• *Candidates (803 copies) :*

0	258
1 à 5	162
6 à 10	92
11 à 15	92
16 à 20	57
21 à 25	39
26 à 30	37
31 à 35	19
36 à 40	14
41 à 50	19
51 à 60	14

II.5 TEXTE DE L'EPREUVE D'ANALYSE NUMERIQUE

On se propose d'étudier différentes questions, relatives à des systèmes différentiels à retard, avec ou sans contrôle. Les notions utiles, non classiques, sont définies dans l'énoncé. Pour simplifier, on considère seulement des systèmes différentiels linéaires, à coefficients constants. Aucune considération n'est demandée sur les algorithmes qui seraient nécessaires pour calculer, de façon approchée, la solution de certaines des questions posées (par exemple ***Q. 17***).

Dans tout le problème, les notations suivantes sont utilisées :

— l étant un entier positif quelconque, un élément de $\mathbf{R}^l$ est une colonne à l éléments. I_l désigne la matrice unité à l lignes et l colonnes.

— Si M est une matrice carrée quelconque, ${}^tM$ désigne sa transposée.

— $L^1(a, b; \mathbf{R}^l)$ désigne l'espace des (classes de) fonctions d'une variable réelle, à valeurs dans $\mathbf{R}^l$, qui sont intégrables au sens de Lebesgue sur l'intervalle (a, b) de la droite réelle.

Soit le système différentiel (1) :

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + BX(t-h) + F(t) \tag{1}$$

dans lequel :

— la variable indépendante réelle t sera appelée le temps;

— h est une constante donnée, positive (le retard);

— A et B sont deux matrices données, à termes réels constants, à n lignes et n colonnes;

— F est une application donnée, de $[0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}^n$, localement intégrable au sens de Lebesgue;

— X est une application inconnue, de $[-h, +\infty[$ dans $\mathbf{R}^n$, astreinte à être *absolument continue* pour $t \geqslant 0$, et à vérifier (1) pour $t > 0$.

I

On se donne $X_0 \in \mathbf{R}^n$ et $\varphi \in L^1(-h, 0; \mathbf{R}^n)$.

Q. 1 Montrer que le problème :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Rechercher X satisfaisant (1), et vérifiant les conditions}\\ \text{initiales « épaisses » : } X(0) = X_0,\ X(t) = \varphi(t) \text{ pour presque}\\ \text{tout } t \text{ de } (-h, 0)\end{array}\right.$$

possède une solution, et que celle-ci est unique pour $t \geqslant 0$.

Cette solution sera notée $X(.\,; X_0, \varphi, F)$. Dans tout le problème, une solution de (1) sera toujours supposée correspondre à des conditions initiales épaisses, du type décrit ci-dessus.

En particulier, on supposera toujours que la restriction à $[-h, 0]$ de toute solution de (1) appartient à $L^1(-h, 0; \mathbf{R}^n)$.

Q. 2 Dans cette question, on suppose que l'application F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. Si m est un entier positif ou nul, montrer que l'application $t \longmapsto X(t; X_0, \varphi, F)$ est de classe $\mathscr{C}^m$ sur $]mh, +\infty[$. Comment ce résultat est-il modifié si on ajoute l'hypothèse : φ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $]-h, 0[$?
(k entier donné $\geqslant 0$).

Q. 3 Montrer qu'il existe une fonction unique, K, de variable réelle : $u \longmapsto K(u)$, où $K(u)$ est une matrice à termes réels, à n lignes et n colonnes, vérifiant les conditions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ll}K(u) = 0 & \text{pour } u < 0\\ K(0) = I_n & \\ u \longmapsto K(u) \text{ est fonction absolument continue} & \text{pour } u \geqslant 0\\ \dfrac{dK(u)}{du} = K(u)A + K(u-h)B & \text{pour } u > 0\end{array}\right.$$

On notera que, pour $0 < u < h$, l'équation différentielle matricielle, vérifiée par K, se réduit à $\dfrac{dK(u)}{du} = K(u)A$.

Si X est une solution de (1), et si t est positif, évaluer, de deux façons différentes, l'intégrale $\displaystyle\int_0^t K(t-s)\frac{dX(s)}{ds}\,ds$, et en déduire l'expression de $X(t; X_0, \varphi, F)$ au moyen de K (la formule obtenue contient des symboles d'intégration).

II

Dans toute cette partie II *du problème, on prend, dans* (1) :

$$\mathrm{F}(t) = 0 \qquad \textit{pour} \quad t \geqslant 0 .$$

Soit p un entier positif donné.

Soient $\mathrm{Y}_0 \in \mathbf{R}^n$ et $\varphi \in \mathrm{L}^1(-h, 0 ; \mathbf{R}^n)$

Si $\mathrm{X}(. ; \mathrm{Y}_0, \varphi, 0)$ est la solution de (1) correspondant aux conditions initiales épaisses Y_0, φ, on pose,
pour $t \in [0, h]$ et $j \in \{1, 2 \dots, p\}$:

$$\mathrm{X}_j(t) = \mathrm{X}\big(t + (j-1)h ; \mathrm{Y}_0, \varphi, 0\big)$$

Pour chaque $t \in [0, h]$, $\tilde{\mathrm{X}}(t)$ désigne le vecteur de $\mathbf{R}^{pn}$ dont les n premières composantes sont celles de $\mathrm{X}_1(t)$, les n suivantes sont celles de $\mathrm{X}_2(t), \dots,$ les n dernières sont celles de $\mathrm{X}_p(t)$.

Q. 4 Montrer que, pour $t \in]0, h[$, $\tilde{\mathrm{X}}$ vérifie un système différentiel de la forme (2) :

$$\frac{d\tilde{\mathrm{X}}(t)}{dt} = \tilde{\mathrm{A}}\,\tilde{\mathrm{X}}(t) + \tilde{\mathrm{B}}\,\tilde{\Phi}(t) \tag{2}$$

où $\tilde{\mathrm{A}}$ et $\tilde{\mathrm{B}}$ sont deux matrices constantes à pn lignes et pn colonnes (à déterminer), et où $\tilde{\Phi}$ a la signification suivante :

Pour chaque $t \in [0, h]$, $\tilde{\Phi}(t)$ désigne le vecteur de $\mathbf{R}^{pn}$ dont les n premières composantes sont les composantes de $\varphi(t-h)$, et dont toutes les autres composantes sont nulles.

Dans ces conditions, montrer l'équivalence des problèmes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ suivants, dans chacun desquels $\mathrm{Y}_0, \mathrm{Y}_1, \dots, \mathrm{Y}_p$ sont $(p+1)$ vecteurs donnés de $\mathbf{R}^n$:

$(\mathscr{C}_1)$ On cherche $\varphi \in \mathrm{L}^1(-h, 0 ; \mathbf{R}^n)$ telle que la solution :

$\mathrm{X}(. ; \mathrm{Y}_0, \varphi, 0)$ de (1) vérifie les conditions :
$\mathrm{X}(jh ; \mathrm{Y}_0, \varphi, 0) = \mathrm{Y}_j$ pour $j = 0, 1, 2, \dots, p$

$(\mathscr{C}_2)$ On cherche $\varphi \in \mathrm{L}^1(-h, 0 ; \mathbf{R}^n)$ (c'est-à-dire : on cherche $\tilde{\Phi}$) telle que la solution $\tilde{\mathrm{X}}$ de (2), *absolument continue sur* $[0, h]$, qui vérifie la condition initiale :

$$\tilde{\mathrm{X}}(0) = \begin{bmatrix} \mathrm{Y}_0 \\ \mathrm{Y}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{Y}_{p-1} \end{bmatrix}, \text{ vérifie aussi la condition finale } \tilde{\mathrm{X}}(h) = \begin{bmatrix} \mathrm{Y}_1 \\ \mathrm{Y}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{Y}_p \end{bmatrix}$$

Le système différentiel (2) sera dit complètement contrôlable si, à tout couple de vecteurs $\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2$ de $\mathbf{R}^{pn}$, on peut faire correspondre une fonction $\tilde{\Phi}$ (bâtie, comme il a été indiqué dans ***Q. 4***, à partir d'un élément φ de $\mathrm{L}^1(-h, 0 ; \mathbf{R}^n)$) telle que (2) possède au moins une solution $\tilde{\mathrm{X}}$, définie sur $[0, h]$ et vérifiant les conditions aux limites : $\tilde{\mathrm{X}}(0) = \mathrm{Z}_1$, $\tilde{\mathrm{X}}(h) = \mathrm{Z}_2$.

On notera qu'une condition nécessaire et suffisante, pour que (2) soit complètement contrôlable, est que l'application :

$$\varphi \longmapsto \int_0^h e^{(h-s)\tilde{\mathrm{A}}}\, \tilde{\mathrm{B}}\, \tilde{\Phi}(s)\, ds$$

soit une *surjection* de $\mathrm{L}^1(-h, 0 ; \mathbf{R}^n)$ sur $\mathbf{R}^{pn}$.

Q. 5 Montrer que, pour que $(\mathscr{C}_1)$ possède au moins une solution — et ce, quels que soient les vecteurs $\mathrm{Y}_0, \mathrm{Y}_1, \dots, \mathrm{Y}_p$ — il est nécessaire et suffisant que (2) soit complètement contrôlable.

III

Dans toute cette partie III *du problème, on suppose encore que, dans* (1), *on prend* $\mathrm{F}(t) = 0$ *pour* $t \geqslant 0$. *On munit* $\mathbf{R}^n$ *de son produit scalaire usuel, pour lequel la base canonique est orthonormée; on note* (v, v') *le produit scalaire des vecteurs* v *et* v'.

τ étant un réel positif, on dira que (1) est dégénéré à l'instant τ s'il existe q, vecteur non nul de $\mathbf{R}^n$, tel que, pour toute solution $\mathrm{X}(. ; \mathrm{X}_0, \varphi, 0)$ de (1), le vecteur $\mathrm{X}(\tau ; \mathrm{X}_0, \varphi, 0)$ soit orthogonal à q.

Q. 6 Montrer que, si (1) est dégénéré à l'instant τ, alors :

$$\begin{cases} \text{d'une part } \tau > h \\ \text{d'autre part (1) est dégénéré à tout instant } t \text{ postérieur à } \tau. \end{cases}$$

On dira alors que (1) est *dégénéré à partir de l'instant* τ.

N. B. – *La résolution de* **Q. 6**, *de même que celle de* **Q. 7** *et* **Q. 8**, *peut se faire sans utilisation de la matrice* K, *introduite en* **Q. 3**.

Q. 7 *Exemple de dégénérescence.* On prend $n = 3$, $h = 1$. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont quatre constantes réelles, telles que :

$$\alpha\gamma = 2, \qquad \beta\delta = -2.$$

On envisage le système différentiel (où x, y, z sont des fonctions inconnues, à valeurs réelles) :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha y(t); \quad \frac{dy(t)}{dt} = \beta z(t) + \gamma x(t-1); \quad \frac{dz(t)}{dt} = \delta y(t-1).$$

Montrer que, pour toute solution, on a $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} = 0$ pour $t > 2$.

En déduire que le système différentiel est dégénéré à partir de l'instant $t = 2$. En considérant une solution particulière convenable, montrer qu'il n'y a pas dégénérescence avant l'instant $t = 2$.

Q. 8 *On étudie ici une généralisation de l'exemple précédent (et on pourra s'inspirer de la méthode suivie en* **Q. 7**) :

On prend

$h = 1$; $n = n_1 + n_2 + n_3$ où n_1, n_2, n_3 sont trois entiers positifs ;

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ sont des matrices rectangulaires données, à termes réels constants :

$\mathcal{A}$ a n_1 lignes et n_2 colonnes;
$\mathcal{B}$ a n_2 lignes et n_3 colonnes;
$\mathcal{C}$ a n_2 lignes et n_1 colonnes;
$\mathcal{D}$ a n_3 lignes et n_2 colonnes.

Ces quatre matrices vérifient les conditions :

$$\mathcal{C}\mathcal{A} = 2\,\mathrm{I}_{n_2}, \qquad \mathcal{B}\mathcal{D} = -2\,\mathrm{I}_{n_2}$$

On envisage le système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathrm{X}_1(t)}{dt} = \mathcal{A}\,\mathrm{X}_2(t) \\[2mm] \dfrac{d\mathrm{X}_2(t)}{dt} = \mathcal{B}\,\mathrm{X}_3(t) + \mathcal{C}\,\mathrm{X}_1(t-1) \\[2mm] \dfrac{d\mathrm{X}_3(t)}{dt} = \mathcal{D}\,\mathrm{X}_2(t-1) \end{cases}$$

où les inconnues $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3$ sont des fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}^{n_1}, \mathbf{R}^{n_2}, \mathbf{R}^{n_3}$ respectivement.

Montrer que ce système différentiel est dégénéré exactement à partir de l'instant $t = 2$.

On revient au système différentiel (1) *général (mais avec* $\mathrm{F}(t) = 0$ *pour* $t \geqslant 0$*) et on réintroduit la matrice* K *(cf.* **Q. 3***) et sa transposée* ${}^t\mathrm{K}$, *en vue de résoudre* **Q. 9** *et* **Q. 10**.

Q. 9 Montrer que, pour que (1) soit dégénéré à partir de l'instant τ, il est nécessaire qu'il existe q, vecteur constant non nul de $\mathbf{R}^n$, tel que ${}^t\mathrm{K}(t)q = 0$ pour tout $t \geqslant \tau$ (ce qui implique en particulier que $\mathrm{K}(t)$ soit singulière pour $t \geqslant \tau$).

Inversement, si existent τ' fini positif et q, vecteur constant non nul de $\mathbf{R}^n$, tels que ${}^t\mathrm{K}(t)q = 0$ pour tout $t \geqslant \tau'$, montrer qu'alors (1) est dégénéré « au moins » à partir de l'instant $\tau' + h$ (« au moins » signifiant que (1) peut être dégénéré à partir d'un instant antérieur à $\tau' + h$).

Q. 10 De **Q. 9**, déduire que, pour que (1) soit dégénéré à partir d'un instant fini, il est nécessaire que la matrice B soit singulière. Montrer, à l'aide d'un contre-exemple simple, que cette condition nécessaire n'est pas suffisante.

Q. 11 Un point Z de $\mathbf{R}^n$ sera dit accessible à l'instant $t > 0$, pour le système (1), s'il existe une solution $\mathrm{X}(\,.\,; \mathrm{X}_0, \varphi, 0)$ de (1), telle que $\mathrm{X}(t\,; \mathrm{X}_0, \varphi, 0) = \mathrm{Z}$.

Montrer que l'ensemble des points de $\mathbf{R}^n$, accessibles à l'instant t pour le système (1), forme un sous-espace vectoriel $\mathrm{E}(t)$ de $\mathbf{R}^n$.

Montrer aussi que, pour que (1) soit dégénéré à partir de l'instant τ, il faut et suffit que la dimension de $\mathrm{E}(\tau)$ soit inférieure à n.

Q. 12 On considère (1) où A est la matrice nulle, et où la matrice B est singulière.

Montrer que, s'il existe un vecteur constant q, non nul, de $\mathbf{R}^n$, qui soit orthogonal, pour $t \geqslant \tau$, à toute solution de (1), il s'ensuit :

$$q \text{ orthogonal à } \operatorname{Im} B$$

où $\operatorname{Im} B = \{ U \in \mathbf{R}^n \mid U = BV, \ V \in \mathbf{R}^n \}$

En déduire que le système (1) n'est jamais dégénéré quand la matrice A est nulle.

Q. 13 De ***Q. 12*** déduire le résultat suivant :

Si A et B commutent (pour la multiplication des matrices), alors (1) n'est jamais dégénéré.

On désire étudier maintenant un délai à la dégénérescence, c'est-à-dire obtenir que celle-ci n'ait pas lieu avant un instant donné T, *lorsqu'on choisit convenablement le retard h, les matrices* A *et* B *restant fixées.*

Q. 14 Soit le système différentiel (3), à retard nul :

$$\frac{dY(t)}{dt} = (A + B)\,Y(t) \tag{3}$$

où A et B sont les matrices qui paraissent dans (1).

Y est une application inconnue, absolument continue, de $[0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}^n$.

Montrer que (3) n'est jamais dégénéré.

X_0 étant un vecteur de $\mathbf{R}^n$, on envisage la solution $Y(. \,;\, X_0)$ de (3), qui est telle que $Y(0 \,;\, X_0) = X_0$. On envisage aussi la solution $X(. \,;\, X_0, 0, 0)$ de (1), qui correspond aux conditions initiales épaisses : X_0, 0.

$\| \ \|$ désigne la norme euclidienne des vecteurs de $\mathbf{R}^n$, et la norme correspondante des matrices à n lignes et n colonnes, à termes réels.

Avec cette norme on a donc :

$$\|AU\| \leqslant \|A\| . \|U\| \text{ pour tout } U \in \mathbf{R}^n$$

Si T est un réel positif, montrer qu'on a, pour $0 \leqslant t \leqslant T$:

$$\| X(t \,;\, X_0, 0, 0) - Y(t \,;\, X_0) \| \leqslant h \, \| X_0 \| . \| B \| \, e^{T[\|A\| + \|B\| + \|A+B\|]}$$

Q. 15 Si T est donné positif, montrer qu'il existe H (T) positif tel que, pour $h \in \,]0, H(T)]$, le système différentiel (1) ne soit pas dégénéré avant l'instant T. On pourra procéder comme suit :

Soit $\{ X_1, X_2, \ldots, X_n \}$ une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$. Pour chaque $t \geqslant 0$, posons $X_j(t) = X(t \,;\, X_j, 0, 0)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. $X(. \,;\, X_j, 0, 0)$ est la solution de (1) qui correspond aux conditions initiales épaisses X_j, 0.

Montrer que, pour h inférieur ou égal à une certaine valeur H(T), on a, pour tout $t \in [0, T]$:

$$\det \left(X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t) \right) \neq 0 .$$

IV

On reprend (1), où F n'est plus une fonction donnée à priori, mais un contrôle, c'est-à-dire qu'à chaque instant $t > 0$, on peut choisir la valeur $F(t)$, de façon que la solution de (1), correspondant aux conditions initiales épaisses X_0, φ, satisfasse, si possible, une condition finale donnée (laquelle est à satisfaire au bout d'un temps fini; mais ce temps fini n'est pas forcément donné à l'avance).

Ce contrôle F est astreint à satisfaire les conditions a et b :

a. Pour chaque T fini positif, la restriction de F à [0, T] appartient à $L^1(0, T \,;\, \mathbf{R}^n)$.

b. $F(t) \in \Omega$ pour presque tout t positif, où Ω est un *compact convexe* donné de $\mathbf{R}^n$, contenant le zéro de $\mathbf{R}^n$.

On dira que le système (1) est contrôlable à la fonction nulle, à partir des conditions initiales épaisses X_0, φ (avec $X_0 \neq 0$) si on peut trouver un contrôle F, vérifiant a et b, auquel soit associé un instant t_F, fini positif, tel qu'on ait :

$$X(t \,;\, X_0, \varphi, F) = 0 \quad \text{pour tout} \quad t \geqslant t_F .$$

Q. 16 Étude d'un exemple : $n = h = 1$, $\Omega = [-1, +1]$.

L'équation différentielle (1), qui est une équation différentielle scalaire, est ici :

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t-1) + f(t) \qquad (f \text{ est le contrôle}) .$$

Montrer que, si on prend les conditions initiales épaisses : $x(t) = 1$ pour $-1 \leqslant t \leqslant 0$, il est impossible de ramener x à la fonction nulle, en un temps fini.

Au contraire, si on prend les conditions initiales épaisses : $x(t) = \frac{1}{2}$ pour $-1 \leqslant t \leqslant 0$, indiquer un choix du contrôle f, qui ramène x à la fonction nulle en un temps fini.

Q. 17 Revenant au cas général, on suppose qu'il existe des contrôles F, vérifiant a et b, et tels que $X(t\,;\, X_0, \varphi, F) = 0$ pour $t \geqslant t_F$ (X_0 est supposé non nul).

Pour X_0 *et* φ *fixés* ($X_0 \neq 0$), on peut ainsi, à chacun de ces contrôles F, associer le premier instant t_F, auquel $X(.\,;\, X_0, \varphi, F)$ est ramenée à la fonction nulle.

Montrer que, parmi ces contrôles F, il en existe un qui est optimal, c'est-à-dire qui ramène X à la fonction nulle en un temps minimum (à partir des conditions initiales épaisses fixées X_0, φ).

II.6 RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE NUMERIQUE

II.6.1. THEME DU SUJET

Le problème d'analyse numérique, proposé cette année, s'écartait de l'étude des procédés algorithmiques, pour attirer l'attention des jeunes mathématiciens sur des branches de l'analyse appliquée qui sont actuellement en plein développement et ont de plus en plus d'applications dans certains laboratoires de sciences expérimentales : la théorie des équations différentielles à retard, d'une part ; la théorie du contrôle, d'autre part.

Beaucoup de candidats ont été surpris par ce genre de problème, si on en juge par le nombre de copies blanches ou presque nulles. Le principal reproche, qu'on peut adresser à la grosse masse des candidats, c'est que, devant une situation nouvelle, ils ne savent pas adapter leur connaissance des mathématiques, et perdent tout sens de la rigueur, voire même tout bon sens.

II.6.2. RESUME DE LA SOLUTION ET OBSERVATIONS

Les questions de la première partie avaient des solutions immédiates, si on prenait d'abord la peine d'examiner ce qui a lieu pour $t \in [o, h]$, et si on procédait ensuite par recurrence sur m, pour chacun des intervalles $[mh, (m+1)h]$. Si F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]o, +\infty[$ et si de plus φ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $]-h, o[$, alo[rs] $X(\cdot\,;\, X_0, \varphi, F)$ est à la fois de classe $\mathscr{C}^m$ sur $]mh, +\infty[$, et de classe $\mathscr{C}^{m+k+1}$ sur $]mh, (m+1)h[$, pour tout m entier positif ou nul.

Dans la seconde partie, on demandait, en Q – 4, d'écrire (1) sous la forme «éclatée» (2).

Q-5 est la première question du problème offrant quelque difficulté. La condition énoncée est évidemment suffisante. Montrons qu'elle est aussi nécessaire. Par hypothèse, quel que soit $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_p)$, $(\mathscr{P}_2)$ a au moins une solution $\widetilde{X}$, laquelle vérifie

$$\widetilde{X}(h) = e^{h\widetilde{A}}\, \widetilde{X}(o) + \int_o^h e^{(h-s)\widetilde{A}}\, \widetilde{B}\, \widetilde{\Phi}(s)\, ds$$

Il suffit donc de montrer que : $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_p) \mapsto \widetilde{X}(h) - e^{h\widetilde{A}}\, \widetilde{X}(o)$ est une surjection de $\mathbf{R}^{(p+1)n}$ sur $\mathbf{R}^{pn}$.

Or, la matrice $e^{h\widetilde{A}}$ est régulière, et on voit aisément que l'application linéaire, de $\mathbf{R}^{(p+1)n}$ dans $\mathbf{R}^{pn}$: $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_p) \mapsto e^{-h\widetilde{A}}\, \widetilde{X}(h) - \widetilde{X}(o)$ est de rang pn.

La troisième partie du problème était consacrée au phénomène de la dégénérescence, pour le cas de systèmes différentiels linéaires homogènes, à coefficients constants, à retard constant. La signification de ce phénomène est claire : pour certains de ces systèmes différentiels, pour $t = \tau$ (et plus généralement pour $t \geqslant \tau$), toute solution est forcément dans un certain sous-espace vectoriel strict de $\mathbf{R}^n$.

La première partie de Q-6 a été résolue dans de nombreuses copies ; mais on ne trouve que très peu de réponses satisfaisantes à la seconde partie de Q-6. Il est pourtant simple d'observer que, si θ est une constante quelconque, supérieure à τ, et si X est une solution quelconque de (1) homogène, alors $\hat{X}$ est une autre solution, où on définit $\hat{X}$ par : $\hat{X}(t) = X(t + \theta - \tau)$.

On a donc : $(\hat{X}(\tau), q) = 0$,

c'est-à-dire $(\mathrm{X}(\theta), q) = 0$, ce qui démontre la proposition en vue. Les conditions de régularité imposées à $\hat{\mathrm{X}}$ pour $t \in]-h, o]$ (cf. Q-1) exigent que, dans le raisonnement précédent, on prenne $\theta - \tau > 0$.

Dans Q-7, on suggérait d'étudier $\frac{d^2y}{dt^2}$. Un calcul simple montre que $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = 0$ pour $t > 2$, car y est alors de classe $\mathscr{C}^2$. On remarque que ce résultat est encore valable pour presque tout t dans $[1, 2]$. Car x, y, z existent $p.p.$ sur $[-1, 0]$; $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ existent $p.p.$ sur $[0, 1]$; et $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ existent $p.p.$ sur $[1, 2]$. Comme $\frac{dy}{dt}$ est une fonction absolument continue de $t \geqslant 1$, il s'en suit qu'on a $y(t) = a + b\, t$ pour $t \geqslant 1$, où a et b sont deux constantes qui dépendent de la solution particulière envisagée. Il s'en suit :

$\dot{x}(t) = \alpha a t + \alpha b \frac{t^2}{2} + c$ pour $t \geqslant 1$, où c est encore une constante qui dépend de la solution considérée. Ensuite, la relation $\beta z(t) = \frac{dy(t)}{dt} - \gamma x(t-1)$ donne, pour $t \geqslant 2$: $\beta z(t) = b - \gamma \left[\alpha a(t-1) + \alpha b \frac{(t-1)^2}{2} + c\right]$ ou encore :

$\beta z(t) = b + \gamma\alpha(a + bt) - \gamma\alpha \frac{b}{2} - \gamma\left(\alpha a t + \alpha b \frac{t^2}{2} + c\right)$.

On a donc : $\beta z(t) = 2y(t) - \gamma x(t)$ pour $t \geqslant 2$, et pour toute solution. C'est la relation de dégénérescence cherchée.

Il n'y a pas dégénérescence avant l'instant $t = 2$, car la solution particulière, qui correspond aux données initiales épaisses : $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$ pour $-1 \leqslant t \leqslant 0$, vaut, pour $1 \leqslant t \leqslant 2$:
$x(t) = \frac{2x}{3} - \alpha(t-1)^2$; $y(t) = -2(t-1)$; $z(t) = \delta t - \frac{\delta}{3}(t-1)^3$.

Les degrés de ces trois polynômes en $(t-1)$ sont différents deux à deux. Il est donc impossible de trouver trois constantes λ, μ, ν, non simultanément nulles, telles qu'on ait : $\lambda x(t) + \mu y(t) + \nu z(t) = 0$ pour tout t de $[\tau, 2]$, où τ serait un élément de $[1, 2[$.

Ces méthodes se généralisent aisément à Q-8. En particulier, pour $t \geqslant 2$, toute solution du système différentiel vérifie la relation : $\mathscr{B}\mathrm{X}_3(t) = 2\,\mathrm{X}_2(t) - \mathscr{C}\mathrm{X}_1(t)$. En général, il y a donc dégénérescence par rapport à plusieurs vecteurs de $\mathbf{R}^n$, linéairement distincts.

Q-9 : $\mathrm{X}(t; \mathrm{X}_0, o, o) = \mathrm{K}(t)\,\mathrm{X}_0$. Donc, $\forall \mathrm{X}_0 \in \mathbf{R}^n$, on a, pour $t \geqslant \tau$: $(\mathrm{K}(t)\,\mathrm{X}_0, q) = (\mathrm{X}_0, {}^t\mathrm{K}(t)q) = 0$. Donc ${}^t\mathrm{K}(t)q = 0$ pour $t \geqslant \tau$.
La fin de Q-9 se traite à l'aide de :

$\mathrm{X}(t; \mathrm{X}_0, \varphi, o) = \mathrm{K}(t)\,\mathrm{X}_0 + \int_{-h}^{o} \mathrm{K}(t - s - h)\,\mathrm{B}\,\varphi(s)\,ds$, d'où :

$(\mathrm{X}(\tau' + h; \mathrm{X}_0, \varphi, o), q) = (\mathrm{X}_0, {}^t\mathrm{K}(\tau' + h)q) + \int_{-h}^{o} (\mathrm{B}\varphi(s), {}^t\mathrm{K}(\tau' - s)q)\,ds$.

Q-10 : Pour $t > 0$, on a : $\frac{d\,{}^t\mathrm{K}(t)}{dt}\, q = {}^t\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{K}(t)q + {}^t\mathrm{B}\,{}^t\mathrm{K}(t-h)q$ (*)

Si (1) dégénère à partir de l'instant τ, on a donc : ${}^t\mathrm{B}\,{}^t\mathrm{K}(t-h)q = 0$ pour $t \geqslant \tau$. Si B est régulière, il s'en suit ${}^t\mathrm{K}(t)q = 0$ pour $t \geqslant \tau - h$. On reporte cela dans (*) et, par le même raisonnement, on en tire : ${}^t\mathrm{K}(t)q = 0$ pour $t \geqslant \tau - 2h$. On continue jusqu'à obtenir : ${}^t\mathrm{K}(t)q = 0$ pour $t \geqslant \tau - kh$, où k est un entier positif tel que $\tau - kh \in [o, h[$. Ce résultat est absurde car $\mathrm{K}(t)$ ne peut être singulière pour $o \leqslant t \leqslant h$. Donc, si B est régulière, (1) ne peut dégénérer. Le cas où B est nulle, montre qu'il ne suffit pas que B soit singulière pour que (1) dégénère.

Q-11 est immédiate et a été convenablement traitée dans de nombreuses copies. Elle sert de lemme à Q-12. On montre aisément que, si (1) dégénère, alors il existe un premier instant de dégénérescence. Considérons :

$\frac{d\,\mathrm{X}(t)}{dt} = \mathrm{B}\,\mathrm{X}(t-h)$ où B est singulière. Si ce système différentiel dégénère exactement à partir de l'instant τ, on a, pour $t \in]\tau, \tau + h[$: d'une part $\mathrm{E}(t-h) = \mathbf{R}^n$; d'autre part $\left(\frac{d\,\mathrm{X}(t)}{dt}, q\right) = (\mathrm{BX}(t-h), q) = 0$

on en déduit : q orthogonal à $\mathrm{Im\,B}$.

On reprend la relation, valable pour $t > 0$: $\left(\frac{d\,X(t)}{dt}, q\right) = (BX(t-h), q)$

Elle montre que, pour $t \geqslant 0$ et pour chaque solution X de (1), le produit scalaire $(X(t), q)$ a une valeur indépendante de t. Cette valeur est nulle, puisque $(X(t), q) = 0$ pour $t \geqslant \tau$. Ce résultat est absurde, puisqu'il implique dégénérescence de (1) à partir de $t = 0$. Cela résout Q-12. Q-13 se déduit de Q-12 par le changement d'inconnue : $Y(t) = e^{-tA}\, X(t)$. Q-14 se traite à l'aide de calculs classiques. La résolution de Q-15 utilise le résultat démontré en Q-14, et la continuité d'un déterminant par rapport à l'ensemble de ses termes. Passons à la quatrième partie. La seule question, à la fois délicate et un peu longue, du problème, était Q-17. Elle n'a été traitée correctement dans aucune copie. En voici une solution : il convient de ne s'occuper que du cas où l'ensemble des F — vérifiant a et b et tels que $X(t\,; X_0, \varphi, F) = 0$ pour $t \geqslant t_F$ — est infini.

Posons $\tilde{t} = \inf_F t_F$. Il existe une suite $\{F_m\}$ de contrôles vérifiant a et b, tels que $X(t;\, X_0, \varphi, F_m) = 0$ pour $t \geqslant t_{F_m}$; suite telle que $t_{F_m} \downarrow \tilde{t}$ pour $m \to +\infty$. On peut supposer $t_{F_m} \leqslant \tilde{t} + h$, $\forall m$. On a alors :

$F_m(t) = 0$ pour $t \geqslant \tilde{t} + 2h$, $\forall m$. Chacun de ces F_m est dans un borné fixe de $L^2\,(o, \tilde{t} + 2h;\ R^n)$ (espace de Hilbert pour son produit scalaire usuel).

Il existe donc, d'une part $\tilde{F} \in L^2\,(o, \tilde{t} + 2h;\ R^n)$, d'autre part une sous-suite extraite de $\{F_m\}$ (sous-suite qu'on notera encore $\{F_m\}$ pour simplifier les notations), tels qu'on ait, pour tout $U \in L^2\,(o, \tilde{t} + 2h;\ R^n)$:

$$\int_o^{\tilde{t}+2h} (F_m(s),\ U(s))\,ds \to \int_o^{\tilde{t}+2h} (\tilde{F}(s),\ U(s))\,ds \text{ pour } m \to +\infty$$

Prenons $\tilde{F}(t) = 0$ pour $t > +2h$.

$\tilde{F}$ satisfait la condition a. Montrons qu'il satisfait aussi b.

Ω, étant un convexe fermé de R^n, est l'intersection d'une famille de demi-espaces

fermés, dans l'espace affine associé à R^n. Il existe donc une famille $\{c_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de réels, et une famille $\{y_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de vecteurs de R^n, telles que, si $x \in R^n$, alors une condition nécessaire et suffisante pour que x soit dans Ω s'écrive :

$(x, y_\alpha) \leqslant c_\alpha$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}$

Soient t_0 et ϵ tels que $o \leqslant t_0 < t_0 + \epsilon \leqslant \tilde{t} + 2h$

Prenons $U = \chi\, y_\alpha$ où y_α est un vecteur quelconque de la famille introduite plus haut, et χ la fonction caractéristique de $[t_0, t_0 + \epsilon]$.

Pour $m \to +\infty$, on a : $\left(\int_{t_0}^{t_0+\epsilon} F_m(s)\,ds,\ y_\alpha\right) \to \left(\int_{t_0}^{t_0+\epsilon} \tilde{F}(s)\,ds,\ y_\alpha\right)$

On en tire : $\left(\int_{t_0}^{t_0+\epsilon} \tilde{F}(s)\,ds,\ y_\alpha\right) \leqslant \epsilon\, c_\alpha$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}$

Donc : $\frac{1}{\epsilon} \int_{t_0}^{t_0+\epsilon} \tilde{F}(s)\,ds \in \Omega$.

Il s'en suit : $\tilde{F}(t) \in \Omega$ pour presque tout t de $[o, \tilde{t} + 2h]$.

Finalement, $\tilde{F}$ satisfait bien a et b, donc est un contrôle admissible.

On montre, pour terminer, que : $X(t;\, X_0, \varphi, \tilde{F}) = 0$ pour $t \geqslant \tilde{t}$.

On a, en effet : $X(t;\, X_0, \varphi, \tilde{F}) - X(t;\, X_0, \varphi, F_m) = \int_o^t K(t-s)\,[\tilde{F}(s) - F_m(s)]\,d$

pour $t \geqslant 0$.

D'où : $X(t;\, X_0, \varphi, \tilde{F}) = \lim_{m \to +\infty} X(t;\, X_0, \varphi, F_m)$ pour $t \geqslant 0$.

Il s'en suit aisément la proposition en vue.

On ne s'étendra pas sur les sottises écrites par trop de candidats ou candidates : ce sont à peu près les mêmes que celles qui ont été relevées dans les rapports des concours des années antérieures.

II.6.3. LES NOTES (sur 40)

Candidats (671 copies – Moyenne : 7,9/40) :

n ⩽ 4	4 < n ⩽ 9	9 < n ⩽ 14	14 < n ⩽ 19	19 < n ⩽ 24	24 < n ⩽ 29	29 < n ⩽ 34	34 < n
318	89	125	79	28	22	6	4

Candidates (342 copies – Moyenne : 6,2/40) :

n ⩽ 4	4 < n ⩽ 9	9 < n ⩽ 14	14 < n ⩽ 19	19 < n ⩽ 24	24 < n ⩽ 29	29 < n ⩽ 34	34 < n
159	84	63	26	7	2	0	1

II.7 TEXTE DE L'EPREUVE DE MECANIQUE GENERALE

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

Il sera tenu le plus grand compte de la présentation et de la rédaction des copies.

Les candidats sont priés de respecter les notations de l'énoncé et de n'employer aucune abréviation abusive.

L'unité d'angle est le radian; le temps est désigné par t.

On considère un système matériel (Σ) constitué par un nombre fini n $(n \geqslant 3)$ de points matériels M_i, de masses respectives m_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ qui se déplacent par rapport à un repère absolu $(\mathcal{R})$ en s'attirant mutuellement en raison directe de leur masse et en raison inverse du carré de leur distance, les unités étant choisies de telle sorte que le coefficient de proportionnalité soit égal à l'unité; ainsi la résultante des forces qui agissent sur le point générique M_i est :

$$\vec{\mathcal{F}}_i = m_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{m_j}{\left\|\overrightarrow{M_iM_j}\right\|^3} \overrightarrow{M_iM_j}$$

PREMIÈRE PARTIE

On suppose que le centre d'inertie O du système matériel (Σ) est fixe par rapport à $(\mathcal{R})$ [ce qui ne restreint pas la généralité] et *on se propose d'étudier les mouvements de* (Σ) *au cours desquels la figure formée par les points* M_i *reste semblable à la configuration initiale.*

En vertu de cette hypothèse, on peut poser :

$$\overrightarrow{OM_i} = \lambda(t)\, \vec{s}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où les $\|\vec{s}_i\|$ sont constants et λ est une fonction positive du temps t, inconnue *a priori*, supposée deux fois continûment différentiable.

La figure constituée par les points μ_i définis par $\overrightarrow{O\mu_i} = \vec{s}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est alors de forme invariable et on appelle (S) le *solide fictif*, dit *associé* à (Σ), constitué par les points $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ affectés des masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ respectivement. On désigne par $Oxyz$ (de vecteurs unitaires $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) les axes centraux d'inertie de (S), par A, B, C les moments d'inertie de (S) par rapport aux axes Ox, Oy, Oz respectivement, par $\vec{\omega}$ le vecteur rotation instantanée de (S) dans son mouvement par rapport à $(\mathcal{R})$.

On introduit le vecteur $\vec{\Omega}$ et la variable τ définis par :

$$\lambda^2 \vec{\omega} = \vec{\Omega}\ ; \quad dt = \lambda^2 \cdot d\tau$$

et on pose :

$$\vec{\Omega} = p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z}\ ; \qquad \vec{s}_i = a_i\vec{x} + b_i\vec{y} + c_i\vec{z} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les a_i, b_i, c_i étant évidemment des constantes.

En vertu de l'hypothèse de similitude, on peut aussi écrire :

$$\vec{\mathcal{F}}_i = \frac{1}{\lambda^2}\vec{F}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\ ,$$

où les $\vec{F}_i$ sont des vecteurs constants par rapport au solide *associé* (S); on pose :

$$\vec{F}_i = X_i\vec{x} + Y_i\vec{y} + Z_i\vec{z}\ ,$$

où les X_i, Y_i, Z_i sont des constantes.

I

1° En appliquant le théorème du moment cinétique au système (Σ), montrer que p, q, r, considérés comme fonctions de τ, sont solutions du système différentiel :