<u>1re partie</u> : Confusion entre «forme définie» et «forme non dégénérée» ; confusion entre les propositions :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{Q}^2 \quad \bar{q}\,(x,y) \geqslant 0 \ ; \ \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad \bar{q}\,(x, y) \geqslant 0.$$

[Ou bien il fallait ici étudier directement la notion non classique de forme rationnelle, ou bien il fallait évoquer une propriété équivalente à la densité de $\mathbf{Q}^2$ dans $\mathbf{R}^2$] ; oubli de la condition $u' > 0$ ($u' \geqslant 0$ étant triviale) ; oubli du cas particulier $u = 1$; affirmation tranquille du fait que les restrictions de la forme $\bar{q}$ du 4° aux sous-espaces de dimension 2 engendrés par (π_1, π_2), (π_2, π_3) et (π_3, π_1) satisfont aux conditions du 1° ; abus (involontaire ?) consistant à écrire ($m > 0$) à la fin d'un raisonnement prouvant simplement ($m \geqslant 0$) ; impossibilité, parfois bien déguisée, de passer de la conclusion du 5° a) au résultat du 5° b).

<u>2e partie</u> : Extension non motivée aux modules de résultats sur les vectoriels, essentiellement l'invariance du cardinal d'une $\mathbf{Z}$–base ; confusion entre $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ et ensemble des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbf{Z})$ admettant un inverse... dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q})$; substitution d'un énoncé vague et généralement faux aux constructions effectivement demandées par l'énoncé du 4° ; démonstrations optimistes du 5° par confusion entre réseau et sous-réseau ; oubli de la vérification du caractère borné de Ω au 6°.

<u>3e partie</u> : Définition floue de W au 1° ; bluff dans la preuve de l'égalité $(\mathrm{L} \cap \mathrm{L}')_0 = \mathrm{L}_0 + \mathrm{L}'_0$, difficile à démontrer directement (mais conséquence triviale de l'égalité duale).

<u>5e partie</u> : Oubli des conditions $ad - bc > 0$, $ac + bd \geqslant 0$ dans l'utilisation des résultats du I 3° b.

II.2.3. LES NOTES (sur 60)

- *Candidats* : (1 587 copies)

0	7,13 %	25 à 28	2,97 %
1 à 4	41,41 %	29 à 32	1,14 %
5 à 8	19,57 %	33 à 36	0,88 %
9 à 12	9,47 %	37 à 40	0,38 %
13 à 16	7,32 %	41 à 44	0,32 %
17 à 20	5,62 %	45 à 48	0,25 %
21 à 24	2,90 %	49 à 60	0,63 %

- *Candidates* : (870 copies)

0	66	26 à 30	43
1 à 5	259	31 à 35	31
6 à 10	135	36 à 40	15
11 à 15	119	41 à 50	16
16 à 20	103	51 à 60	4
21 à 25	79		

II.3 TEXTE DE L'EPREUVE D'ANALYSE

ANALYSE

Durée : 6 heures

Préambule

Les propriétés suivantes de la fonction Γ pourront être utilisées sans démonstration; elles n'interviennent pas dans la première partie du problème.

Soit s un nombre complexe; on note $\mathrm{Re}(s)$ sa partie réelle, $\mathrm{Im}(s)$ sa partie imaginaire. Pour $\mathrm{Re}(s) > 0$, on pose :

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{s-1}\, dt.$$

La fonction Γ est holomorphe dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 0$. Elle se prolonge en une fonction méromorphe dans $\mathbf{C}$ dont les pôles sont les entiers négatifs ou nuls. Ces pôles sont simples, et le résidu de Γ au point $s = -p$, $(p \in \mathbf{N})$, est $\dfrac{(-1)^p}{p\,!}$.

Si s n'est pas un pôle, on a : $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$, et : $\Gamma(s) \neq 0$.

Soient σ_1, σ_2 des nombres réels tels que $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$, et m un entier positif; on a : $\lim\limits_{|t| \to +\infty} |\, t^m\, \Gamma(\sigma + it)\,| = 0$, uniformément pour σ élément de $[\sigma_1, \sigma_2]$.

Enfin, si c et x sont des nombres réels strictement positifs, on a :

$$e^{-x} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{Re}(s) = c} x^{-s}\, \Gamma(s)\, ds\ ,$$

la droite $\mathrm{Re}(s) = c$ étant orientée dans le sens des ordonnées croissantes. (Cette convention d'orientation est conservée pour toutes les intégrales analogues apparaissant dans le problème).

Si z est un nombre complexe non nul, on note $\mathrm{Arg}(z)$ l'unique détermination de l'argument de z qui appartient à $[-\pi, \pi[$, et on pose : $\mathrm{Log}(z) = \mathrm{Log}\,|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$, puis, pour tout nombre complexe a : $z^a = e^{a\,\mathrm{Log}\,(z)}$.

Dans tout le problème, $\mathfrak{P}$ désigne l'ensemble des nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive.

Soit λ un réel strictement positif; une fonction f définie dans $\mathfrak{P}$ est dite périodique, de période λ, si, quel que soit $z \in \mathfrak{P}$, on a : $f(z+\lambda) = f(z)$.

PREMIÈRE PARTIE

1° Soit f une fonction définie dans $\mathfrak{P}$, holomorphe et périodique de période λ.

a. Démontrer qu'il existe une fonction g, définie et holomorphe dans l'ouvert :

$$\{ z \mid z \in \mathbf{C} \quad \text{et} \quad 0 < |z| < 1 \},$$

telle que

$$g(e^{2i\pi z/\lambda}) = f(z) \quad .$$

b. Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathfrak{P}$. Pour $n \in \mathbf{Z}$, on pose :

(1) $$a_n = \frac{1}{\lambda}\int_{x_0}^{x_0+\lambda} f(t+iy_0)\, e^{-2i\pi n\,(t+iy_0)/\lambda}\, dt \quad .$$

Démontrer que a_n est indépendant de z_0, et que

(2) $$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, e^{2i\pi nz/\lambda} \ ,$$

la convergence de cette série étant uniforme sur toute partie compacte de $\mathfrak{P}$. La fonction f est dite holomorphe (resp. méromorphe) à l'infini si la fonction g est holomorphe (resp. méromorphe) en zéro; donner les conditions sur les a_n pour qu'il en soit ainsi. Dans la suite, on dira que les a_n sont les coefficients de Fourier de f.

c. On suppose qu'il existe deux constantes positives c et ρ telles que, quel que soit $z = x + iy \in \mathfrak{P}$, avec $y \leqslant 1$, on ait

(3) $$|f(x+iy)| \leqslant c\, y^{-1-\rho} .$$

Démontrer que

(4) $$\sup_{n \in \mathbf{Z}^*} |a_n|\,|n|^{-\rho-1} < +\infty \ .$$

2° *a.* Soit $\rho > 0$. Montrer que la suite u définie, pour $n \geqslant 1$, par

$$u_n = n^\rho \,\frac{n\,!}{(\rho+1)\,(\rho+2)\ldots(\rho+h)\ldots(\rho+n)}$$

est bornée.

$\left(\text{On pourra utiliser la série de terme général } \mathrm{Log}\,\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

b. Soit

$$(a_n)_{n \geqslant 0}$$

une suite de complexes. On suppose l'existence d'un réel ρ, strictement positif, tel que :

(5) $$\sup_{n \in \mathbf{N}^*} |a_n|\, n^{-\rho} < +\infty$$

et l'on considère l'application f, de $\mathfrak{P}$ dans $\mathbf{C}$, définie par

(6) $$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{2i\pi nz/\lambda}$$

Montrer que f est holomorphe et que (3) est vérifiée pour une valeur convenable de la constante positive c.

Montrer que, pour tout réel γ strictement positif, on a

$$\lim_{t\to+\infty} t^\gamma\, |f(it) - a_0| = 0 .$$

DEUXIÈME PARTIE

Soient λ un réel strictement positif et $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes. On suppose qu'il existe $\rho > 0$ tel que (5) soit vérifiée. On définit f par (6), et l'on pose, pour $\mathrm{Re}(s) > \rho + 1$,

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s} , \quad \Phi(s) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s)\,\varphi(s)$$

1° *a.* Montrer que φ est holomorphe pour $\mathrm{Re}(s) > \rho + 1$.

b. Montrer, avec soin, que

$$\Phi(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}\,(f(it) - a_0)\,dt \quad \text{pour } \operatorname{Re}(s) > \rho + 1,$$

et qu'inversement, pour $\alpha > \rho + 1$ et $y > 0$, on a

$$f(iy) - a_0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re}(s)=\alpha} y^{-s}\,\Phi(s)\,ds$$

c. Montrer que $s^2\,\Phi(s)$ est bornée sur toute « verticale » du demi-plan $\operatorname{Re}(s) > \rho + 1$.

2° Soient ε et k des réels tels que $|\varepsilon| = 1$ et $k > 0$. On suppose que Φ possède les propriétés suivantes $\boxed{A}$ et $\boxed{B}$:

$\boxed{A}$. Notant ω l'ensemble des complexes distincts de 0 et de k, la fonction Φ admet un prolongement holomorphe à ω, et ce prolongement, noté encore Φ, vérifie : $(\forall s \in \omega)\ (\Phi(s) = \varepsilon\,\Phi(k - s))$.

$\boxed{B}$. La fonction $s \longmapsto \Phi(s) + a_0 \left(\frac{1}{s} + \frac{\varepsilon}{k-s}\right)$ se prolonge en une fonction entière de s, et est bornée sur toute bande « verticale ».

a. Soit α un réel tel que $\alpha > \rho + 1$ et $\alpha > k$. On note U la partie de $\mathbf{C}$, ensemble des complexes s tels que

$$k - \alpha \leqslant \operatorname{Re}(s) \leqslant \alpha \quad \text{et} \quad |\operatorname{Im}(s)| \geqslant 1$$

Montrer que $s^2\,\Phi(s)$ est bornée sur la frontière de U, puis que $s^2\,\Phi(s)$ est bornée dans U.

[On pourra utiliser le résultat précédent et considérer, pour tout $a > 0$, la fonction $s \longmapsto e^{as^2}\,s^2\,\Phi(s)$; on rappelle l'énoncé : *Principe du maximum* : Soit V un ouvert borné de $\mathbf{C}$. Soit g une fonction définie et continue dans l'adhérence de V et holomorphe dans V. Si ∂V désigne la frontière de V, on a $\sup_{z \in V} |g(z)| = \sup_{z \in \partial V} |g(z)|$].

b. Pour tout réel y, strictement positif, on pose :

$$I(y) = \int_{\operatorname{Re}(s)=k-\alpha} y^{-s}\,\Phi(s)\,ds \quad \text{et} \quad J(y) = \int_{\operatorname{Re}(s)=\alpha} y^{-s}\,\Phi(s)\,ds$$

Montrer que $I(y) = \varepsilon\, y^{-k}\, J\left(\frac{1}{y}\right)$ et expliciter $J(y) - I(y)$.

c. Déduire de *b.* que f possède la propriété suivante :

$\boxed{C}$. $\quad f(z) = \varepsilon \left(\frac{z}{i}\right)^{-k} f\left(-\frac{1}{z}\right).$

3° Conservant les notations du paragraphe précédent, montrer que si f possède la propriété $\boxed{C}$, alors Φ possède les propriétés $\boxed{A}$ et $\boxed{B}$. (On pourra utiliser l'expression de $\Phi(s)$ obtenue en (II 1° *b.*) et faire intervenir le point 1 de l'intervalle d'intégration.)

4° Pour tout élément z de $\mathcal{P}$, on pose :

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i\pi n^2 z}$$

a. Calculer, pour t réel strictement positif et y réel, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2 t}\, e^{-2i\pi xy}\, dx$$

(On pourra utiliser, sans la démontrer, l'égalité $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$).

b. Pour t réel strictement positif et x réel, on pose :

$$\psi(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-\pi(x+n)^2 t}.$$

La fonction ψ est une fonction périodique de la variable réelle x. Préciser sa série de Fourier et montrer que celle-ci converge vers ψ. En déduire l'égalité $\theta(it) = \frac{1}{\sqrt{t}}\,\theta\left(-\frac{1}{it}\right)$.

c. Dans l'hypothèse $\left(\lambda = 2,\ k = \frac{1}{2},\ \varepsilon = 1\right)$ et en choisissant une suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ convenable, montrer que θ possède la propriété $\boxed{C}$.

d. Pour tout complexe s tel que $\operatorname{Re}(s) > 1$, on pose :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$$

Déduire de l'étude précédente certaines propriétés de la fonction ζ.

TROISIÈME PARTIE

On pourra utiliser, sans démonstration, le résultat suivant : lorsque $|t|$ tend vers l'infini (t réel), on a :

$$\lim\ |\Gamma(\sigma + it)|\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\ e^{\frac{\pi|t|}{2}}\ |t|^{\frac{1}{2}-\sigma} = 1,$$

uniformément pour σ appartenant à une partie compacte de $\mathbf{R}$.

1° Soient σ_1, σ_2 des nombres réels vérifiant $\sigma_1 < \sigma_2$, U (resp. V) la partie de $\mathbf{C}$ définie par les inégalités $\sigma_1 \leqslant \mathrm{Re}(s) \leqslant \sigma_2$ et $|\mathrm{Im}(s)| \geqslant 1$ (resp. $\sigma_1 \leqslant \mathrm{Re}(s) \leqslant \sigma_2$ et $\mathrm{Im}(s) \geqslant 1$).

Soit h (resp. l) une fonction définie et holomorphe au voisinage de U (resp. V). On suppose qu'il existe des réels positifs α, β_1, β_2 tels que :

$$\left\{\begin{array}{l} \sup\limits_{s \in \mathrm{U}} |h(s)|\, e^{-\alpha|s|} < +\infty \\[2ex] \sup\limits_{|t| \geqslant 1} |t|^{-\beta_j} |h(\sigma_j + it)| < +\infty \quad (j = 1, 2). \end{array}\right.$$

$$\left(\text{resp.} \left\{\begin{array}{l} \sup\limits_{s \in \mathrm{V}} |l(s)|\, e^{-\alpha|s|} < +\infty \\[2ex] \sup\limits_{t \geqslant 1} t^{-\beta_j} |l(\sigma_j + it)| < +\infty \quad (j = 1, 2). \end{array}\right.\right)$$

Soit L la fonction affine telle que : $\mathrm{L}(\sigma_j) = \beta_j$, $(j = 1, 2)$.

Démontrer qu'il existe un réel M tel que, quel que soit $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$, on ait :

$$\sup_{|t| \geqslant 1} |t|^{-\mathrm{L}(\sigma)} |h(\sigma + it)| \leqslant \mathrm{M} \quad \left(\text{resp. } \sup_{t \geqslant 1} t^{-\mathrm{L}(\sigma)} |l(\sigma + it)| \leqslant \mathrm{M}\right).$$

(On se ramènera à démontrer le résultat concernant V et l, puis, en divisant l par la fonction $\left(\frac{s}{i}\right)^{\mathrm{L}(s)}$, on se ramènera au cas où : $\beta_1 = \beta_2 = 0$).

On reprend maintenant les notations et hypothèses de la deuxième partie.

La fonction f vérifie $\boxed{\mathrm{C}}$ et n'est pas constante.

Soit m un entier strictement positif tel que $a_m \neq 0$.

Soit Z une primitive de $s^{\frac{k-1}{2}}\, m^s\, \varphi(s)$, dans le quart de plan :

$$\mathrm{Re}(s) > 0, \quad \mathrm{Im}(s) > 0.$$

2° On donne des réels σ_1, σ_2 vérifiant : $0 < \sigma_1 < \sigma_2$, et l'on note V la partie de $\mathbf{C}$ définie par : $\sigma_1 \leqslant \mathrm{Re}(s) \leqslant \sigma_2$ et $\mathrm{Im}(s) \geqslant 1$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathrm{Z}(s) e^{-\alpha|s|}$ soit bornée sur V.

3° Soit σ un réel tel que $\sigma > \rho + 1$. Démontrer que, pour a réel, on a : $\sup\limits_{t \geqslant 1} t^{-a} |\mathrm{Z}(\sigma + it)| < +\infty$ si, et seulement si : $a \geqslant \dfrac{k+1}{2}$.

4° *a.* Démontrer que, quel que soit σ réel, il existe $a > 0$ tel que

$$\sup_{|t| \geqslant 1} |t|^{-a} |\varphi(\sigma + it)| < +\infty.$$

(On utilisera la question 1° en prenant σ_2 strictement supérieur, en particulier, à $\rho + 1$, et : $\sigma_1 = k - \sigma_2$).

b. Démontrer que, pour σ réel ($\sigma > \rho + 1$) et z élément de $\mathfrak{P}$, on a :

$$f(z) - a_0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{Re}(s) = \sigma} \left(\frac{z}{i}\right)^{-s} \Phi(s)\, ds.$$

c. Évaluer l'intégrale suivante, pour z élément de $\mathfrak{P}$:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{Re}(s) = \frac{k}{2}} \left(\frac{z}{i}\right)^{-s} \Phi(s)\, ds.$$

On suppose désormais que les coefficients de Fourier de f (I 1° *b.*) sont réels, qu'il existe $\beta \in \left[0, \dfrac{k+1}{2}\right[$ tel que, lorsque u tend vers 0 par valeurs strictement positives, $u^\beta\, |f(e^{iu})|$ reste borné et qu'enfin la fonction φ n'a qu'un nombre fini de zéros sur la droite $\mathrm{Re}(s) = \dfrac{k}{2}$.

5° *a.* Démontrer que $i^{\frac{1-\varepsilon}{2}}\, \Phi(s)$ est réel pour $\mathrm{Re}(s) = \dfrac{k}{2}$, et que, lorsque u tend vers 0 par valeurs strictement positives,

$$u^\beta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t\left(\frac{\pi}{2} - u\right)} \left|\Phi\left(\frac{k}{2} + it\right)\right| dt \qquad \text{reste borné.}$$

b. En déduire que, lorsque T, réel, tend vers $+\infty$,

$$\mathrm{T}^{-\beta} \int_0^{\mathrm{T}} t^{\frac{k-1}{2}} \left|\varphi\left(\frac{k}{2} + it\right)\right| dt \qquad \text{reste borné.}$$

c. Démontrer que : $\sup\limits_{t \geqslant 1} t^{-\beta} \left|\mathrm{Z}\left(\dfrac{k}{2} + it\right)\right| < +\infty$.

Quelle conclusion peut-on tirer des calculs précédents ?

6° Les notations sont celles de la dernière question de la deuxième partie.

a. Établir, pour z élément de $\mathcal{P}$, l'égalité :

$$\theta\left(1-\frac{1}{z}\right)=\left(\frac{z}{i}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 z}$$

b. Démontrer que la fonction ζ a une infinité de zéros sur la droite $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$.

II.4 RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE

II.4.1. REMARQUES GENERALES

Le problème proposait l'étude d'un fragment de la théorie de Hecke. Après une partie préliminaire, la deuxième partie explicitait le lien entre formes automorphes et séries de Dirichlet et donnait un exemple (fonction zéta de Riemann). La dernière partie faisait démontrer, modulo certaines hypothèses, l'existence d'une infinité de zéros sur la «droite critique». La rédaction du problème suivait exactement l'article original de Hecke (cf. aussi le livre de Ogg sur les formes automorphes). Les candidats qui ont traité correctement la première partie (resp. les deux premières parties) ont eu une note voisine de la moyenne (resp. du maximum) ; un seul candidat a abordé valablement la dernière partie.

Comme on le constate à la lecture des tableaux statistiques, à peine un candidat sur cinq a été capable de démarrer le problème. Même en tenant compte d'un certain pourcentage de candidats n'ayant pas pu (resp. pas voulu) se préparer sérieusement, ces résultats, comparables à ceux des années précédentes, sont extrêmement décevants. On pourrait, une fois de plus et, à vrai dire non sans quelques raisons, invoquer la classique «nullité» des candidats mais cette «explication» semble largement insuffisante. En effet, les textes proposés sont certes très longs mais, au moins dans leur première moitié, guère plus difficiles que les sujets d'examen de maîtrise. Force est donc de constater que des étudiants capables de traiter une question à l'issue d'un cours de maîtrise n'en sont plus capables un an après. Bien entendu le jury, composé en majeure partie d'enseignants du supérieur, sait fort bien qu'un étudiant, même reçu avec mention, n'a quelquefois assimilé que superficiellement le programme de maîtrise. Toutefois une lecture, même rapide, des rapports des années précédentes, montre que les problèmes d'analyse de l'agrégation ne nécessitent pour être traités qu'une bonne connaissance des techniques de base (premier cycle) et des parties élémentaires des programmes de maîtrise. On ne saurait trop conseiller aux candidats de revoir ces questions en

détail, de connaître de façon précise les énoncés des principaux résultats, de faire (ou de refaire) un certain nombre d'exercices standards etc... Tout se passe comme si, obnubilés par l'oral, les candidats négligeaient la préparation de l'écrit. Un rééquilibrage semble indispensable et ne pourrait être que payant.

Comme cas limite d'impréparation les correcteurs ont eu l'impression que les candidats de certaines «séries» ignoraient jusqu'à la notion même de fonction analytique...

II.4.2. REMARQUES PARTICULIERES

Première partie

1e) a) b) Ces deux questions constituent un exercice classique qui est proposé, voire résolu, dans la plupart des cours d'analyse complexe. Le a) était immédiat à condition d'avoir des idées précises sur le logarithme complexe. Posant

$$u(z) = e^{2i\pi z/\lambda}$$

on note tout d'abord que u est une application surjective de $\mathcal{P}$ sur le disque unité pointé D et que $u(z_1) = u(z_2)$, si et seulement si, $z_1 - z_2$ est un multiple entier de λ. f étant périodique, de période λ, ceci prouve l'existence d'une fonction g vérifiant la condition de l'énoncé. Pour prouver que g est holomorphe, il faut utiliser l'inversibilité locale de la fonction u c'est-à-dire de la fonction exponentielle. Le plus rapide est évidemment de citer le théorème d'inversion locale pour les fonctions analytiques (u' est toujours non nul, donc...) ; de façon équivalente, on pouvait utiliser l'existence, dans tout disque ne contenant pas l'origine d'une détermination holomorphe de Log z. Quelques rares candidats ont procédé ainsi. D'autres remarquent que la détermination de Log z donnée dans le préambule permet de prouver l'holomorphie de g, sauf sur un rayon, puis utilisent, soit le théorème de Moréra, soit une deuxième détermination pour terminer. Ces solutions, plus compliquées à rédiger, ont rarement été parfaites. De toutes façons, ceci ne concerne qu'une minorité de copies ; les autres offrent un raccourci caricatural de l'impréparation des candidats. L'existence (purement ensembliste) de g n'est pratiquement jamais complètement démontrée. Dans de nombreuses copies, la périodicité de f n'est pas utilisée. Certains affirment que u est bijective ou n'hésitent pas à écrire des phrases du genre «u est injective et périodique donc...». Dans au moins la moitié des cas, on apprend que Log z est holomorphe dans D. Signalons enfin les nombreuses tentatives d'esbroufe (Ex. g est holomorphe car u et f le sont...) et les invocations magiques (fibré, faisceau, fonction multiforme, d''—cohomologie...).

Le b) a donné lieu à moins d'erreurs. Dans une proportion notable des copies, on montre que les a_n sont les coefficients de Laurent de g et on cite, plus ou moins correctement, les propriétés du développement de Laurent. Les imprécisions proviennent toujours de la notion de convergence uniforme, notion qui semble floue pour bien des candidats. Peu de candidats signalent que l'image, par u, d'une partie compacte de $\mathscr{P}$ est une partie compacte de D ; c'était pourtant indispensable. Une proportion non négligeable de copies ne donne pas la condition pour que g soit méromorphe ; on atteint là la limite des connaissances de certains candidats... Enfin notons qu'il était possible de prouver l'indépendance des a_n par un raisonnement direct à partir du théorème de Cauchy.

Cette question était triviale ; il suffisait, dans la formule définissant a_n de prendre $x_o = 0$ et $y_o = 1/|n|$ et de faire la majoration évidente.

2e) a) Outre quelques copies délirantes, au sujet desquelles il serait peu charitable d'insister, cette question a donné lieu aux erreurs habituelles : utilisation des équivalents pour évaluer une somme, fautes de calcul etc... Il est inadmissible que des candidats à l'agrégation ne sachent pas traiter un exercice banal de première année de premier cycle.

b) De nombreuses copies démontrent l'holomorphie de f de façon assez satisfaisante ; mais bien peu remarquent que (6) converge uniformément dans tout demi-plan de la forme $\mathrm{Re}\,(z) \geqslant a > 0$; c'était pourtant utile pour la suite. Pratiquement aucune copie n'établit la majoration (3). Il fallait majorer $|a_n|$ à l'aide de (5), puis n^ρ à l'aide de a) et enfin reconnaître le développement de $(1 + x)^a$; c'est probablement sur ce dernier point que les candidats ont achoppé. Cela n'est pas très grave ; en revanche, les erreurs commises dans la toute dernière question de cette partie sont plus inquiétantes. En effet, pour trouver la limite demandée, la plupart des candidats «passent à la limite» terme à terme dans la série. Certains ne donnent pas la moindre justification, d'autres invoquent la convergence uniforme sur tout compact... Il fallait, pour pouvoir appliquer le théorème de la double limite, vérifier que la série donnant $f(it) - a_o$ convergeait uniformément au «voisinage de l'infini » c'est-à-dire, par exemple pour $t > 1$. D'autres solutions étaient possibles ; on pouvait, c'était le plus simple, revenir à g.

Deuxième partie

1e) a) Cette question facile a été assez souvent bien traitée. Certains candidats ont, vainement essayé de se ramener au cas des séries entières. On se demande bien pourquoi.

b) Le calcul formel a été fait par la plupart des candidats qui ont, à juste titre, pensé qu'il leur en serait tenu compte. En revanche, la justification brille par son absence dans la quasi-totalité des copies. Elle était pourtant facile à condition de connaître le théorème (de Lebesgue) d'intégration terme à terme d'une série de fonctions. A quelques exceptions près, ce n'était pas le cas des candidats. Les correcteurs sont las de constater, année après année que les candidats ignorent ces théorèmes d'un usage constant et ils sont de moins en moins enclins à l'indulgence. Inutile de dire que les justifications fantaisistes (convergence uniforme sur tout compact...) ou frisant l'escroquerie (d'après Lebesgue, on a...) ont été sévèrement sanctionnées.

c) Cette question n'a pas posé de problèmes.

2e) a) On voit aisément que $s^2\,\phi(s)$ est bornée sur la frontière de U. Montrer qu'elle est bornée dans U est beaucoup plus difficile. Comme U n'est pas borné, on ne peut pas appliquer directement le principe du maximum. On pouvait procéder comme suit : on applique le principe du maximum à la fonction $e^{as^2}\,\phi(s)$ dans le domaine borné, intersection de U avec la bande horizontale $|\,\mathrm{I}m\,(z)\,| \leqslant n$. On fait ensuite tendre n vers l'infini, puis a vers 0.

2e) b) De nombreux candidats ont essayé d'établir l'égalité ; ils posent $s' = k - s$ d'où $ds' = -ds$; il apparaît un signe – qui leur a posé bien des problèmes. Il fallait tenir compte de la convention d'orientation des «verticales», certains l'ont fait Mais beaucoup d'autres escamotent purement et simplement le signe au hasard d'un calcul ou même déclarent que, puisque $\in = \pm 1$, on a $\in = -\in$, ce qui est commode...

La fin de la question 2 et la question 3 ont été bien traitées par les rares candidats qui sont arrivés jusque là.

4e) a) et b) étaient indépendants de ce qui précède ; ici encore, la plupart des candidats qui abordent ces questions ne donnent pas la moindre justification de leurs calculs formels.

c) et d) étaient évidents.

Un seul candidat ayant abordé la *troisième partie,* celle-ci n'est pratiquement pas intervenue dans le barème.

II.4.3. LES NOTES (sur 60)

- *Candidats (1 466 copies) :*

0	26,26%	25 à 28	3,55%
1 à 4	31,99%	29 à 32	1,98%
5 à 8	9,69%	33 à 36	1,09%
9 à 12	5,32%	37 à 40	0,89%
13 à 16	5,12%	41 à 44	0,95%
17 à 20	6,89%	45 à 48	0,48%
21 à 24	4,98%	49 à 60	0,82%

- *Candidates (803 copies) :*

0	258
1 à 5	162
6 à 10	92
11 à 15	92
16 à 20	57
21 à 25	39
26 à 30	37
31 à 35	19
36 à 40	14
41 à 50	19
51 à 60	14

II.5 TEXTE DE L'EPREUVE D'ANALYSE NUMERIQUE

On se propose d'étudier différentes questions, relatives à des systèmes différentiels à retard, avec ou sans contrôle. Les notions utiles, non classiques, sont définies dans l'énoncé. Pour simplifier, on considère seulement des systèmes différentiels linéaires, à coefficients constants. Aucune considération n'est demandée sur les algorithmes qui seraient nécessaires pour calculer, de façon approchée, la solution de certaines des questions posées (par exemple ***Q. 17***).

Dans tout le problème, les notations suivantes sont utilisées :

— l étant un entier positif quelconque, un élément de $\mathbf{R}^l$ est une colonne à l éléments. I_l désigne la matrice unité à l lignes et l colonnes.

— Si M est une matrice carrée quelconque, ${}^t M$ désigne sa transposée.

— $L^1(a, b ; \mathbf{R}^l)$ désigne l'espace des (classes de) fonctions d'une variable réelle, à valeurs dans $\mathbf{R}^l$, qui sont intégrables au sens de Lebesgue sur l'intervalle (a, b) de la droite réelle.

Soit le système différentiel (1) :

$$\frac{d\,X(t)}{dt} = A\,X(t) + B\,X(t-h) + F(t) \tag{1}$$

dans lequel :

- — la variable indépendante réelle t sera appelée le temps;
- — h est une constante donnée, positive (le retard);
- — A et B sont deux matrices données, à termes réels constants, à n lignes et n colonnes;
- — F est une application donnée, de $[0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}^n$, localement intégrable au sens de Lebesgue;
- — X est une application inconnue, de $[-h, +\infty[$ dans $\mathbf{R}^n$, astreinte à être *absolument continue* pour $t \geqslant 0$, et à vérifier (1) pour $t > 0$.

I

On se donne $X_0 \in \mathbf{R}^n$ et $\varphi \in L^1(-h, 0 ; \mathbf{R}^n)$.

Q. 1 Montrer que le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Rechercher X satisfaisant (1), et vérifiant les conditions} \\ \text{initiales « épaisses » : } X(0) = X_0,\ X(t) = \varphi(t) \text{ pour presque} \\ \text{tout } t \text{ de } (-h, 0) \end{array} \right.$$

possède une solution, et que celle-ci est unique pour $t \geqslant 0$.

Cette solution sera notée $X(. ; X_0, \varphi, F)$. Dans tout le problème, une solution de (1) sera toujours supposée correspondre à des conditions initiales épaisses, du type décrit ci-dessus.

En particulier, on supposera toujours que la restriction à $[-h, 0]$ de toute solution de (1) appartient à $L^1(-h, 0 ; \mathbf{R}^n)$.

Q. 2 Dans cette question, on suppose que l'application F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. Si m est un entier positif ou nul, montrer que l'application $t \longmapsto X(t ; X_0, \varphi, F)$ est de classe $\mathscr{C}^m$ sur $]mh, +\infty[$. Comment ce résultat est-il modifié si on ajoute l'hypothèse : φ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $]-h, 0[$? (k entier donné $\geqslant 0$).

Q. 3 Montrer qu'il existe une fonction unique, K, de variable réelle : $u \longmapsto K(u)$, où $K(u)$ est une matrice à termes réels, à n lignes et n colonnes, vérifiant les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} K(u) = 0 & \text{pour} \quad u < 0 \\ K(0) = I_n & \\ u \longmapsto K(u) \text{ est fonction absolument continue} & \text{pour} \quad u \geqslant 0 \\ \dfrac{d\,K(u)}{du} = K(u)A + K(u-h)B & \text{pour} \quad u > 0 \end{array} \right.$$

On notera que, pour $0 < u < h$, l'équation différentielle matricielle, vérifiée par K, se réduit à $\dfrac{dK(u)}{du} = K(u)A$.

Si X est une solution de (1), et si t est positif, évaluer, de deux façons différentes, l'intégrale $\displaystyle\int_0^t K(t-s)\,\frac{d\,X(s)}{ds}\,ds$, et en déduire l'expression de $X(t ; X_0, \varphi, F)$ au moyen de K (la formule obtenue contient des symboles d'intégration).