II.6.3. LES NOTES (sur 40)

Candidats (671 copies – Moyenne : 7,9/40) :

n ⩽ 4	4 < n ⩽ 9	9 < n ⩽ 14	14 < n ⩽ 19	19 < n ⩽ 24	24 < n ⩽ 29	29 < n ⩽ 34	34 < n
318	89	125	79	28	22	6	4

Candidates (342 copies – Moyenne : 6,2/40) :

n ⩽ 4	4 < n ⩽ 9	9 < n ⩽ 14	14 < n ⩽ 19	19 < n ⩽ 24	24 < n ⩽ 29	29 < n ⩽ 34	34 < n
159	84	63	26	7	2	0	1

II.7 TEXTE DE L'EPREUVE DE MECANIQUE GENERALE

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

Il sera tenu le plus grand compte de la présentation et de la rédaction des copies.

Les candidats sont priés de respecter les notations de l'énoncé et de n'employer aucune abréviation abusive.

L'unité d'angle est le radian; le temps est désigné par t.

On considère un système matériel (Σ) constitué par un nombre fini n $(n \geqslant 3)$ de points matériels M_i, de masses respectives m_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ qui se déplacent par rapport à un repère absolu $(\mathcal{R})$ en s'attirant mutuellement en raison directe de leur masse et en raison inverse du carré de leur distance, les unités étant choisies de telle sorte que le coefficient de proportionnalité soit égal à l'unité; ainsi la résultante des forces qui agissent sur le point générique M_i est :

$$\vec{\mathcal{F}}_i = m_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{m_j}{\left\| \overrightarrow{M_iM_j} \right\|^3} \overrightarrow{M_iM_j}$$

PREMIÈRE PARTIE

On suppose que le centre d'inertie O du système matériel (Σ) est fixe par rapport à $(\mathcal{R})$ [ce qui ne restreint pas la généralité] et *on se propose d'étudier les mouvements de (Σ) au cours desquels la figure formée par les points M_i reste semblable à la configuration initiale.*

En vertu de cette hypothèse, on peut poser :

$$\overrightarrow{OM_i} = \lambda(t)\, \vec{s}_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

où les $\left\|\vec{s}_i\right\|$ sont constants et λ est une fonction positive du temps t, inconnue *a priori*, supposée deux fois continûment différentiable.

La figure constituée par les points μ_i définis par $\overrightarrow{O\mu_i} = \vec{s}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est alors de forme invariable et on appelle (S) le *solide fictif*, dit *associé à* (Σ), constitué par les points $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ affectés des masses $m_1, m_2, \dots, m_n$ respectivement. On désigne par $Oxyz$ (de vecteurs unitaires $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) les axes centraux d'inertie de (S), par A, B, C les moments d'inertie de (S) par rapport aux axes Ox, Oy, Oz respectivement, par $\vec{\omega}$ le vecteur rotation instantanée de (S) dans son mouvement par rapport à $(\mathcal{R})$.

On introduit le vecteur $\vec{\Omega}$ et la variable τ définis par :

$$\lambda^2 \vec{\omega} = \vec{\Omega} \; ; \quad dt = \lambda^2 \cdot d\tau$$

et on pose :

$$\vec{\Omega} = p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z} \; ; \qquad \vec{s}_i = a_i\vec{x} + b_i\vec{y} + c_i\vec{z} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

les a_i, b_i, c_i étant évidemment des constantes.

En vertu de l'hypothèse de similitude, on peut aussi écrire :

$$\vec{\mathcal{F}}_i = \frac{1}{\lambda^2}\vec{F}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \; ,$$

où les $\vec{F}_i$ sont des vecteurs constants par rapport au solide *associé* (S); on pose :

$$\vec{F}_i = X_i\vec{x} + Y_i\vec{y} + Z_i\vec{z} \; ,$$

où les X_i, Y_i, Z_i sont des constantes.

I

1° En appliquant le théorème du moment cinétique au système (Σ), montrer que p, q, r, considérés comme fonctions de τ, sont solutions du système différentiel :

$$A\frac{dp}{d\tau}+(C-B)\,qr=0\ ;\qquad B\frac{dq}{d\tau}+(A-C)\,rp=0\ ;$$

$$C\frac{dr}{d\tau}+(B-A)pq=0$$

2° Montrer que le vecteur accélération $\vec{\Gamma}_i$ du point M_i dans son mouvement par rapport à $(\mathcal{R})$ est donné par la formule :

$$\vec{\Gamma}_i=\frac{1}{\lambda^2}\left\{-\left[\frac{d^2\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{d\tau^2}+\frac{1}{\lambda}\vec{\Omega}^2\right]\vec{s}_i+\frac{1}{\lambda}\left(\frac{d\vec{\Omega}}{d\tau}\right)_{\mathcal{R}}\times\vec{s}_i+\frac{1}{\lambda}(\vec{\Omega}.\vec{s}_i)\vec{\Omega}\right\}$$

où $\vec{\Omega}^2$ désigne le carré scalaire de $\vec{\Omega}$, $\vec{\Omega}.\vec{s}_i$ le produit scalaire de $\vec{\Omega}$ et de $\vec{s}_i$, $\left(\frac{d\vec{\Omega}}{d\tau}\right)_{\mathcal{R}}\times\vec{s}_i$ le produit vectoriel de $\left(\frac{d\vec{\Omega}}{d\tau}\right)_{\mathcal{R}}$ par $\vec{s}_i$

[bien entendu, $\left(\frac{d\vec{\Omega}}{d\tau}\right)_{\mathcal{R}}=\lambda^2\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$, $\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$ étant la dérivée temporelle de $\vec{\Omega}$ par rapport à $(\mathcal{R})$].

3° Écrire les équations obtenues en projetant sur Ox, Oy, Oz l'équation vectorielle traduisant la loi fondamentale de la mécanique pour chaque point M_i.

On éliminera de ces équations les dérivées de p, q, r par rapport à τ en utilisant I, 1° et on introduira, pour simplifier l'écriture, les notations α, β, γ définies par

$$B-C=\alpha A\quad,\quad C-A=\beta B\quad,\quad A-B=\gamma C$$

II

Dans cette section II de la première partie on considère le cas où les n points M_i sont alignés.

On suppose que la droite qui les porte est l'axe Oz, de sorte que $A=B$, $C=0$. On supposera $r=0$ et l'on expliquera pourquoi cette hypothèse n'est pas restrictive.

1° Montrer que p et q sont constants.

Dans ce qui suit, on choisira les axes Ox et Oy pour que $q=0$.

2° Que peut-on dire du mouvement, supposé possible, du système (Σ)?

Calculer λ en fonction de τ et en déduire que t s'exprime en fonction de τ au moyen de fonctions élémentaires (le calcul effectif de t en fonction de τ n'est pas demandé).

3° Expliciter les Z_i en fonction des m_j et des c_j.

On suppose que les masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont données.

Montrer que la détermination de $c_1, c_2, \ldots, c_n$ conduit au problème suivant : rendre minimum

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant n,\ i\neq j}\frac{m_i m_j}{|c_i-c_j|}$$

sous la condition $\sum_{i=1}^{n} m_i c_i^2=$ constante. En déduire que le problème admet au moins une solution.

III

Dans cette section III de la première partie, on considère le cas où les n points M_i sont dans un même plan.

On suppose que ce plan est le plan xOy.

1° Démontrer que les quantités :

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{d\tau^2}+\frac{1}{\lambda}(q^2+r^2)\quad,\quad\frac{d^2\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{d\tau^2}+\frac{1}{\lambda}(r^2+p^2)\quad,\quad\frac{pq}{\lambda}$$

restent constantes au cours du mouvement.

2° Des résultats précédents et des équations du I, 1°, déduire que p^2+q^2 et $\frac{p^2+q^2}{\lambda}$ sont indépendants du temps.

Deux cas sont donc à examiner :

a. $\lambda =$ constante : montrer que ce cas n'est possible que si l'on a en même temps $p = q = 0$.

b. $p = q = 0$: que peut-on dire de la direction du plan xOy et de r ? Calculer λ en fonction de τ.

Que peut-on dire du mouvement, supposé possible, du système (Σ)?

3° Les masses $m_1, m_2, \dots, m_n$ sont supposées données.

Ramener à un problème de minimum lié (voir II, 3°) le problème de la détermination des points μ_i dans le plan xOy et montrer que ce dernier admet au moins une solution.

4° Examiner le cas $n = 3$. Montrer que le triangle formé par les points doit être équilatéral.

IV

Démontrer que le cas où *les n points M_i ne sont ni alignés, ni coplanaires est impossible.*

[On pourra montrer, à partir du I, 3°, que si les points M_i ne sont ni alignés, ni coplanaires, p, q, r sont proportionnels à $\sqrt{\lambda}$, puis en utilisant les équations du I, 1°, qu'on est conduit à une impossibilité.]

DEUXIÈME PARTIE

I

Les fonctions intervenant dans cette question sont supposées suffisamment régulières pour que soit assurée la validité des calculs.

Définitions préliminaires.

On considère le système différentiel :

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

où les X_i sont des fonctions scalaires des n variables scalaires $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Soit f une fonction scalaire de $x_1, x_2, \dots, x_n$.

On appelle *dérivée temporelle de f par rapport au système différentiel* (1) et on note $\frac{Df}{Dt}$ la fonction de $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\frac{Df}{Dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i$$

Soit maintenant le système de m équations ($m \leqslant n$) :

$$(2) \quad f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 ; f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 ; \dots ; f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

Si ces équations entraînent

$$\frac{Df_1}{Dt} = 0 , \frac{Df_2}{Dt} = 0 , \dots , \frac{Df_m}{Dt} = 0 ,$$

on dit que *le système d'équations* (2) *est un système de relations invariantes par rapport au système différentiel* (1).

[Alors toute solution de (1) qui vérifie les équations (2), pour une valeur t_0 de t, les vérifie pour toutes les valeurs de t].

1° Soit un système différentiel de la forme, dite *canonique* :

$$(3) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} , \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

où H est une fonction des $2n$ variables

$$q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n.$$

Montrer que H est une intégrale première du système (3).

2° On suppose dans ce qui suit que le système (3) admet en outre une relation invariante :

$$(4) \qquad f(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$$

et que cette équation (4) peut être résolue par rapport à p_1 :

$$p_1 = \varphi(q_1, q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n)$$

On pose :

$K(q_1, q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n) =$
$H\left(q_1, q_2, \dots, q_n, \varphi(q_1, q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n), p_2, \dots, p_n\right)$

Établir que K obéit à l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial K}{\partial q_1} + \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_j} \frac{\partial K}{\partial p_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_j} \frac{\partial K}{\partial q_j} \right) = 0 \tag{5}$$

3° Montrer que le système de $2n-1$ équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = \varphi\,(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_2, \ldots, p_n)\ ; \\ \dfrac{\partial K}{\partial q_j} = 0\ ; \quad \dfrac{\partial K}{\partial p_j} = 0 \quad (j=2, 3, \ldots, n) \end{array} \right. \tag{6}$$

est un système de relations invariantes par rapport à (3).

[On pourra montrer que : $\dfrac{D\left(\dfrac{\partial K}{\partial q_j}\right)}{Dt}$ et $\dfrac{D\left(\dfrac{\partial K}{\partial p_j}\right)}{Dt}$ sont des combinaisons linéaires des $\dfrac{\partial K}{\partial q_h}$ et $\dfrac{\partial K}{\partial p_h}$ $(h=2, 3, \ldots, n)$]

Il existe alors une famille de solutions de (3) qui vérifie les $2n-1$ équations (6). Montrer que la détermination de cette famille se ramène à une quadrature.

4° Montrer que cette famille de solutions de (3) réalise l'extremum de H sous la condition $f(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$.

II

On reprend dans cette question le système matériel (Σ) du préambule dans le cas $n = 3$ et on suppose que les trois points M_1, M_2, M_3 se meuvent dans un plan rapporté à des axes orthonormés I X, I Y liés au repère absolu ($\mathcal{R}$). On appelle (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) les composantes sur I X et I Y des vecteurs $\overrightarrow{M_3M_1}$, $\overrightarrow{M_3M_2}$.

1° Montrer que la fonction des forces d'attraction U ne dépend que des ξ_i, η_i $(i=1, 2)$ et que les équations du mouvement de M_1 et M_2 autour de M_3 peuvent s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_i \xi''_i - \dfrac{m_i}{m_1+m_2+m_3}(m_1\xi''_1 + m_2\xi''_2) = \dfrac{\partial U}{\partial \xi_i} \\ m_i \eta''_i - \dfrac{m_i}{m_1+m_2+m_3}(m_1\eta''_1 + m_2\eta''_2) = \dfrac{\partial U}{\partial \eta_i} \end{array} \right. \quad (i=1, 2)$$

(les accents désignent des dérivées par rapport au temps).

2° On pose :

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} m_i (\xi'^2_i + \eta'^2_i) - \frac{1}{2(m_1+m_2+m_3)} \left[\left(\sum_{i=1}^{2} m_i \xi'_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{2} m_i \eta'_i \right)^2 \right] - U$$

$$\pi_i = \frac{\partial H}{\partial \xi'_i}\ ; \quad \chi_i = \frac{\partial H}{\partial \eta'_i} \quad (i=1, 2)$$

Interpréter H et en donner l'expression en fonction des ξ_i, η_i, π_i, χ_i.

Montrer que les équations du mouvement de M_1 et M_2 autour de M_3 peuvent se mettre sous la forme *canonique* [voir I, 1°].

Prouver que $\sum_{i=1}^{2} (\xi_i \chi_i - \eta_i \pi_i)$ est une intégrale première du système différentiel canonique ainsi obtenu. Quelle est sa signification mécanique ?

3° Considérant $\sum_{i=1}^{2} (\xi_i \chi_i - \eta_i \pi_i) - k = 0$, où k est une constante arbitraire, comme une relation invariante par rapport au système canonique et utilisant les résultats des I, 3° et 4°, mettre en évidence une famille de solutions à deux paramètres du problème plan des trois points matériels s'attirant suivant la loi de Newton.

On montrera que la figure formée par les trois points reste de forme invariable et, explicitant U en fonction des ξ_i, η_i, on retrouvera des résultats obtenus dans la première partie II et III.

II.8 RAPPORT SUR L'EPREUVE DE MECANIQUE

II.8.1 THEME DU SUJET

On sait que Lagrange, dans un mémoire célèbre, a montré que le problème des trois corps se laissait résoudre élémentairement si la figure formée par les trois points restait semblable à elle-même au cours du temps. Sa démonstration était très compliquée (voir le tome I du *«Traité de mécanique céleste»* de Tisserand) et Lagrange pensait qu'il était impossible de la simplifier si l'on n'admettait pas *a priori* que les trois points se déplaçaient dans un plan fixe. En 1933, Carathéodory a montré que Lagrange avait surestimé la difficulté et a donné une solution simple et élégante de la question. C'est une solution quelque peu modifiée et généralisée (voir l'ouvrage de Hamel : *Theoreksche Mechanik*) qui constitue la première partie du problème. Elle ne fait appel qu'à des connaissances de mécanique et d'analyse du niveau du premier cycle.

La seconde partie est consacrée à la mécanique analytique. Il s'agit du théorème de Levi-Civita sur la recherche de solutions particulières d'un système canonique autonome quand celui-ci possède des relations invariantes en involution (en fait dans le cas particulier où existe une seule relation invariante) et de l'élégante application qu'en a faite son illustre auteur aux solutions de Lagrange de rotation du problème plan des trois corps.

II.8.2 REMARQUES GENERALES

167 candidats ont composé en mécanique. Malgré une légère amélioration par rapport à l'an dernier (due, peut-être, à la facilité de certaines questions), les résultats sont médiocres.

Aucun n'a montré que, dans les sections II et III de la première partie, les points M_i décrivaient des coniques de foyer O suivant la loi des aires.
De trop nombreux candidats ont parlé de rotation instantanée du **système** (Σ) et ont calculé son moment cinétique absolu en O comme s'il s'agissait d'un solide.
Rares sont ceux qui ont obtenu les résultats demandés dans le 1) de la section III de la première partie. Il suffisait pourtant de constater que les quantités considérées satisfaisaient à deux groupes de n équations linéaires à cœfficients constants et que, les M_i n'étant pas alignés, deux équations de chaque groupe étaient indépendantes. En ce qui concerne la seconde partie, les candidats, dans leur grande majorité, se sont arrêtés au 2) du I.

II.8.3 RESUME DE LA SOLUTION

Question I.I.

1) Le moment cinétique absolu de (Σ) au point O est évidemment constant par rapport à $(\mathcal{R})$:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \, \vec{OM_i} \times \left(\frac{d\vec{OM_i}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{\mathscr{C}}$$

Mais

$$\left(\frac{d\vec{OM_i}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \frac{d\lambda}{dt}\vec{s_i} + \lambda\,\vec{\omega}\times\vec{s_i}$$

de sorte que l'on a :

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \, \vec{s_i} \times (\vec{\Omega}\times\vec{s_i}) = \vec{\mathscr{C}}$$

ce qui peut s'interpréter ainsi : le moment cinétique en O du solide fictif (S) supposé animé de la rotation instantanée $\vec{\Omega}$ est constant dans $\mathcal{R}$.

On a : $$\mathrm{A}p\,\vec{x} + \mathrm{B}q\,\vec{y} + \mathrm{C}r\,\vec{z} = \vec{\mathscr{C}}$$

Ecrivant que $\left(\frac{d\vec{\mathscr{C}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = 0$, donc que $\left(\frac{d\vec{\mathscr{C}}}{dt}\right)_{\mathrm{S}} + \omega\times\vec{\mathscr{C}} = 0$,

on obtient les relations demandées.

2) Le théorème de Coriolis donne :

$$\vec{\Gamma}_i = \frac{d^2\lambda}{dt^2}\vec{s_i} + 2\,\vec{\omega}\times\frac{d\lambda}{dt}\vec{s_i} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\lambda\vec{s_i} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\lambda\vec{s_i})$$

Il suffit d'introduire $\vec{\Omega}$ et τ et d'utiliser la formule du double produit vectoriel.

3) Projetant $m_i\,\vec{\Gamma}_i = \vec{\mathscr{F}_i} = \frac{1}{\lambda^2}\,\vec{\mathrm{F}_i}$ sur Ox, Oy, Oz et remarquant que, grâce au I, 1), on a :

$$\left(\frac{d\vec{\Omega}}{d\tau}\right)_{\mathcal{R}} = \alpha q r\,\vec{x} + \beta r p\,\vec{y} + \gamma p q\,\vec{z}\,,$$

on obtient :

$$-\left[\frac{d^2\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{d\tau^2}+\frac{1}{\lambda}\left(q^2+r^2\right)\right]a_i+\frac{pq}{\lambda}(1-\gamma)b_i+\frac{rp}{\lambda}(1+\beta)c_i=\frac{X_i}{m_i}\quad (i=1,2,\ldots,n)$$

et $2n$ autres équations par permutation circulaire.

Question I.II

Les points M_i étant sur Oz, r n'a plus de signification et peut être pris nul.

1) I. 1) donne $p=p_0=Cte$, $q=q_0=Cte$. $\vec{\Omega}$ est alors lié à $Oxyz$ et parallèle au plan xOy ; les axes issus de O perpendiculaires à Oz étant tous centraux d'inertie pour (S), on peut prendre Ox parallèle à $\vec{\Omega}$, donc $q=0$.

2) Soit M_1 le point de plus grande cote. $\vec{\mathscr{F}}_1$, résultante des attractions de M_2, $M_3, \ldots, M_n$ sur M_1 et l'axe Oz sont de sens contraire ; en outre :

$$\vec{\mathscr{F}}_1=\frac{\vec{F}_1}{\lambda^2}=\frac{Z_1\,\vec{z}}{\lambda^2}=\frac{Z_1\,\|\vec{s}_1\|^2}{OM_1^2}\,\vec{z}$$

Tout se passe donc comme si M_1 était soumis à une attraction newtonienne de la part de O ; M_1 décrit donc une conique de foyer O suivant la loi des aires ; les autres M_i décrivent des coniques homothétiques.

(Remarquons d'ailleurs que $\vec{\omega}=\dfrac{\vec{\Omega}}{\lambda^2}=\dfrac{p_0}{\lambda^2}\,\vec{x}$. La vitesse angulaire de rotation de Oz est $\omega=\dfrac{p_0}{\lambda^2}$, de sorte que $OM_i^2\cdot\omega=p_0\,\|\vec{s}_i\|^2=$ constante : c'est bien la loi des aires).

Puisque $a_i=b_i=0$, $X_i=Y_i=0$, les $2n$ premières équations du I,3) sont identiquement vérifiées ; les n autres s'écrivent :

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{d\tau^2}+\frac{p_0^2}{\lambda}=-\frac{Z_i}{m_i\,c_i}\quad (i=1,2,\ldots,n)$$

Ce mouvement n'est donc possible que si les $-\dfrac{Z_i}{m_i c_i}$ sont égaux (voir 3°).

Désignant par K leur valeur commune, on a :

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{k}{p_0^2}\left[1+\epsilon\cos\left(p_0\tau+\delta\right)\right]\quad(\epsilon,\delta=Ctes)$$

L'intégrale donnant $t(\tau)$ porte sur une fraction rationnelle de $\cos(p_0\tau+\delta)$, donc se calcule au moyen de fonctions élémentaires.

3) On a :

$$Z_i=m_i\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} m_g\,\frac{c_j-c_i}{|c_i-c_j|^3}$$

Ces relations $m_i\,c_i\,k=-Z_i$ s'écrivent donc :

$$k\,\frac{\partial}{\partial c_i}\sum_{i=1}^{n} m_i\,c_i^2+\frac{\partial}{\partial c_i}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\frac{m_i\,m_j}{|c_i-c_j|}=0$$

On est donc ramené au problème : chercher l'extremum de :

$$\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\frac{m_i\,m_j}{|c_i-c_j|}\quad\text{sous la condition}\quad\sum_{i=1}^{n} m_i c_i^2=\text{constante.}$$

Les $\dfrac{m_i\,m_j}{|c_i-c_j|}$ étant positifs, il ne peut s'agir que de minimum.

$\sum_{i=1}^{n} m_i c_i^2=Cte$ montre que les $|c_i|$ sont bornés, donc aussi les $|c_i-c_j|$; par suite, $\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\dfrac{m_i\,m_j}{|c_i-c_j|}$ est bornée inférieurement par un nombre strictement positif quand $\sum_{i=1}^{n} m_i c_i^2=Cte$. L'ensemble $\left\{\sum_{i=1}^{n} m_i\,c_i^2=Cte,\ \sum_{i=1}^{n} m_i\,c_i=0\right\}$ étant compact et $\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\dfrac{m_i\,m_j}{|c_i-c_j|}$ étant continue sur ce compact sauf aux points $c_i = c_j$ où elle est infinie, un raisonnement classique montre que

$$\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{m_i \, m_j}{|c_i - c_j|}$$ atteint sa borne inférieure.

Remarque

Le cas où la figure reste égale à elle-même est possible.

$\lambda = Cte = \lambda_0$ est solution de $\dfrac{d^2 (\frac{1}{\lambda})}{d\tau^2} + \dfrac{p_0{}^2}{\lambda} = k$ avec $k = \dfrac{p_0{}^2}{\lambda_0}$

$\omega = \dfrac{p_0}{\lambda_0{}^2}$ est alors constant et le mouvement de chaque M_i est circulaire uniforme.

Question I.III

Dans ce cas, on a $c_i = 0$, $Z_i = 0$ et $C = A + B$ qui entraîne $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\gamma = \dfrac{A - B}{A + B}$.

1) Les n équations du dernier groupe de I, 3) sont identiquement vérifiées ; les autres s'écrivent :

$$\left.\begin{aligned} -\left[\frac{d^2 (\frac{1}{\lambda})}{d\tau^2} + \frac{1}{\lambda}(q^2 + r^2)\right] a_i + \frac{pq}{\lambda}(1-\gamma)\, b_i &= \frac{X_i}{m_i} \\ \frac{pq}{\lambda}(1+\gamma)\, a_i - \left[\frac{d^2 (\frac{1}{\lambda})}{d\tau^2} + \frac{1}{\lambda}(r^2 + p^2)\right] a_i &= \frac{Y_i}{m_i} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

Les M_i n'étant pas alignés, deux équations de chaque groupe sont sûrement indépendantes, ce qui entraîne le résultat demandé.

2) I,1) donne $\dfrac{dp}{d\tau} + qr = 0$, $\dfrac{dq}{d\tau} - rp = 0$, $\dfrac{dr}{d\tau} - \gamma p q = 0$,

donc $p^2 + q^2 = Cte$. III, 1) donne $\dfrac{p^2 - q^2}{\lambda} = Cte$, $\dfrac{pq}{\lambda} = Cte$,

donc $\dfrac{p^2 + q^2}{\lambda} = Cte$

a) $\lambda = Cte$ entraîne, par III, 1) : $q^2 + r^2 = Cte$, $r^2 + p^2 = Cte$

Comme $p^2 + q^2 = Cte$, on a p, q, r constants, donc $\vec{\Omega}$ est lié à (S), et par suite aussi $\vec{\omega} = \dfrac{\vec{\Omega}}{\lambda^2}$: $\vec{\Omega}$ est donc porté par un axe central d'inertie de (S).

Si $\vec{\Omega}$ est parallèle à Ox (resp. Oy), $q = r = 0$ (resp. $p = r = 0$) et, d'après III, 1) $X_i = 0$ (resp. $Y_i = 0$) ; $\vec{\mathscr{F}}_i$ est parallèle à Oy (resp. Ox), ce qui est impossible pour des points non alignés sur Oy (resp. Ox). Reste $\vec{\Omega}$ parallèle à Oz, donc $p = q = 0$.

b) Si $p = q = 0$, $\vec{\omega}$ a une direction fixe dans (S), donc dans (R) ; la direction du plan xOy est donc fixe dans l'espace ; en outre $\dfrac{dr}{dt} - \gamma p q = 0$ entraîne $r = Cte$.

Les équations du III, 1) donnent donc :

$$\frac{d^2 (\frac{1}{\lambda})}{d\tau^2} + \frac{r^2}{\lambda} = -\frac{X_i}{m_i \, a_i} = -\frac{Y_i}{m_i \, b_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Le mouvement n'est possible que si les $-\dfrac{X_i}{m_i \, a_i}$ et $-\dfrac{Y_i}{m_i \, b_i}$ sont égaux (voir 3)). Si k est leur valeur commune, on a :

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{k}{r^2}\left[1 + \epsilon \cos(r\tau + \delta)\right]$$

Les relations $-m_i \, a_i \, k = X_i$, $-m_i \, b_i \, k = y_i$ entraînent

$$\vec{\mathscr{F}}_i = -\frac{m_i \, k}{\lambda^2} \vec{s}_i$$

$\vec{\mathscr{F}}_i$ passe par O ; elle est dirigée vers O, car k = valeur de $\dfrac{r^2}{\lambda}$ quand $\cos(r\tau + \delta) = 0$, est positif ; $\| \vec{\mathscr{F}}_i \|$ est inversement proportionnelle à OM_i^2 : les M_i décrivent donc des coniques de foyer O suivant la loi des aires.

3) Il suffit d'expliciter X_i, Y_i et de porter dans les relations $-m_i a_i k = X_i$, $-m_i b_i k = Y_i$. On est ramené au problème : rendre minimum

$$\sum_{\substack{i,j \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j}{[(a_i - a_j)^2 + (b_i - b_j)^2]^{1/2}} \quad \text{sous la condition}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (a_i^2 + b_i^2) = \text{constante.}$$

4) Dans le cas n= 3, en posant $s_{ij} = [(a_i - a_j)^2 + (b_i - b_j)^2]^{1/2}$,

il vient :

$$k a_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} \frac{m_j (a_i - a_j)}{s_{ij}^3} \; ; \quad k b_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} \frac{m_j (b_i - b_j)}{s_{ij}^3}$$

Ecrivant ces relations pour $i = 1, 2$ et utilisant $\sum_{i=1}^{3} m_i a_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{3} m_i b_i = 0$, on obtient :

$$\left\{ \begin{aligned} &\left[k - \frac{m_2}{s^3_{12}} - \frac{m_3 + m_1}{s^3_{13}}\right] \vec{s}_1 + m_2 \left[\frac{1}{s^3_{12}} - \frac{1}{s^3_{13}}\right] \vec{s}_2 = 0 \\ &m_1 \left[\frac{1}{s^3_{12}} - \frac{1}{s^3_{23}}\right] \vec{s}_1 + \left[k - \frac{m_1}{s^3_{12}} - \frac{m_2 + m_3}{s^3_{23}}\right] \vec{s}_2 = 0 \end{aligned} \right.$$

Comme $\vec{s}_1$ et $\vec{s}_2$ ne sont pas parallèles, les crochets sont nuls.

Donc $s_{12} = s_{23} = s_{31}$ et $M_1 M_2 M_3$ est équilatéral ; de plus

$$k = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{s_{ij}^3}.$$

Le cas où le triangle reste égal à lui-même correspond à $\lambda = Cte = \lambda_0$;

les points sont animés de mouvements circulaires uniformes de vitesse angulaire

$$\omega = \pm \frac{(m_1 + m_2 + m_3)^{1/2}}{(\text{côté du triangle})^{3/2}}.$$

Question I.IV

Considérons les équations du I, 3). Puisque les M_i ne sont ni alignés, ni coplanaires, l'un des déterminants formé avec les a_i, b_i, c_i est différent de zéro ; les coefficients des a_i, b_i, c_i sont donc constants.

En outre $1 \pm \alpha$, $1 \pm \beta$, $1 \pm \gamma$ sont différents de zéro (par exemple, on a : $1 - \alpha = \frac{2}{A} \int_S y^2 \, dm > 0$).

Donc $\frac{pq}{\lambda}$, $\frac{qr}{\lambda}$, $\frac{rp}{\lambda}$ sont constants et par suite, on peut écrire $p = p_0 \sqrt{\lambda}$, $q = q_0 \sqrt{\lambda}$, $r = r_0 \sqrt{\lambda}$ (p_0, q_0, r_0 constants).

Le relation $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = Cte$ tirée de I, 1) entraîne alors λ constant ; donc $\vec{\Omega}$ et $\vec{\omega}$ sont liés à (S), donc sont portés par un axe central d'inertie. Pour fixer les idées, prenons Oz ; alors $p_0 = q_0 = 0$ et I, 3) donne $Z_i = 0$, ce qui est impossible, car les points M_i ne sont pas dans le plan xOy.

Question II. I

1) Ce résultat est classique.

2) Dérivant $p_1 = \varphi$ par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_j} \frac{dp_j}{dt} \right)$$

Ainsi toute solution de (3) qui satisfait à (4) vérifie :

$$-\frac{\partial H}{\partial q_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{\partial H}{\partial p_1} + \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right)$$

Il suffit d'utiliser les relations entre les dérivées partielles de K et de H pour obtenir (5).

3) $p_1 = \varphi$ est, par hypothèse, une relation invariante.

On trouve facilement :

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_1}\left[\frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial q_j\,\partial q_1} - \sum_{h=2}^{n}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial q_j\,\partial q_h}\,\frac{\partial \varphi}{\partial p_h} - \frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial q_j\,\partial p_h}\,\frac{\partial \varphi}{\partial q_h}\right)\right]$$

$$+ \sum_{h=2}^{n}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial q_j\,\partial q_h}\,\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial p_h} - \frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial q_j\,\partial p_h}\,\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial q_h}\right)$$

Dérivant par rapport à q_j la relation

$$(5) \quad \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial q_1} + \sum_{h=2}^{n}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_h}\,\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial p_h} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_h}\,\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial q_h}\right) = 0,$$

on voit que le crochet est une combinaison linéaire des $\dfrac{\partial \mathrm{K}}{\partial q_h}$ et $\dfrac{\partial \mathrm{K}}{\partial p_h}$, ce qui démontre le résultat.

Il existe donc une famille de solutions de (3) vérifiant (6). On la détermine en tirant de (6) $q_2, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ en fonction de q_1 et en portant dans

$\dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_1}$, ce qui donne q_1 en fonction de t par une quadrature.

4) Toute solution de la famille annule $\dfrac{\partial \mathrm{K}}{\partial q_h}$ et $\dfrac{\partial \mathrm{K}}{\partial p_h}$ $(h = 2, 3, \dots, n)$ et aussi $\dfrac{\partial \mathrm{K}}{\partial q_1}$ d'après (5), donc rend extremum K, c'est-à-dire réalise l'extremum de H sous la condition $f = 0$.

Question II.II

1) On a : $\mathrm{U} = \dfrac{m_1\, m_2}{\|\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}\|} + \dfrac{m_2\, m_3}{\|\overrightarrow{\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3}\|} + \dfrac{m_3\, m_1}{\|\overrightarrow{\mathrm{M}_3\mathrm{M}_1}\|}$; d'où le résultat.

Le système (Σ) est à 6 degrés de liberté ; si on prend pour paramètres ξ_i, η_i et les coordonnées X, Y du centre d'inertie dans IXY, on trouve pour l'énergie cinétique absolue :

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} m_i\,(\xi_i'^2 + \eta_i'^2) - \frac{1}{2(m_1+m_2+m_3)}\left[\left(\sum_{i=1}^{2} m_i \xi_i'\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{2} m_i \eta_i'\right)^2\right] + (m_1+m_2+m_3)(\mathrm{X}'^2 + \mathrm{Y}'^2)$$

Les équations de Lagrange se divisent en deux groupes. Les équations en X et Y sont $\mathrm{X}' = Cte$, $\mathrm{Y}' = Cte$, ce qui est bien connu ; les équations en ξ_i, η_i sont celles de l'énoncé. Ainsi, pour écrire les équations du mouvement relatif de M_1 et M_2 autour de M_3, on peut «laisser tomber» dans T le terme en $(m_1+m_2+m_3)(\mathrm{X}'^2 + \mathrm{Y}'^2)$.

2) Ce qui précède donne l'interprétation de H et montre que l'on peut mettre sous la forme canonique (dite de Poincaré) les équations du mouvement relatif.

On trouve facilement :

$$\mathrm{H} = \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2m_i}\left(\pi_i^2 + \chi_i^2\right) + \frac{1}{2m_3}\left[\left(\sum_{i=1}^{2}\pi_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{2}\chi_i\right)^2\right] - \mathrm{U}$$

On a alors :

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\sum_{i=1}^{2}(\xi_i\chi_i - \eta_i\pi_i) = \left(\xi_1\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \eta_1} - \eta_1\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \xi_1}\right) + \left(\xi_2\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \eta_2} - \eta_2\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \xi_2}\right)$$

Le second membre est le moment en M_3 du système $(\vec{\mathscr{F}}_1, \vec{\mathscr{F}}_2, \vec{\mathscr{F}}_3)$; il est donc nul; $\sum_{i=1}^{2}(\xi_1\chi_i - \eta_i\pi_i)$ est donc l'intégrale première du moment cinétique.

3) En prenant comme relation invariante $f \equiv \Sigma(\xi_i\chi_i - \eta_i\pi_i) - k = 0$, la méthode du I fournit une famille à deux paramètres (k et la constante d'intégration figurant dans l'expression de q_1 en fonction de t) de solutions définies par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial \xi_i} - \omega \dfrac{\partial f}{\partial \pi_i} = 0 \qquad \dfrac{\partial H}{\partial \eta_i} - \omega \dfrac{\partial f}{\partial \eta_i} = 0 \quad \text{(A)} \\[2ex] \dfrac{\partial H}{\partial \pi_i} - \omega \dfrac{\partial f}{\partial \pi_i} = 0 \qquad \dfrac{\partial H}{\partial \chi_i} - \omega \dfrac{\partial f}{\partial \chi_i} = 0 \quad \text{(B)} \end{cases}$$

où ω est un multiplicateur.

Dans les équations (B), on remplace f par sa valeur, $\dfrac{\partial H}{\partial \pi_i}$ par $\dfrac{d\xi_i}{dt}$ et $\dfrac{\partial H}{\partial \chi_i}$ par $\dfrac{dy_i}{dt}$; il vient :

$$\frac{d\xi_i}{dt} + \omega\, \eta_i = 0 \quad ; \quad \frac{d\eta_i}{dt} - \omega \xi_i = 0$$

M_1 et M_2 sont donc animés autour de M_3 de mouvements circulaires de vitesse angulaire ω , *a priori* non constante. Donc la figure formée par les trois points reste de forme invariable. Si on tient compte des expressions de H et de f, les équations (A) s'écrivent :

$$-\frac{\partial U}{\partial \xi_i} - \omega\, \chi_i = 0 \quad ; \quad -\frac{\partial U}{\partial \eta_i} + \omega \pi_i = 0$$

et par suite, les équations (B) deviennent :

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_i} + \frac{m_i}{m_3} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi_1} + \frac{\partial U}{\partial \xi_2} \right) + m_i\, \omega^2 \xi_i = 0$$

et une analogue avec les η_i

On pose :

$$\Delta_1^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 \ ; \ \Delta_2^2 = \xi_2^2 + \eta_2^2 \ ; \ \Delta^2 = (\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 ,$$

de sorte que :

$$U = \frac{m_1\, m_2}{\Delta} + \frac{m_2\, m_3}{\Delta_1} + \frac{m_3\, m_1}{\Delta_2}$$

et les équations deviennent :

$$\begin{cases} \left[\dfrac{m_3 + m_1}{\Delta_1^3} + \dfrac{m_2}{\Delta^3} - \omega^2 \right] \xi_1 + m_2 \left[\dfrac{1}{\Delta_2^3} - \dfrac{1}{\Delta^3} \right] \xi_2 = 0 \\[2ex] m_1 \left[\dfrac{1}{\Delta_1^3} - \dfrac{1}{\Delta^3} \right] \xi_1 + \left[\dfrac{m_2 + m_3}{\Delta_2^3} + \dfrac{m_1}{\Delta^3} - \omega^2 \right] \xi_2 = 0 \end{cases}$$

et deux analogues avec η_1 et η_2

Bien entendu, Δ, Δ_1 , Δ_2 restent constants.

On distingue deux cas.

1er cas – Les points sont alignés

On ne restreint pas la généralité en prenant M_2 entre M_3 et M_1 ;

alors $\Delta_1 = \Delta + \Delta_2$ et $\dfrac{\xi_1}{\xi_2} = \dfrac{\eta_1}{\eta_2} = \dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}$

Les équations deviennent :

$$\begin{cases} \Delta_1\, \omega^2 = \dfrac{m_3 + m_1}{\Delta_1^3} + \dfrac{m_2}{\Delta_2^3} + \dfrac{m_2}{\Delta^3} \\[2ex] \Delta_2\, \omega^2 = \dfrac{m_1}{\Delta_1^3} + \dfrac{m_2 + m_3}{\Delta_2^3} - \dfrac{m_2}{\Delta^3} \end{cases}$$

Ecrivant qu'elles sont compatibles, on obtient une équation du 5e degré pour $\rho = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$ et le théorème de Descartes montre aisément qu'elle a une racine positive et une seule. Donc si les masses sont données, on obtient une famille de mouvements à deux paramètres : Δ et l'angle fixant la position initiale de la droite portant les points.

2e cas – Les points forment un véritable triangle

Alors : $\dfrac{\xi_1}{\xi_2} \neq \dfrac{\eta_1}{\eta_2}$, de sorte que les cœfficients des ξ_i, η_i sont nuls ;

donc :

$$\begin{cases} \Delta = \Delta_1 = \Delta_2 & \text{: le triangle est équilatéral} \\ \omega^2 = \dfrac{m_1 + m_2 + m_3}{\Delta^3} = \text{constante} \end{cases}$$

On retrouve les résultats obtenus dans la première partie du problème dans le cas λ = constante.

II.8.4 LES NOTES (sur 40)

Candidats : 167 copies ; candidates : 73 copies

	0	1 à 5	6 à 10	11 à 15
Candidats :	17	60	47	27
Candidates :	20	27	12	5

	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 40
Candidats :	12	3	1	0
Candidates :	6	3	0	0

II.9 TEXTE DE L'EPREUVE DE PROBABILITES ET STATISTIQUES

INTRODUCTION

1° Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et T un sous-ensemble de la droite réelle $\mathbf{R}$; on appelle fonction aléatoire réelle (en abrégé f.a.r.), construite sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et T, toute application X de $T \times \Omega$ dans la droite réelle achevée $\overline{\mathbf{R}}(=[-\infty, +\infty])$, telle que, pour tout t de T l'application X_t définie par

$$(\forall \omega \in \Omega) \qquad X_t(\omega) = X(t, \omega)$$

soit mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\overline{\mathbf{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ (où $\overline{\mathcal{B}}$ désigne la tribu borélienne de $\overline{\mathbf{R}}$).

2° Soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$; une f.a.r. X construite sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et T est dite du second ordre relativement à P si et seulement si

$$(\forall t \in T) \qquad \int_\Omega (X_t)^2 dP < \infty$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur P, on pourra :

— dire plus brièvement que « X est du second ordre »;

— noter, pour toute variable aléatoire réelle (v.a.r.) Y définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$, et intégrable par rapport à P $\quad E(Y) = \int Y\,dP$;

— noter m l'application de T dans $\mathbf{R}$ définie par $(\forall t \in T) \quad m(t) = E(X_t)$, et l'appeler moyenne de la f.a.r. X ;

— dire que X est centré si $\forall t \in T \quad m(t) = 0$;

— noter K l'application de $T \times T$ dans $\mathbf{R}$ qui, à tout couple (s, t), associe la covariance des v.a.r. X_s et X_t et l'appeler covariance de la f.a.r. X;

— commettre l'abus de langage consistant à confondre l'espace des v.a.r. de carré intégrable et celui de leurs classes d'équivalence pour l'égalité P presque sûre (on le notera $L^2(P)$) .

3° On rappelle qu'un noyau symétrique de type positif sur un sous-ensemble T de $\mathbf{R}$ est une application n de $T \times T$ dans $\mathbf{R}$ telle que

(i) $\quad (\forall (s, t) \in T \times T) \qquad n(s, t) = n(t, s)$

(ii) pour toute fonction réelle a sur T nulle sauf sur un ensemble fini de points on a

$$\sum_{(s, t) \in T \times T} a(s)\ a(t)\ n(s, t) \geqslant 0.$$

I

Soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et X une f.a.r. du second ordre construite sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et T.

1° Vérifier que $K(s, t)$ est un noyau symétrique de type positif.

2° Pour toute fonction réelle a nulle sauf sur un ensemble fini de points de T, $\sum_{t \in T} a(t) X_t$ est une v.a.r. de carré intégrable ; l'ensemble de ces variables forme un espace vectoriel $L(X, T)$. On appelle espace engendré par X, pour la loi P, la fermeture $H_P(X, T)$ de $L(X, T)$ dans $L^2(P)$ [s'il n'y a pas de risque de confusion on notera cet espace H_P]. On appelle f.a. gaussienne une f.a.r. du second ordre telle que $L(X, T)$ soit formé de variables de Laplace-Gauss (toujours pour la loi P). Vérifier que H_P est formé aussi de variables de Laplace-Gauss. Cet espace s'appelle l'espace gaussien engendré par X.