant c \, \| Z \|_2$ dans $L(X,T)$.

$Z \mapsto \int Z\, dQ$ se prolonge à H_P en une forme linéaire bornée, il existe donc

W dans H_P tel que $\forall\, Z \in H_P \; \langle W, Z \rangle_{H_P} = \int Z\, dQ$.

En particulier $m_Q = E_P (W X_t) \in \mathscr{H}(K)$.

Soit $Q_W = exp\,(W - \frac{1}{2} E_P W^2)$. P, Q_W fait de X une *f.a* gaussienne de

covariance K, d'espérance $J(W)$ et $\int exp\, X\, dQ = \int exp\, X\, dQ_W$

donc Q et Q_W coïncident

sur $B(H)$; ainsi $\dfrac{dQ}{dP} = exp \left[J^{-1}(m_Q) - \frac{1}{2} E \left([J^{-1}(m_Q)]^2 \right) \right]$.

4) Soit $T_i = J^{-1}(a_i)$, T_i est centrée réduite et $\dfrac{dQ}{dP} = exp \left[\sum_1^r \theta_i T_i - \frac{1}{2} \sum_1^r \theta_i^2 \right]$

T_i est donc estimateur du maximum de vraisemblance.

Partie III

$E_m (X_t - m(t))^2 = E_o (Y_t + m)^2 - m(t)^2 = K(t,t)$: *var* X_t est indépendant de m donc aussi *var* U, $\forall U \in H(X)$.

1) a) Comme $m \in \mathscr{H}(K)$, $E_m(X_s) = m(s) = \langle m, K(s,\cdot)\rangle_{\mathscr{H}(K)} =$

$\langle m, J(X_s)\rangle_{\mathscr{H}(K)}$, égalité qui s'étend à $H(X)$.

b) f est estimable sans biais si
et seulement s'il existe $g \in \mathscr{H}(K)$: $f(m) = \langle m, g\rangle_{\mathscr{H}(K)}$

c) $\langle m, g\rangle_{\mathscr{H}(K)} = \langle m, P^M g\rangle_{\mathscr{H}(K)}$ et $\hat{f} = J^{-1}(P^M g)$.

2) b) $\theta_i = \langle m, a_i \rangle$ donc $\hat{\theta} = J^{-1}(a)$ $\left(\hat{\theta} = (\theta_i), a = (a_i) \right)$

c) α est une famille orthornormée dans $\mathscr{H}(R)$, or $m = {}^t\theta B^{-1} \alpha$ comme

J et P^M sont linéaires ${}^t\hat{\theta} B^{-1} = J^{-1}({}^t\alpha)$: $\hat{\theta} = J^{-1}(A^{-1}\alpha)$

3) $J^{-1}(a_i) = T_i$: on retrouve le maximum de vraisemblance.

Partie IV

2) f estimable sans biais $\Leftrightarrow f \in \mathscr{H}(R)$ et $\hat{f} = J^{-1}(f)$.

4) $$\frac{dP_\theta}{dP_{\theta^0}} = exp \left\{ \sum_1^r (\theta_i - \theta_i^0)\, T_i - \frac{1}{2} \left[\sum_1^r \theta_i^2 - \sum_1^r (\theta_i^0)^2 \right] \right\}$$

$R(\theta^1, \theta^2) = exp \sum_1^r (\theta_i^1 - \theta_i^0)(\theta_i^2 - \theta_i^0)$ et

$$\frac{\partial}{\partial u_i} R(u,v)[\theta^0, \theta] = \left\langle \frac{\partial p\theta}{\partial \theta_i}(\theta^0), P\theta \right\rangle_{L^2(\mu)}$$

par dérivation (à justifier) sous le signe intégral, ce qui signifie que $\dfrac{\partial}{\partial u_i}(R) \in \mathscr{H}(R)$

et que $J^{-1}\left(\dfrac{\partial}{\partial u_i} R\right) = \dfrac{\partial p\theta}{\partial \theta_i}(\theta^0)$ de sorte que, de nouveau, $\hat{\theta}_i = T_i$.

Partie V

b) $f \in \mathscr{H}(\mathrm{K}_n, \mathrm{T}_n) \Leftrightarrow f(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{C}_i^{(n)}(f)\, \mathrm{K}(t_i, \cdot)$ sur T_n, soit

$f^{(n)} = \sum_{1}^{n} \mathrm{C}_i^{(n)}(f)\, \mathrm{K}(t_i, \cdot)$ sur T, $f^{(n)}$ satisfait aux conditions de l'énoncé

puisque si $m < n$, si $t_m \in \mathrm{T}_m \subset \mathrm{T}_n$.

$$< f^{(n)}, \mathrm{K}(t_m, \cdot) > = f^{(n)}(t_m) = f(t_m) = f^{(m)}(t_m) = < f^{(m)}, \mathrm{K}(t_m, \cdot) >$$

Ainsi $\|f\|_{\mathscr{H}(\mathrm{K}_n, \mathrm{T}_1)} = \|f^{(n)}\|_{\mathscr{H}(\mathrm{K}_n, \mathrm{T}_n)}$ est croissante avec n.

Alors si $f \in \mathscr{H}(\mathrm{K})$, $f^{(n)} = \mathrm{P}\left[f \mid \mathscr{H}(\mathrm{K}_n, \mathrm{T}_n)\right]$ et

$$\|f\|_{\mathscr{H}(\mathrm{K}_n, \mathrm{T}_n)} \leqslant \|f\|_{\mathscr{H}(\mathrm{K})} < \infty$$

Si $\lim \|f\|_{\mathscr{H}(\mathrm{K}_n, \mathrm{T}_n)} < \infty$, il existe F dans $\mathscr{H}(\mathrm{K})$ tel que

$f^{(n)} = \mathrm{P}\,[\mathrm{F} \mid \mathscr{H}(\mathrm{K}_n, \mathrm{T}_n)]$ et,sur T_n, $< \mathrm{F}, \mathrm{K}(t, \cdot) > = \mathrm{F}(t) = f(t)$,

donc $f \in \mathscr{H}(\mathrm{K})$.

II.10.3 OBSERVATIONS SUR LES COPIES DES CANDIDATS

L'impression dominante des correcteurs est que la plupart des candidats n'ont qu'une connaissance superficielle des notions élémentaires de la théorie des probabilités et qu'en particulier une écrasante majorité ignore la notion de mesure image et donc de loi de variable aléatoire.

Le problème contenait de nombreuses questions de géométrie élémentaire dans les espaces d'Hilbert destinées seulement à préparer, puis à exploiter les résultats purement probabilistes. Ces questions ont été traitées avec plus ou moins de rigueur et de maladresse. Dans les plus simples, il faut souvent déplorer un laisser-aller affligeant, conduisant parfois à un discours incohérent.

Dans les deux parties plus typiquement probabilistes, les candidats ont rivalisé d'imagination,de fantaisie : on confond variable aléatoire et fonctions déterministes,

espace de probabilité et espace où une variable prend ses valeurs ; bien des candidats ont cherché la densité de Radon-Nykodim d'une mesure sur Ω par rapport à une mesure sur $\mathbf{R}$! C'est vraiment là le point auquel il faudra s'attaquer sérieusement : il est illusoire de prétendre étudier une théorie sans en établir solidement les fondements ; s'il est probable que la plupart des candidats sont capables de définir une mesure image, il est manifeste qu'ils ont une totale inexpérience du maniement de cette notion.

Signalons maintenant les principales erreurs commises.

Partie I

1) Cette question est élémentaire, on a relevé cependant quelques erreurs grossières : de nombreux candidats se ramènent au cas d'un vecteur aléatoire et affirment alors que la matrice de covariance est «définie positive» sans d'ailleurs que le sens de cette expression soit bien clair. Certains essaient de grouper les termes par couples et ne s'aperçoivent pas qu'ils doublent les termes carrés, d'autres raisonnent par récurrence sans aucune correction, quelques-uns confondent covariance et corrélation, sans parler de ceux qui affirment que $\forall$ X, Y cov. (X, Y) $\geqslant 0$!

2) Beaucoup de candidats semblent avoir entendu dire que la limite en moyenne quadratique ou en loi de variables gaussiennes est gaussienne, bien peu malheureusement l'expriment avec la rigueur nécessaire à un énoncé de théorème. Parmi ceux qui essaient de faire la démonstration,beaucoup s'obstinent à passer par la convergence en loi et, pour les uns, affirment qu'elle est équivalente à la convergence ponctuelle des densités (sans se soucier d'ailleurs de son existence pour la mesure limite), pour les autres, se livrent à quelques trafics suspects sur un logarithme douteux de la fonction caractéristique. Enfin nombreux sont ceux qui affirment que la somme de deux variables gaussiennes est toujours gaussienne !

3) Une des questions la moins maltraitée , mais le plus souvent abordée maladroitement. Presque toujours le raisonnement conduisant à l'identité des espaces autoreproduisants associés à deux fonctions aléatoires de même covariance se décompose comme suit : les combinaisons linéaires de fonctions K (S, $\cdot$) sont identiques donc aussi leur fermeture (sans préciser pour quelle norme !) ensuite on identifie d'une façon ou d'une autre les topologies.

4) Il y avait deux points à bien remarquer : d'une part une fonction f de $\mathscr{H}_0$ peut avoir plusieurs représentations et il importe que $<f, g>_{\mathscr{H}_0}$ ne dépende pas de cette représentation, d'autre part pour assurer que $<f, g>$ est un produit scalaire il faut vérifier que $<f, f> = 0 \Rightarrow f \equiv 0$. D'une façon générale ces points n'ont pas été abordés alors que certains essaient de vérifier que $<f, g> \geqslant 0 \ \forall f, g$!!

5) La première partie a le plus souvent donné lieu à des développements inutiles, alors que les candidats ne distinguaient pas les cas,suivant que K est inversible ou pas. Dans la deuxième partie, malheureusement entachée d'une erreur de transcription du produit scalaire, on rencontre plus de maladresses que d'erreurs.

Partie II

1) On a dit plus haut ce qu'il faut penser des erreurs monumentales rencontrées dans cette partie.

2) Ces questions sont souvent convenablement traitées.

4) Ceci devait constituer une prime pour les candidats ayant obtenu la forme de la densité en 3 b, il ne s'en est malheureusement pas trouvé !

Parties III, IV, V

Ces parties ont été souvent abordées et particulièrement par les candidats du type «grappilleur» qui croient rentables de traiter toutes les questions faciles de toutes les parties. On notera surtout des négligences et des imprécisions, nous n'en citerons que deux :

En III 1) a) la majorité des candidats affirme que $m = \mathrm{J}\ (1)$, sans s'assurer que $1 \in \mathrm{H}\ (\mathrm{X})$; aucun candidat n'a remarqué que J, défini comme en I.3, est défini à partir de la variable centrée de sorte que

$$\mathrm{J}\ (\mathrm{U})\ (t) = \mathrm{E}_{\mathrm{P}_0}\ (\mathrm{UX}_t) \text{ qui diffère de } \mathrm{E}_m\ (\mathrm{UX}_t).$$

II.10.4 OBSERVATIONS SUR LES COPIES DES CANDIDATES

Une fois de plus, il faut constater qu'un trop grand nombre de candidates abordent cette épreuve sans avoir de véritables connaissances en calcul des probabilités. Malgré la difficulté du sujet, il est inadmissible que, sur 337 copies, l'on en trouve 26 blanches, 92 qui méritent la note 0 et que, sur les 219 copies restantes, il n'y en ait que 113, soit à peine la moitié, qui sachent résoudre correctement la première question qui est pratiquement une question de cours.

Sur le plan de la forme, disons que trop de candidates prennent leur copie pour une feuille de brouillon et alignent des calculs qui n'aboutissent à aucun résultat. Une remarque concernant l'orthographe : les noms et les adjectifs semblent être devenus invariants au pluriel, les articles, eux, continuant à en prendre la marque !

Passons le problème en revue et signalons les principales erreurs commises.

Partie I

Nous avons déjà commenté la première question.

Dans la seconde, beaucoup de candidates perdent un temps fou à montrer un résultat classique que l'énoncé se contente de rappeler : $\mathrm{L}^2\ (\mathrm{P})$ est un espace vectoriel, donc $\mathrm{L}\ (\mathrm{X},\mathrm{T})$ aussi. Pour montrer que la limite (en m. q.) d'une suite de variables gaussiennes est elle-même gaussienne (éventuellement dégénérée, cela n'a été signalé qu'une fois), on cherche trop souvent sans précautions la limite de

la densité que l'on baptise parfois «fonction de répartition» ou «fonction caractéristique» pour les besoins de la cause. A signaler la rencontre fréquente d'une définition inhabituelle de la fonction caractéristique sous la forme

$$\Phi_{\mathrm{X}}\ (t) = \mathrm{E}\ (e^{2i\pi t \mathrm{X}})$$; les correcteurs l'ont admise.

A la troisième question, l'injectivité est souvent partiellement ou mal démontrée et l'on trouve plusieurs fois l'argument suivant :

$$\mathrm{E}\ (\mathrm{Z}\,\mathrm{X}_t) = 0 \Rightarrow \mathrm{ZX}_t = 0 \quad \mathrm{P}.p.p.\ !$$

Le transport de structure qui fait l'objet du (b) ne devrait pas donner lieu à des développements touffus : manque de connaissances en algèbre. En fait, quelques lignes suffisaient.

De même, la partie (c) était rapidement traitée si l'on avait bien compris (b). Mais on ignore souvent ce qu'est une famille génératrice d'un espace de Hilbert et l'on invoque de façon confuse les familles sommables.

La quatrième question était délicate. L'égalité demandée est en général bien traitée, le produit scalaire correctement défini, mais sa définition n'est justifiée que dans une copie car les candidates oublient que la décomposition suivant les générateurs n'est pas nécessairement unique. Une seule candidate a su montrer que le produit ainsi défini était séparant et la fin de la question, la complétion, est presque toujours escamotée.

Enfin, le premier exemple, très simple, aurait dû être traité correctement quand il a été abordé ; ce n'est malheureusement pas le cas. Le second était délicat et les insuffisances $(a \geqslant 0)$ et erreurs (sur le produit scalaire) de l'énoncé ne facilitaient pas la tâche.

Partie II

Le début de la première question (montrer que Q_{Y} est une probabilité sur Ω) aurait dû n'offrir aucune difficulté si les candidates avaient des idées claires sur les mesures et leurs densités ; ce n'est, hélas, le cas que de quelques-unes d'entre elles. La suite de la question, très difficile, n'a été traitée entièrement par aucune candidate. Tout au plus a-t-on récompensé quelques copies qui avaient des idées sur la démonstration.

A la deuxième question, de nouveau les lacunes en matière de théorie de la mesure et d'intégration apparaissent au grand jour : on écrit des densités sans s'occuper de savoir s'il y a absolue continuité, on met en dénominateur des densités qui risquent d'être nulles, on ne sait pas interpréter la nullité d'une intégrale... La partie (c), relative aux probabilités conditionnelles, est souvent bien vue, mais quatre candidates seulement se donnent la peine de montrer que l'application Y considérée est concave.

Enfin, les questions trois et quatre n'ont pratiquement été abordées par aucune candidate.

Parties III, IV, V

La troisième partie n'était pas difficile. Aussi, une bonne vingtaine de candidates ont-elles pu gagner des points en traitant correctement la première question et les deux premières parties de la seconde.

De même, les deux premières questions de la partie IV ont été bien traitées dans une quinzaine de copies.

Enfin, la question (a) de la cinquième partie a été correctement résolue dans huit copies ; mais il ne s'agissait pas d'une question proprement probabiliste et, peut-être, ce résultat assez classique était-il connu de certaines candidates. La question (b), par contre, n'a été que partiellement vue, et par quatre candidates seulement.

II.10.5 LES NOTES DES CANDIDATS (sur 40)

Nombre de copies corrigées : 528 – Moyenne : 7,9.
272 notes $\geqslant 7$; 184 notes $\geqslant 11$; 131 notes $\geqslant 13$.

Répartition des notes par classes d'amplitude 4 :

0	1 à 4	5 à 9	10 à 14	15 à 19	20 à 24	25 à 29	30 à 34	35 à 40
52	165	109	93	61	24	14	5	5

II.10.6 LES NOTES DES CANDIDATES (sur 40)

Nombre de copies corrigées : 337 – Moyenne : 7,5 (copies blanches exclues).
171 notes $\geqslant 4$; 119 notes $\geqslant 9$; 87 notes $\geqslant 13$; 69 notes $\geqslant 15$.
Répartition des notes par classes d'amplitude 5 :

0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35
92	67	48	43	37	19	3	2

III - ÉPREUVES ORALES

CANDIDATS

III.1 – REMARQUES GENERALES

- Comme les années précédentes, les candidats ont été répartis, en fonction des résultats de l'écrit, entre deux demi-jurys comprenant chacun une commission d'analyse et une commission d'algèbre. Une rotation des examinateurs a permis d'harmoniser les notes attribuées par ces deux demi-jurys.

- Les modifications du programme(d'ailleurs reconduites pour 1976)n'ont causé aucune difficulté. Dans le cas d'une leçon de probabilités couplée avec une leçon d'analyse – ce qui, en cette année d'innovation, était systématique – peu de candidats ont opté pour la première ; ceux qui l'ont fait ont d'ailleurs rarement eu à le regretter. Il va de soi que le jury se réserve le droit, pour les concours suivants, de coupler un sujet de mécanique et un sujet de probabilités, ou deux sujets concernant la même discipline.

- A plusieurs reprises, un candidat s'est vu refuser la possibilité d'utiliser un cours polycopié par les soins d'une université à l'usage exclusif de ses étudiants. Le jury tient à préciser à cette occasion qu'il n'a nullement l'intention de «figer» la préparation au concours, mais qu'il se doit de garantir l'égalité, au moins théorique, des chances des candidats. Il n'ignore d'ailleurs pas que les échecs de certains professeurs en exercice sont souvent dûs à leur isolement et à la difficulté qu'ils ont de bénéficier de la préparation que certains centres dispensent avec beaucoup d'efficacité, et il se félicite de l'initiative prise cette année par le C.N.T.E. d'organiser un séminaire de préparation à l'oral à l'intention de ceux des admissibles qui avaient suivi son enseignement.

- Enfin, sans anticiper sur les rapports techniques qui vont suivre, le président du jury croit devoir souligner l'importance des exercices dans l'enseignement des mathématiques et, par voie de conséquence, dans le déroulement du concours. Lorsqu'un candidat n'a prévu aucun exemple ni exercice dans son plan, il incite le jury à lui proposer les siens (en restant, bien entendu, dans le cadre du sujet traité). Loin de s'affoler, le candidat doit alors profiter de l'occasion qui lui est donnée de faire preuve de sang-froid et d'intuition ; il va de soi qu'on n'exige pas de lui la même virtuosité que s'il s'agissait d'une question préparée et que, dans certains cas, on admet volontiers qu'il ne fournisse qu'une partie de la solution.

  Voici, à titre d'exemple, trois exercices proposés au cours d'exposés sur la divisibilité des polynômes, sur le théorème du point fixe et sur les notions d'application linéaire continue et de norme :

– **Pour tout polynôme** $P \in K[X]$, $P(P(X)) - X$ **est divisible par** $P(X) - X$.