MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

DIRECTION CHARGEE DES PERSONNELS ENSEIGNANTS

Agrégation Mathématiques

1973

Rapport de MM. MAGNIER, Inspecteur général de l'Instruction publique,
Président du jury féminin

POUGNAN, Inspecteur général de l'Instruction publique,
Président du jury masculin

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE ET DE DOCUMENTATION PEDAGOGIQUES

Admissions aux concours d'agrégation 73

● Mathématiques (femmes).

Mmes et Mlles Laperrière, Lignon née Millet, Solal, Celigny, Blanquart née Bantegnies, Blondel née Rivoal, Duval, Galtier, Moisi, Bour née Daviot, Madaune, Blanc née Bornet, Brossard née Pircher, Lefebvre née Laflèche, Pely, Vallée née Salesse, Genon, Arous, Combres, Boiteux, Blanquer, Gourdy, Marbeau née Marrannes, Costa, Perret-Gentil née Grandsire, Tain, Lesca, Chopin, Pechmajou, Laversanne née Merleau, Rovel, Verrey, Catus née Penot, Delavallée née Boudelier, Voiron, Bellot, Bertrand née Mathis, De Postel, Duhamel née Pourquier, Minelli, Signoret, Boudet née Lesage, Nivet, Szpirglas née Vidal, Nadjar, Le Bihan née Le Roux, Legrand, Georger, Monasse née Fremond, Chauvet, Dussere, Delmon, Charrière, Claudine Kahn, Castets, Himpens, Combelles, Loysance, Pariselle, Huron, Bonnard née Gacogne, Bentouhami, Boucly, Romanovicz, Laude, Leblond, Preaux, Dupont née Lubac, Lamouroux, Steyaert née Danton, Tourneur, Cretin, Frereau, Leclerc née Olive, Begel, Leleu, Mathia née Podlejski, Savina, Montel, Sort née Lafargue, Elizabeth Privey.

● Mathématiques (hommes).

MM. Chistophe Soulé, Fathi, Monasse, Bezivin, Birge, Grigis, Nourrigat, Mattera, Angeniol, Bloch, Bernard Lasar, Raugi, Coupet, Tauvel, Visetti, Moret-Bailly, Aubonnet, Philippe Clarisse, Alexis Marin, Pierre Bérard, Tecouart, Doue, André Duchêne, Michel Pierre, Andler, Ehrmann, Bormand, Taussat, Eastwood, Daniel Luçon, Malod, Marc Chaperon, Francis Conrad, Jean-Louis Thomas, Barral, Schruoffeneger, Michel Deschamps, Levy-Bruhl, Eric Bernet, Salanskis, Terracher, Lavenir, Pfeiffer, Pierre Bonneau, Julliot, Bernard Loiseau, Jean-Louis Roque, Guy Marchal, François Gaudel, Saramito, Guy Morel, André Valentin, Herr, Jakubowicz, Lamard, Lichnewski, Christian Garcin, Didier Vidal, Sornin, Alain Thomas, Miternique, Marlin, Jean-Louis Garcin, Charles Payet, Selig, Esclapez, Volcker, Patrice Debois, Delale, Yves Pruvot, Matiffa, Philippe Roger, Cohen, Biau.

MM. Robert Garcin, Levrard, Swinge Douw, Hollebeke, Licois, Jean-François Michon, Bethery, Jean Bonnet, Michel Leguen, Blum, Cumenge, Fayette, Christian Beaume, Marcel Isidore, Renfer, Michel Vidal, Korb, Pecker, Perotin, Christian Bernard, Danet, Dubiez, Haeuw, André Bastian, Paul Guiot, Dominique Leclerc, Jean-Paul Aubry, Henri Brunin, Noirfalise, Savaric, Jean-Pierre Villain, Cimetière, Mages, Henry Bertrand, Michel Chipot, Thierry Foucart, Richard Lascar, Guy Bontemps, Arnaud Joly, Anuset, Christian Bonnet, Sarrouy, Jean-Pierre Cabannes, Didry, Francheteau, Midy, Schmitt, Roland Berger, Chabreyron, Cruciani, Patrick Thomas, Emery, Martinie, Mineau, Raboin, Col, Di Costanzo, El Nouty, Moteau, Alain Nizard, Philippe Noël, Rogniaux, Jacques Weber.

Le monde
3 août 73

AGREGATION DE MÂTHEMATIQUES

Session de 1973

COMPOSITION DES JURYS

AGREGATION HOMMES

M. POUGNAND, *Inspecteur général de l'Instruction publique, Président ;*

M. COMBES, *Professeur à l'Université Paris VI, Vice-Président ;*

M. RAMIS, *Inspecteur général de l'Instruction publique, Vice-Président ;*

M. BERRARD, *Inspecteur général de l'Instruction publique ;*

M. BERGER, *Professeur à l'Université de Paris VII ;*

M. BERROIR, *Professeur à l'Université de Paris VI ;*

M. BOUTET DE MONVEL, *Maître de Conférences à l'Université de Paris VII ;*

Mme CHATELIN, *Maître de Conférences à l'Université de Grenoble ;*

M. CONZE, *Maître de Conférences à l'Université de Rennes ;*

M. DEHEUVELS, *Professeur à l'Université de Paris VI ;*

M. GASTINEL, *Professeur à l'Université de Grenoble ;*

M. GEORGE, *Chargé d'Enseignement à l'Université de Nancy ;*

M. HILY, *Maître de Conférences à l'Université de Nancy ;*

M. KAROUBI, *Professeur à l'Université de Paris VII ;*

M. KREE, *Professeur à l'Université de Paris VI ;*

M. LEBORGNE, *Maître de Conférences à l'Université de Nantes ;*

M. RAOULT, *Maître de Conférences à l'Université de Rouen ;*

M. RIVET, *Maître de Conférences à l'INSA de Rennes ;*

M. ROBERT, *Professeur à l'Université de Lyon ;*

M. ROUGEE, *Maître de Conférences à l'Université de Rouen ;*

M. CRESTEY, *Professeur au Lycée Louis-le-Grand à Paris ;*

M. CUENAT, *Professeur au Lycée Hoche à Versailles ;*

M. DABLANC, *Professeur au Lycée Hoche à Versailles ;*

M. EXBRAYAT, *Maître-Assistant à l'Université de Paris VI ;*

M. FLORY, *Professeur au Lycée Louis-le-Grand à Paris ;*

M. FRABOUL, *Professeur au Lycée Clémenceau à Nantes ;*

M. GONTARD, *Professeur au Lycée du Parc à Lyon ;*

M. MAZET, *Maître-Assistant à l'Université de Paris VI.*

AGREGATION FEMMES

M. ARNAUDIES, *Professeur de mathématiques spéciales au Lycée Kléber à Strasbourg ;*

M. AVANISSIAN, *Professeur à l'Université de Strasbourg ;*

M. BAILLE, *Maître-Assistant à l'Université de Grenoble ;*

Mme BAUMONT, *Professeur de mathématiques spéciales au Lycée du Parc à Lyon ;*

M. BERROIR, *Professeur à l'Université de Paris VI ;*

Mme BLANCHETON, *Professeur à l'Université de Lyon, Vice-Présidente du jury ;*

M. BOUSQUET, *Professeur de mathématiques spéciales au Lycée Pasteur à Neuilly ;*

Mlle CALAIS, *Professeur à l'Université de Reims ;*

M. COEURE, *Professeur à l'Université de Nancy ;*

M. DEHEUVELS, *Assistant à l'Université de Paris VI ;*

M. GASTINEL, *Professeur à l'Université de Grenoble ;*

M. HELLEGOUARCH, *Professeur à l'Université de Caen ;*

M. LETAC, *Professeur à l'Université de Clermont ;*

M. MAGNIER, *Inspecteur général de l'Instruction publique, Président du jury ;*

M. MARTIN, *Professeur de mathématiques spéciales au Lycée du Parc à Lyon ;*

M. MONESTIER, *Professeur de mathématiques spéciales au Lycée Chaptal à Paris ;*

M. ODOUX, *Professeur de mathématiques spéciales au Lycée Champollion à Grenoble ;*

M. RICHE, *Inspecteur général de l'Instruction publique, Vice-Président du jury ;*

M. ROBERT, *Professeur à l'Université de Lyon ;*

M. ROUGEE, *Professeur à l'Université de Rouen ;*

M. SCHIFFMANN, *Professeur à l'Université de Strasbourg ;*

M. SIMON, *Professeur de mathématiques spéciales au Lycée Jacques-Decour à Paris ;*

M. VAN CUTSEM, *Professeur à l'Université de Grenoble.*

LE DEROULEMENT DU CONCOURS 1973

EPREUVES PREPARATOIRES (écrit)

Les épreuves préparatoires ont eu lieu aux dates suivantes :

Composition de Mathématique Générales	: mercredi	9 mai	de 8 heures à 14 heures
Composition d'Analyse	: jeudi	10 mai	de 8 heures à 14 heures
Composition de Mathématiques Appliquées	: samedi	12 mai	de 8 heures à 14 heures.

La composition de Mathématiques Appliquées comprenait trois options : analyse numérique, mécanique, probabilité, les candidats étant tenus de préciser l'option de leur choix lors de leur inscription au concours.

Les listes d'admissibilité ont été affichées au Ministère de l'Education nationale et au Lycée Saint-Louis à Paris :
- le 15 juin 1973 vers 15 heures pour l'agrégation féminine
- le 21 juin 1973 vers 12 heures pour l'agrégation masculine.

EPREUVES DEFINITIVES (oral)

Les épreuves définitives se sont déroulées à Paris :
- au Lycée Montaigne et à partir du jeudi 21 juin pour l'agrégation féminine
- au Lycée Jean de La Fontaine et à partir du jeudi 28 juin pour l'agrégation masculine.

Les résultats définitifs (liste d'admission à l'agrégation, listes des équivalences accordées des épreuves théoriques du C.A.P.E.S. ou des épreuves complètes du C.A.P.E.S., ont été affichées au Ministère de l'Education nationale et aux Lycées Montaigne ou Jean de La Fontaine:
- le mercredi 25 juillet vers 16 heures pour l'agrégation féminine
- le lundi 30 juillet vers 11 heures pour l'agrégation masculine.

STATISTIQUES DIVERSES

	Candidats	Candidates
Nombre de postes mis au concours	170	134
Nombre de candidats inscrits (1)	1 474 + 22 *	839
Nombre de candidats présents à la 1re épreuve	1 239 + 19 *	724
Nombre de candidats ayant terminé l'écrit	1 143 + 16 *	653
Nombre de candidats déclarés admissibles	332 + 1 *	162
Nombre de candidats admis à l'agrégation	136 + 1 *	78
Nombre d'équivalences accordées des épreuves théoriques du C.A.P.E.S	15	14
Nombre d'équivalences accordées des épreuves complètes du C.A.P.E.S.	5	3

Les pourcentages des abstentions totales se montent à 15,6 % pour l'agrégation masculine, à 13,7 % pour l'agrégation féminine ; ils étaient de 14 % en 1972, de 15 % en 1971.

Les pourcentages des abandons en cours d'écrit sont de 8,2 % pour l'agrégation masculine, de 9,8 % pour l'agrégation féminine ; ils étaient de 13 % et 11 % en 1972, de 15 % et 10 % en 1971. Il est intéressant de remarquer que pour l'agrégation masculine 33 candidats seulement ont abandonné après la composition de Mathématiques Générales, soit 2,6 % des candidats présents à cette épreuve ; en 1972, le pourcentage était de l'ordre de 8 %. La même remarque peut être faite pour l'agrégation féminine où les nombres correspondants sont respectivement 37 et 5,1 %. Ce résultat est dû très probablement au choix du texte de la première épreuve.

Par contre le pourcentage (5,4 %) des abandons entre la 2e et la 3e épreuve est comparable à celui (5,3 %) constaté en 1972.

(1) l'astérisque désigne les candidats étrangers

REPARTITION ENTRE LES OPTIONS

	Analyse numérique		Mécanique		Probabilité	
	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes
Ont composé	510 (51)	277	198 (3)	81	451 (19)	295
Admissibles	160 (47)	69 (27)	42 (3)	16 (1)	131 (17)	77 (19)
Admis	78 (34)	37 (15)	8 (2)	5 (0)	51 (14)	36 (13)

(Entre parenthèses est indiqué le nombre des candidats appartenant aux Grandes Ecoles)

STATISTIQUE SUR LES ADMISSIBLES AYANT PRESENTE DES CONCOURS ANTERIEURS

	Présentés		Admis	
	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes
Non admissibles déjà	49	18	12	5
Admissibles une fois	89	41	33	20
Admissibles deux fois au moins	24	11	5	6

SITUATION UNIVERSITAIRE DES AGREGES

Les candidats et candidates sont séparés en 11 groupes désignés par les abréviations suivantes :

U ou J : Elèves de l'E.N.S. Ulm ou de l'E.N.S. Jourdan
C ou F : Elèves de l'E.N.S. Saint-Cloud ou de l'E.N.S. Fontenay
T : Elèves de l'E.N.S.E.T.
A : Assistants de Faculté
P.C. : Professeurs certifiés
C.O. : Professeurs ou assistants en congé ou au Service National
C.P.R. : Professeurs stagiaires de C.P.R.
I.P.E.S: Elèves des I.P.E.S.
E : Etudiants
D : Personnel autre que les certifiés et enseignement privé
Et. : Etrangers

CANDIDATS

	U	C	T	A	P.C.	C.O.	C.P.R.	I.P.E.S.	E	D	Et.	
Inscrits	31	16	29	60	384	107	331	155	199	162	22	1 496
Admissibles	27	16	24	25	46	23	54	48	52	17	1	333
Admis	21	15	14	7	8	7	21	15	24	4	1	137

CANDIDATES

	J	F	T	A	P.C.	C.O.	C.P.R.	I.P.E.S.	E	D	Et.	
Inscrites												
Admissibles	21	19	7	7	27	0	38	23	18	2	0	162
Admises	14	11	3	4	13	0	15	9	8	1	0	78

REPARTITION DES CANDIDATS SUIVANT LES CENTRES D'ECRIT

CANDIDATS

Centres / Candidats	Aix-Marseille	Amiens	Besançon	Bordeaux	Caen	Clermont	Dijon	Grenoble	Lille	Limoges	Lyon	Montpellier	Nancy-Metz
Inscrits	63	31	32	62	24	22	33	49	162	17	79	55	71
Ayant composé	52	25	27	59	24	19	28	38	136	14	71	43	58
Admissibles	15	5	6	9	5	5	4	6	17	1	19	9	13
Admis	6	1	1	4	0	1	1	2	4	0	6	3	4

Centres / Candidats	Nantes	Nice	Orléans	Paris	Poitiers	Reims	Rennes	Brest	Rouen	Strasbourg	Toulouse	Etranger et DOM	
Inscrits	42	36	35	355	39	31	26	20	38	41	49	84	
Ayant composé	36	29	27	313	31	27	22	7	30	36	41	59	
Admissibles	10	8	7	135	11	2	7	5	7	7	6	14	
Admis	1	4	2	83	2	0	0	1	1	4	3	3	

CANDIDATES

Centres / Candidates	Aix-Marseille	Amiens	Besançon	Bordeaux	Caen	Clermont	Dijon	Grenoble	Lille	Limoges	Lyon	Montpellier	Nancy-Metz
Inscrites	27	21	12	25	12	10	15	48	55	14	38	21	31
Ayant composé	23	14	11	23	8	9	11	45	45	13	34	18	25
Admissibles	1	5	1	10	0	0	2	5	7	1	7	2	5
Admises	0	0	0	6	0	0	1	2	3	1	4	1	3

Centres / Candidates	Nantes	Nice	Orléans	Paris	Poitiers	Reims	Rennes Brest	Rouen	Strasbourg	Toulouse	Etranger et DOM	
Inscrites	24	13	21	281	21	10	24	34	22	39	21	
Ayant composé	18	10	16	257	18	0	18	29	21	33	16	
Admissibles	5	1	3	92	0	0	3	2	3	4	3	
Admises	2	1	0	46	0	0	2	1	2	0	2	

AGES DES CANDIDATS ADMISSIBLES ET ADMIS

	Candidats		Candidates	
Année de naissance	Admissibles	Admis	Admissibles	Admis
1952	4	3	0	0
1951	30	20	23	17
1950	69	37	36	16
1949	70	32	51	27
1948	50	16	22	6
1947	37	14	8	3
1946	19	9	22	9
1945 et avant 1945	47	6		

Ne sont pas cités 7 candidats qui ne se sont pas présentés à leur Président de jury

AFFECTATIONS DES AGREGES 1973

Sur les 136 candidats et les 78 candidates français admis
44 + 19 ont été autorisés à faire une année supplémentaire dans une E.N.S. ;
13 + 5 ont été maintenus ou détachés dans l'Enseignement Supérieur ;
5 + 5 ont obtenu des chaires préparatoires ;
37 + 25 ont été affectés dans des classes de T.C., T.E. ou T.S. de Lycées ;
4 + 4 ont été nommés dans des Ecoles Normales ;
14 + 11 ont été nommés sur des chaires ordinaires de Lycées ;
9 + 4 sont partis à l'étranger au titre de la coopération ou du Service National ;
1 + 0 a opté pour l'enseignement privé ;
4 + 4 suivront un stage de formation professionnelle ;
4 + 0 ont obtenu un sursis d'intégration ;
1 + 1 ont obtenu un C.C.P.
136 78

EPREUVES ECRITES

TEXTE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES GENERALES

DURÉE : 6 heures

Les dessins demandés dans le texte seront exécutés sur papier millimétrique.

Pour cette épreuve, le problème a été choisi d'une approche assez facile. Les candidats sont prévenus qu'entreront dans l'appréciation des copies le soin apporté à la présentation, la clarté et la précision de la rédaction. Ils sont en particulier invités :

— d'une part à respecter les notations fixées par le texte;

— d'autre part à assortir leur rédaction de figures *soignées*, soit qu'elles soient explicitement demandées dans l'énoncé, soit que, les ayant aidés à réaliser une situation, elles leur permettent de s'exprimer plus clairement, étant bien entendu qu'une figure ne saurait se substituer à un raisonnement rigoureux.

Les différentes questions du problème, de difficultés inégales, ont une indépendance relative. Aucun ordre n'est imposé pour les résoudre. A condition de l'indiquer clairement, les candidats pourront utiliser pour la résolution d'une question des résultats fournis par l'énoncé d'une question précédente, même s'ils n'ont pu la résoudre.

PARTIE 0. — *Notations et définitions*

0.1.

Pour A et B parties d'un même ensemble, on pose

$$A \setminus B = \{ a \in A,\ a \notin B \} \quad .$$

On note $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers rationnels, $\mathbf{R}$ le corps des réels, $\mathbf{C}$ celui des complexes. Si A est une partie minorée de $\mathbf{R}$, sa borne inférieure est désignée par $\inf A$.

On considère l'espace métrique $\mathbf{R}^2$ obtenu en munissant $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ de son produit scalaire canonique noté $(. \mid .)$, la norme associée étant notée $\| \, . \, \|$ et la distance associée $d(. , .)$. Deux vecteurs (ou points) $\xi = (x, y)$ et $\xi' = (x', y')$ ont pour *déterminant* dans la base canonique le réel $xy' - yx'$ *noté* $\det(\xi, \xi')$.

La lettre $\mathcal{D}$ désigne le sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ défini par :

$$\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \ ; \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \quad , \quad y \geqslant 0 \ , \quad x^2 + y^2 \geqslant 1 \right\} .$$

On convient de noter :

$$0 = (0,0) \qquad u = (1,0) \qquad v = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad w = (0,1) \quad .$$

0.2.

On dira qu'une partie Λ de $\mathbf{R}^2$ est un *réseau*, s'il existe au moins une base $\{ \xi, \eta \}$ de $\mathbf{R}^2$ telle que l'on ait :

$$\Lambda = \mathbf{Z}\xi + \mathbf{Z}\eta = \{ p\,\xi + q\,\eta \ ; \ (p, q) \in \mathbf{Z}^2 \} .$$

Tout système $\{ \xi', \eta' \}$, vérifiant $\Lambda = \mathbf{Z}\,\xi' + \mathbf{Z}\,\eta'$, est dit une *base du réseau.* On *note* respectivement :

Λ_e le réseau dont une base est $\{ u, v \}$;

Λ_c le réseau dont une base est $\{ u, w \}$;

Λ_r^θ le réseau dont une base est $\{ u, \theta w \}$ avec $\theta \geqslant 1$.

Plus généralement un réseau est dit *réduit,* s'il admet une base de la forme $\{ u, j \}$ avec $j \in \mathcal{D}$.

Deux réseaux sont dits *isométriques* (resp. *semblables*) s'il existe une isométrie (resp. similitude directe ou indirecte) de $\mathbf{R}^2$ transformant l'un en l'autre. Un réseau semblable à Λ_e est dit *équilatéral*; un réseau semblable à Λ_c (resp. à un Λ_r^θ) est dit *carré* (resp. *rectangulaire*).

0.3.

Pour un réseau quelconque Λ on appelle :

- *carcan* de Λ le nombre réel $\operatorname{carc} \Lambda = \inf \{ \| \lambda \| ;\ \lambda \in \Lambda \setminus 0 \}$;
- *alvéole fondamental* de Λ l'ensemble

$$\mathcal{A}(\Lambda) = \{ \xi \in \mathbf{R}^2 ;\quad \forall \lambda \in \Lambda,\ d(0, \xi) \leqslant d(\lambda, \xi) \} \ .$$

On introduit aussi

$$\mathcal{A}'(\Lambda) = \{ \xi \in \mathbf{R}^2 ;\quad \forall \lambda \in \Lambda \setminus 0,\ d(0, \xi) < d(\lambda, \xi) \} \ .$$

Dans la suite du texte, on écrira en abrégé $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ pour $\mathcal{A}(\Lambda)$ et $\mathcal{A}'(\Lambda)$; on posera aussi, pour tout γ de $\mathbf{R}^2$,

$$\mathcal{A}_\gamma = \{ \xi + \gamma ;\quad \xi \in \mathcal{A} \} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{A}'_\gamma = \{ \xi + \gamma ;\quad \xi \in \mathcal{A}' \} \ .$$

0.4.

Le *stabilisateur* d'un élément x d'un ensemble X, dans lequel opère un groupe G, est : $G_x = \{ g \in G ;\ g(x) = x \}$.

Partie I. — *Réseaux, classification*

I.1.

Dessiner $\mathcal{D}$.

Sur des figures séparées :

- dessiner Λ_e; déterminer et dessiner $\mathcal{A}(\Lambda_e)$; trouver $\operatorname{carc} \Lambda_e$;
- dessiner un Λ_r^θ; déterminer et dessiner $\mathcal{A}(\Lambda_r^\theta)$; trouver $\operatorname{carc} \Lambda_r^\theta$ et $\operatorname{carc} \Lambda_c$.

I.2.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un réseau Λ. Démontrer que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à éléments dans $\mathbf{Z}$ vérifiant $| ad - bc | = 1$. Énoncer une réciproque. Donner des exemples de telles matrices sans élément nul.

Établir que le réel $| \det \mathcal{B} |$ dépend seulement du réseau Λ et non du choix de sa base; on le *note* aire Λ. Calculer aire Λ_r^θ et aire Λ_e.

Lorsque Λ est réduit, démontrer que, si $\{ u, j \}$ et $\{ u, j' \}$ sont deux de ses bases avec j et j' éléments de $\mathcal{D}$, on a nécessairement $j = j'$; on *note* $j(\Lambda)$ le vecteur ainsi canoniquement attaché au réseau réduit Λ.

I.3.

Pour tout Λ démontrer que carc Λ est strictement positif et que les points de Λ sont isolés uniformément par des boules de rayon $\dfrac{\text{carc}\,\Lambda}{2}$.

Prouver que le nombre $m(\Lambda)$ des éléments λ de Λ satisfaisant à $\|\lambda\| = \text{carc}\,\Lambda$ est non nul et fini.

I.4.

Soit $\{\alpha, \beta\}$ une base de $\mathbf{R}^2$ vérifiant les conditions :

$$(\mathrm{K}) \left\{ \begin{array}{l} \|\alpha\| \leqslant \|\beta\| \\ 0 \leqslant (\alpha \mid \beta) \leqslant \dfrac{1}{2}\|\alpha\|^2 \end{array} \right.$$

Démontrer les résultats suivants :

(i) $\forall (p, q) \in \mathbf{Z}^2 \setminus (0, 0)$, $\|p\alpha + q\beta\| \geqslant \|\alpha\|$

(ii) $\forall p \in \mathbf{Z}, \forall q \in \mathbf{Z} \setminus 0$, $\|p\alpha + q\beta\| \geqslant \|\beta\|$

(iii) si $p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z} \setminus 0$, $(p, q) \neq (0, 1)$, $(p, q) \neq (0, -1)$, alors $\|p\alpha + q\beta\|^2 \leqslant \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$ entraîne $\|p\alpha + q\beta\|^2 = \|\beta - \alpha\|^2$

I.5.

Prouver que, si ξ est un vecteur de Λ vérifiant $\|\xi\| = \text{carc}\,\Lambda$, il existe η tel que $\{\xi, \eta\}$ soit une base de Λ.

Démontrer que tout réseau Λ possède une base $\{\alpha, \beta\}$ vérifiant (K).

I.6.

Établir que tout réseau est semblable à un réseau réduit et à un seul.

A tout réseau Λ on associe canoniquement, et on *note* encore $j(\Lambda)$ le vecteur de $\mathcal{D}$ canoniquement attaché dans **I.2.** au réseau réduit semblable à Λ. Où est $j(\Lambda)$ si Λ est équilatéral, rectangulaire ou carré?

Discuter $m(\Lambda)$ suivant la position de $j(\Lambda)$ dans $\mathcal{D}$.

Établir l'inégalité : aire $\Lambda \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}(\text{carc}\,\Lambda)^2$ et discuter le cas de l'égalité.

Partie II. — *Isométries d'un réseau, tore plat*

II.1.

Démontrer : $\mathbf{R}^2 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ (voir **0.3.**)

A-t-on une partition?

Prouver que $\mathcal{A}$ est un hexagone convexe, sauf si Λ est rectangulaire, auquel cas $\mathcal{A}$ est un rectangle. Dessiner le cas général. Démontrer que $\mathcal{A}'$ est l'intérieur de $\mathcal{A}$ et que $\mathcal{A}'$ est partout dense dans $\mathcal{A}$.

II.2.

On *note* Γ le groupe Isom Λ des isométries de $\mathbf{R}^2$ conservant globalement Λ, *et* $\mathrm{T} = \text{Trans}\,\Lambda$ le sous-groupe de Γ constitué par le groupe additif Λ opérant sur $\mathbf{R}^2$, c'est-à-dire par les translations $\xi \longmapsto \xi + \lambda$ avec $\lambda \in \Lambda$. Démontrer que T est distingué dans Γ. Soit G le groupe-quotient Γ/T, isomorphe au stabilisateur de 0 dans Γ; démontrer que G est un groupe fini, discuter le nombre de ses éléments et sa structure selon $j(\Lambda)$. Discuter dans G l'équation $s^n = e$, où e est l'élément neutre.

II.3.

Pour une base $\mathcal{B} = \{\xi, \eta\}$ de $\mathbf{R}^2$, soit $\delta(\mathcal{B})$ l'ensemble des points de $\mathbf{R}^2$ de la forme $\rho\xi + \rho'\eta$ avec $(\rho, \rho') \in \mathbf{R}^2$ et $|\rho| + |\rho'| \leqslant \frac{1}{2}$, et $\Delta(\mathcal{B})$ la réunion des images de $\delta(\mathcal{B})$ par les translations $p\xi + q\eta$ avec $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$ et $p + q$ pair. On choisit $\xi = (1, 0)$ et $\eta = (2, 1)$, et on note $\mathcal{H}$ l'ensemble $\Delta(\mathcal{B})$ correspondant. La base canonique étant figurée orthonormée (unité de longueur de 4 cm environ), représenter $\mathcal{H}$ par des hachures sur un dessin.

L'ensemble $\mathcal{H}$ est-il stable par le groupe Trans Λ_c?

II.4.

Étant donné un réseau Λ, on appelle ici *tore plat associé à* Λ, et on *notera* Tore Λ, le groupe-quotient $\mathbf{R}^2/\Lambda$ du groupe additif de $\mathbf{R}^2$ par le sous-groupe Λ, c'est-à-dire l'ensemble des classes $\Lambda + \xi$ avec $\xi \in \mathbf{R}^2$. La projection canonique $\mathbf{R}^2 \longrightarrow$ Tore Λ sera notée φ.

Démontrer que pour tout γ de $\mathbf{R}^2$ la restriction de φ à $\mathcal{A}'_\gamma$ (voir **O.3.**) est injective. On notera $\psi_\gamma : \varphi(\mathcal{A}'_\gamma) \longrightarrow \mathcal{A}'_\gamma$ l'application inverse de la double restriction de $\varphi : \mathcal{A}'_\gamma \longrightarrow \varphi(\mathcal{A}'_\gamma)$. Pour $\Lambda = \Lambda_c$ dessiner sur une même figure les deux ensembles $(\psi_0 \circ \varphi)(\mathcal{H})$ et $(\psi_\gamma \circ \varphi)(\mathcal{H})$ où ψ_0 correspond à $\gamma = (0, 0)$ et ψ_γ à $\gamma = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Partie III. — *Dualité, spectre d'un réseau*

III.1.

A un réseau Λ on associe la partie Λ^* de $\mathbf{R}^2$ définie par :

$$\Lambda^* = \{\eta \in \mathbf{R}^2 \quad ; \ \forall \lambda \in \Lambda, \ (\eta \mid \lambda) \in \mathbf{Z}\} \quad .$$

Démontrer que Λ^* est aussi un réseau; on l'appelle le *dual* de Λ.

Établir : $\quad (\Lambda^*)^* = \Lambda \qquad$ et $\qquad$ aire Λ . aire $\Lambda^* = 1$.

Dessiner sur une même figure Λ_0 et Λ^*_0, où Λ_0 est le réseau admettant pour base $\left\{\left(\frac{4}{5}, 0\right), \ (1, 1)\right\}$.

Démontrer que le dual d'un Λ lui est semblable, c'est-à-dire que l'on a : $j(\Lambda^*) = j(\Lambda)$. La similitude peut-elle toujours être choisie directe?

III.2.

Étant donné un réseau Λ, une fonction $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{C}$ est dite Λ-*périodique* si, pour tout élément ξ de $\mathbf{R}^2$ et tout élément λ de Λ, on a

$$f(\xi + \lambda) = f(\xi) \quad .$$

A tout élément γ de $\mathbf{R}^2$, on associe la fonction f_γ définie par

$$\xi \longmapsto f_\gamma(\xi) = \exp\left[2i\pi(\xi \mid \gamma)\right] \quad ;$$

f_γ peut-elle être Λ-périodique?

Pour toute fonction $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{C}$ de classe C^2 on pose

$$\mathrm{D}f = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad ;$$

établir, quel que soit l'élément γ de $\mathbf{R}^2$, $\quad \mathrm{D}f_\gamma = 4\pi^2 \|\gamma\|^2 f_\gamma$.

III.3.

On appelle *valeur propre* du réseau Λ tout réel μ *non nul,* tel qu'il existe $\eta \in \Lambda^*$ satisfaisant à : $\mu = 4\pi^2 \cdot \| \eta \|^2$. La *multiplicité, notée* $m(\mu)$, d'une valeur propre μ est par définition le nombre des éléments η de Λ^* solutions de $4\pi^2 \| \eta \|^2 = \mu$. Démontrer que $m(\mu)$ est pair pour tout Λ et pour tout μ.

On appelle *spectre* de Λ l'ensemble, *noté* Spec Λ, des couples $(\mu, m(\mu))$ où μ parcourt l'ensemble des valeurs propres de Λ.

On note $\mu_1(\Lambda)$ la plus petite valeur propre :

$$\mu_1(\Lambda) = \inf\{ 4\pi^2 \| \eta \|^2 ; \eta \in \Lambda^* \setminus 0 \}.$$

Établir : aire $\Lambda \cdot \mu_1(\Lambda) \leqslant \dfrac{8\pi^2}{\sqrt{3}}$ et discuter le cas de l'égalité.

III.4.

Déterminer les valeurs propres de Λ_e, Λ_r^θ et Λ_c.

Pour Λ_c, calculer l'ordre de multiplicité de chacune des valeurs propres

$$20\pi^2, \ 36\pi^2, \ 100\pi^2, \ 1\,460\pi^2 .$$

Quel est le P.G.C.D. des $m(\mu)$ relatifs à Λ_c?

Pour Λ_e calculer l'ordre de multiplicité de chacune des valeurs propres

$$\frac{16\pi^2}{3}, \ \frac{112\pi^2}{3}, \ 2\,128\pi^2 .$$

Que peut-on dire de $m(\mu)$ pour les valeurs propres de Λ_e?

III.5.

Existe-t-il des réseaux dont toutes les valeurs propres vérifient $m(\mu) = 2$?

III.6.

Démontrer que deux réseaux Λ et Λ' ont le même spectre si, et seulement si, ils sont isométriques.

III.7.

Étant donné un réseau Λ, on range ses valeurs propres par ordre croissant : $0 < \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \ldots$

Démontrer que la série $\sum_i m(\mu_i) e^{-t\mu_i}$ est convergente pour tout réel t strictement positif; on note $S(t)$ sa somme.

Il pourra être commode d'introduire des alvéoles relatifs à Λ^* et des intégrales doubles d'une fonction $(x, y) \longrightarrow g_\tau(x, y) = e^{-\tau(x^2+y^2)}$.

III.8.

Démontrer que $S(t)$ est, quand t tend vers 0 par valeurs positives, un infiniment grand équivalent à $\dfrac{\text{aire } \Lambda}{4\pi t}$. On pourra pour cela faire intervenir des intégrales doubles de deux fonctions g_τ.

RAPPORT SUR L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES GENERALES

Le problème n'exigeait pour sa résolution qu'un minimum de connaissances techniques. En le posant, le jury songeait avant tout à juger l'aptitude des candidats à raisonner et à rédiger avec clarté et précision. Aussi a-t-il voulu que les premières questions soient d'un abord facile pour mettre les concurrents en confiance. Par ailleurs il conseillait dans le préambule de rechercher un support concret du raisonnement dans des dessins exécutés avec soin "étant bien entendu qu'une figure ne saurait se substituer à un raisonnement rigoureux".

Ces précautions n'auront pas été tout à fait vaines en ce sens que le pourcentage des copies nulles est d'environ deux pour cent alors qu'il était de vingt pour cent l'an dernier. Il n'en reste pas moins que les résultats d'ensemble ont été décevants, et que le barème de correction a dû être extrêmement généreux pour obtenir un étalement convenable des notes.

Les raisons de cette médiocrité générale des copies semblent avoir des origines diverses. D'abord des lacunes graves ont été décelées chez bon nombre de candidats. Un discret sondage, par exemple, n'exigeant que des connaissances très élémentaires, était fait sur la topologie. Il a été particulièrement décevant : peut-on admettre dans une copie sur deux l'affirmation plus ou moins implicite que tout ensemble minoré de $\mathbb{R}$ comprend sa borne inférieure. D'autre part le raisonnement reste très superficiel : certaines propriétés demandées, qui paraissent évidentes, sont en fait difficiles à démontrer et, malgré la mise en garde de l'énoncé, de nombreux candidats n'ont pas su déceler et par conséquent résoudre ces difficultés. Enfin la rédaction est souvent mauvaise : hypothèses non formulées, raisonnements par trop schématiques, affirmations remplaçant des preuves, résultats mal mis en évidence ou énoncés de façon imprécise, fautes de calcul malheureuses, forme souvent négligée où l'obscurité du langage, les fautes d'orthographe, l'écriture difficile à lire sont condamnables.

Devant ces critiques il n'est peut-être pas inutile de rappeler ici ces quelques conseils que contenait déjà le rapport de 1972.

- garder son sang-froid et ne pas chercher à foncer trop vite en négligeant d'assurer solidement ses bases, dans l'intention louable, mais souvent déçue, d'aller très loin; un minimum d'attention ou de réflexion permettrait certainement par exemple d'éviter de placer $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ parmi les matrices à coefficients entiers ou d'écrire "la négation de $x \geqslant 0$ est $x \leqslant 0$".
- lire attentivement l'énoncé et chercher à tirer parti des indications qu'il donne.

Peut-être faut-il ajouter à l'intention des étudiants de Maîtrise, futurs agrégatifs, qu'une préparation à l'agrégation est une affaire de longue haleine ; il n'est jamais trop tôt pour apprendre à réfléchir, à se défier des abstractions vagues et à leur préférer des concepts bien ordonnés, enfin pour s'habituer à travailler et à rédiger proprement en temps limité.

Partie I

I1. Les dessins ne sont toujours pas faits avec soin et les figures sont trop souvent inexactes ; c'est ainsi que certains alvéoles sont parfois des disques, alors que l'énoncé précise en I2. qu'il s'agit d'hexagones ou de rectangles. Trop de candidats donnent l'impression d'ignorer la notion de médiatrice ; tels sont ceux qui ont dessiné $\mathcal{A}(\Lambda_e)$ en cercle ($x^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{4}$) ou en hexagone ayant un sommet au milieu de Ou.

I2. Cette question est assez largement traitée. Mais des affirmations non étayées sont relevées, par exemple "pour que les entiers rationnels a, b, c, d soient divisibles par $\Delta = ad - bc$, il faut que $|\Delta|$ soit égal à un", ainsi que des confusions, par exemple entre application unimodulaire et isométrie, entre matrice orthogonale et matrice de déterminant égal à ± 1. Signalons enfin que le déterminant d'un couple de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ n'est pas une notion intrinsèque.

I3. De nombreuses copies affirment : si (ξ, η) est une base de Λ, alors on a :
$\text{carc}\ \Lambda = \inf.\ (\|\xi\|, \|\eta\|, \|\xi - \eta\|, \|\xi + \eta\|)$; s'il en était ainsi, certaines questions deviendraient sans objet. Un simple dessin permettrait de construire un contre-exemple.

I4. L'habileté fait souvent défaut dans le maniement des inégalités et des confusions entre inégalités larges et strictes sont observées.

I5. I6. Le nombre des candidats abordant les questions suivantes se réduit considérablement et les essais se dispersent largement. Si quelques candidats font preuve de réflexion, parfois d'ingéniosité, nombre de démonstrations insuffisantes sont à déplorer, en particulier en I5., où la relation $ad - bc = \pm 1$ invitait à utiliser l'égalité de Bezout. La similitude indirecte est souvent oubliée et la discution relative à $m(\Lambda)$ parfois incomplète.

Partie II

II1. Signalons quelques affirmations erronées, telles que : "il n'existe pas de partition de $\mathbb{R}^2$ en sous-ensembles fermés (resp. compacts, resp. convexes, resp. connexes)" ; la partition la plus fine en est pourtant une !

II2. La démonstration de : "T est distingué dans Γ" est souvent incorrecte : les candidats ne distinguent pas l'application affine et l'application linéaire associée.

La discussion générale est incomplète (oubli des similitudes indirectes).

Trop de candidats ignorent qu'un groupe infini peut opérer sur un ensemble fini.

II3. Indépendante de tout ce qui précède, cette question a permis à quelques candidats d'obtenir des points précieux, grâce à une lecture attentive de l'énoncé.

II4. La question est rarement abordée.

Partie III

III1. Le mot dual n'est pas un mot magique : pour justifier la notation Λ^*, il ne suffit pas de considérer l'image dans $\mathbb{R}^2$ de la base duale de $\{\alpha, \beta\}$ dans $\mathbb{R}^{2*}$

III2., III3., III4. De nombreux points pouvaient s'obtenir aisément sur ces questions. Cependant les calculs d'arithmétique demandés en III4. ont souvent été inexacts. Pour Λ_e, on aurait évité des erreurs grossières en remarquant que $m(\mu)$ est nécessairement multiple de 6.

III5. Cette question invitait à construire α et β tels que $\|\alpha\|^2$, $\|\beta\|^2$, et $(\alpha|\beta)$ soient linéairement indépendants sur le corps des rationnels.

III6., III7., III8. Ces questions ont été abordées par moins de dix candidats. Aucune solution vraiment satisfaisante n'a été donnée.

Répartition des notes (entre 0 et 60)

Agrégation masculine : 1 258 copies

n = 0	0 < n ⩽ 4	4 < n ⩽ 8	8 < n ⩽ 12	12 < n ⩽ 16	16 < n ⩽ 20	20 < n ⩽ 24
1,7 %	7,0 %	15,2 %	21,0 %	18,8 %	13,0 %	8,0 %
24 < n ⩽ 28	**28 < n ⩽ 32**	**32 < n ⩽ 36**	**36 < n ⩽ 40**	**40 < n ⩽ 44**	**44 < n ⩽ 48**	**48 < n**
5,2 %	3,4 %	2,1 %	1,7 %	1,3 %	0,8 %	0,8 %

Agrégation féminine : 723 copies

n = 0	0 < n ⩽ 5	5 < n ⩽ 10	10 < n ⩽ 15	15 < n ⩽ 20	20 < n ⩽ 25	25 < n ⩽ 30
21	74	110	204	157	79	33
			30 < n ⩽ 35	**35 < n ⩽ 40**	**40 < n ⩽ 50**	**50 < n**
			22	14	7	2

TEXTE DE L'EPREUVE D'ANALYSE

DURÉE : 6 heures

Il est rappelé aux candidats :

— qu'il sera tenu le plus grand compte, dans l'appréciation des copies, du soin apporté à la présentation, de la clarté et de la précision des démonstrations ;

— qu'ils doivent respecter les notations fixées par l'énoncé.

On note **C** le plan complexe, $z = x + iy$ un point quelconque de **C** ($x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$ sont réels), r le module de z et $\bar{z}$ le conjugué $x - iy$ de z.

Soit D le demi-plan $y > 0$ de **C**. Pour tout élément z de D, on pose $z = re^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$. Si F est une application de D dans **C**, on note, lorsqu'elles existent, $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdots$ les dérivées partielles de l'application $(x, y) \longmapsto F(x + iy)$ et $\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \cdots$ les dérivées partielles de l'application $(r, \theta) \longmapsto F(re^{i\theta})$.

Toutes les fonctions considérées dans ce texte sont supposées continues, sauf peut-être en un nombre fini de points. Si f est une application de **R** dans **C**, on appellera $\mathfrak{C}$ la condition :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|}{1+t^2}\, dt < +\infty \quad .$$

Conformément à l'usage, **C**[X] désigne l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans **C**. Un élément quelconque P de **C**[X] est noté $\Sigma p_j X^j$. Toutes les suites considérées dans le problème sont indexées dans **N** (ensemble des entiers naturels zéro compris).

I

Soit k l'application de D × **R** dans **R** définie par

$$k(z, t) = \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\bar{z}}\right)$$

Si f est une application de **R** dans **C**, on note Kf l'application de D dans **C** définie par $Kf(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} k(z, t) f(t)\, dt$, lorsque cette intégrale est convergente pour tout z appartenant à D.

a. Si f satisfait à $\mathfrak{C}$, démontrer que Kf existe, que Kf est indéfiniment continûment dérivable par rapport aux variables x et y et qu'on a :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) Kf = 0 \quad .$$

b. L'application f vérifiant toujours $\mathfrak{C}$, on la suppose continue au point t_0 de **R**; démontrer qu'on a :

$$\lim_{\substack{z \to t_0 \\ y > 0}} Kf(z) = f(t_0) \quad .$$

II

a. Soit F une fonction définie dans le demi-plan $y \geqslant 0$ de $\mathbf{C}$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$. On suppose que F est continue, que sa restriction à D est holomorphe et que F vérifie $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ y \geqslant 0}} \dfrac{F(z)}{z} = 0$.

Démontrer que, pour tout z de D, on a

$$F(z) = \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-A}^{A} k(z, t) F(t)\, dt \quad .$$

b. Expliciter Kf pour $f(t) = \operatorname{Log} |t - \alpha|$, où α est un complexe arbitraire (on pourra d'abord supposer $\operatorname{Im} \alpha < 0$ et utiliser II *a.* en choisissant F de sorte qu'on ait $\operatorname{Re} F(t) = \operatorname{Log} |t - \alpha|$ pour $t \in \mathbf{R}$).

Démontrer que, pour tout polynôme P à coefficients complexes et pour tout z non réel, on a :

$$(1) \qquad \operatorname{Log} |P(z)| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|y| \operatorname{Log} |P(t)|}{(x-t)^2 + y^2}\, dt \ .$$

c. Pour quelles valeurs du réel σ l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|^\sigma}{1+t^2}\, dt$ est-elle convergente? Pour ces valeurs de σ expliciter Kf lorsque f est la fonction $t \longmapsto |t|^\sigma$.

Vérifier en particulier qu'on a, pour tout r strictement positif, :

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r\,|t|^\sigma}{r^2 + t^2}\, dt = c(\sigma)\, r^\sigma$$

et donner la valeur de $c(\sigma)$. $\Bigg($ On pourra dans le cas $0 < \sigma < 1$ appliquer II *a.* à la fonction $z \longmapsto \left(\dfrac{z}{i}\right)^\sigma = r^\sigma e^{i\sigma\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}\Bigg)$.

III

a. On considère l'opérateur différentiel $\delta = x \dfrac{\partial}{\partial x} + y \dfrac{\partial}{\partial y} = r \dfrac{\partial}{\partial r}$; $\delta \circ \delta$ est noté δ^2. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ vérifiant $\mathfrak{L}$. Pour tout réel λ strictement positif, on note f_λ l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ définie par $f_\lambda(t) = f(\lambda t)$.

Démontrer qu'au sens de la convergence simple on a :

$$\delta^2 Kf = \lim_{\substack{\lambda \to 1 \\ \lambda \neq 1}} \left[\frac{1}{(\lambda - 1)^2} K \left(f_\lambda + f_{\frac{1}{\lambda}} - 2f \right) \right]$$

b. Exprimer l'opérateur différentiel $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ en fonction de δ et $\dfrac{\partial}{\partial \theta}$.

Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant $\mathfrak{L}$. On suppose que les deux fonctions $t \longmapsto f(e^t)$ et $t \longmapsto f(-e^t)$ sont convexes; démontrer qu'on a : $\dfrac{\partial^2 Kf}{\partial \theta^2} \leqslant 0$.

c. On suppose que f est une fonction paire vérifiant les hypothèses de III *b.* Démontrer que, pour tout r fixé strictement positif, la fonction $\theta \longmapsto Kf\,(re^{i\theta})$ admet un maximum atteint pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

IV

Dans cette question,

- W désigne une application paire de $\mathbf{R}$ dans $[1\,,+\infty[$, vérifiant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} W\,(t)}{1+t^2}\,dt < +\infty$$

et telle que la fonction $t \longmapsto \operatorname{Log} W(e^t)$ soit convexe; on pose pour tout r strictement positif $\mu\,(r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r \operatorname{Log} W\,(t)}{r^2+t^2}\,dt$ et,

pour tout élément j de $\mathbf{N}$, $M_j = \sup\limits_{r>0} \dfrac{r^{j+\frac{1}{2}}}{e^{\mu\,(r)}}$.

- $P = \Sigma p_j X^j$ est un élément de $\mathbf{C}[X]$ satisfaisant à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |P\,(t)|^2\,(W\,(t))^{-1}\,dt \leqslant 1 \;.$$

a. Prouver que, pour tout réel u et tout réel strictement positif v, on a :

$$uv \leqslant e^{u-1} + v \operatorname{Log} v$$

b. Démontrer l'existence d'un réel C indépendant de P et W tel que pour tout z non réel on ait

$$|\,P\,(z)\,| \leqslant C\,|\,y\,|^{-\frac{1}{2}} e^{\mu\,(r)}$$

On utilisera l'égalité

$$K\operatorname{Log}|P|\;(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} k\,(z\,,t) \operatorname{Log}\left|\,(P\,(t))^2\,(W\,(t))^{-1}\,\right|\,dt + \frac{1}{2}\,K\operatorname{Log}W\;(z)$$

et on appliquera les résultats des questions II et III ainsi que l'inégalité IV*a.*, où il est suggéré de remplacer u par $\operatorname{Log}\left|\,(P(t))^2\,(W(t))^{-1}\,\right|$.

c. Déduire de IV*b.* l'existence d'un réel H, indépendant de P et W, tel que, pour tout j, on ait : $|\,p_j\,| \leqslant \dfrac{H}{M_j}$.

V

On désigne toujours par W une application satisfaisant aux hypothèses de IV. On suppose en outre que, pour tout élément j de $\mathbf{N}$, on a :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^j}{W(t)} = 0 \;.$$

Les notations de IV sont conservées.

a. Démontrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes $P_n = \Sigma p_{nj} X^j$ satisfaisant aux conditions :

(i) P_n est de degré n

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P_m(t) P_n(t) \left(W(t)\right)^{-1} dt = \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq n \\ 1 & \text{si} \quad m = n \end{cases}$

b. Déduire de IV que, pour tout élément j de $\mathbf{N}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |p_{nj}|^2 \leqslant \left(\frac{H}{M_j}\right)^2$$

c. Soit (b_n) une suite complexe satisfaisant à : $\displaystyle\sum_0^{+\infty} |b_n|^2 < +\infty$.

Démontrer que la série $\displaystyle\sum_0^{+\infty} b_n P_n(z)$ est convergente dans $\mathbf{C}$ et que sa somme est une fonction entière de z (c'est-à-dire holomorphe dans le plan complexe $\mathbf{C}$ tout entier).

d. Soit (a_j) une suite complexe satisfaisant à : $\displaystyle\sum_0^{+\infty} \left|\frac{a_j}{M_j}\right| < +\infty$.

Démontrer l'existence d'une suite unique (b_n) de complexes telle qu'on ait $\displaystyle\sum_0^{+\infty} |b_n|^2 < +\infty$ et que la fonction $f = \displaystyle\sum_0^{+\infty} b_n P_n$ vérifie pour tout j $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^j f(t) \left(W(t)\right)^{-1} dt = a_j$.

VI

Dans cette question on note

- ρ un réel strictement positif et $\sigma = \dfrac{1}{\rho}$ son inverse;
- s^ρ l'ensemble des suites complexes (a_n) telles qu'il existe un réel c strictement positif (dépendant de la suite) pour lequel on a :

$$\sup_{n \geqslant 0} \left[c^{-n} n^{-\rho n} |a_n|\right] < +\infty$$

- S^ρ l'ensemble des applications f indéfiniment dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ telles qu'il existe un réel c strictement positif (dépendant de f) pour lequel on a :

$$\sup_{\substack{n \geqslant 0 \\ x \in \mathbf{R}}} \left[c^{-n} n^{-\rho n} |f^{(n)}(x)|\right] < +\infty$$

- W_A l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$: $t \longmapsto W_A(t) = \exp\left(\dfrac{|t|}{A}\right)^\sigma$, associée à un réel A strictement positif quelconque $\left(\sigma = \dfrac{1}{\rho}\right)$.

a. Soit g une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ satisfaisant à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 \left(W_A(t)\right)^{-1} dt < +\infty$$

Le nombre x étant réel, on pose :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} g(t) \left(W_A(t)\right)^{-1} dt \quad .$$

Démontrer qu'on définit ainsi une application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, qui est élément de S^{ρ} et qui, pour tout entier positif ou nul, satisfait à :

$$f^{(n)}(0) = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n g(t) (W_A(t))^{-1} dt$$

$\left(\text{on rappelle que } \Gamma(u) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{u-1} dt \quad \text{et} \quad \left(\frac{u}{e}\right)^u \sqrt{\frac{2\pi}{u}} \text{ sont}\right.$

$\left.\text{équivalents lorsque } u \text{ tend vers } +\infty\right)$.

b. On suppose désormais $\rho > 1$. L'application W_A vérifie alors les hypothèses de IV et V.

Calculer

$$\mu_A(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r \operatorname{Log} W_A(t)}{r^2 + t^2} dt \qquad \text{(utiliser II}c.\text{)}$$

Démontrer

$$M_j(A) = \sup_{r>0} \left[r^{j+\frac{1}{2}} \exp(-\mu_A(r)) \right] = \left[\gamma A \left(j + \frac{1}{2} \right)^{\rho} \right]^{j+\frac{1}{2}}$$

où γ est un nombre qu'on calculera.

c. Déduire de V*d.* que, pour tout élément (a_n) de s^{ρ}, il existe un élément f de S^{ρ} tel que, pour tout n, on ait : $f^{(n)}(0) = a_n$.

$\left(\text{On cherchera } f \text{ de la forme : } x \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} g(t) (W_A(t))^{-1} dt\right.$,

$\left.\text{en choisissant A et } g \text{ convenablement}\right)$.

RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE

Le texte donné propose l'étude et la résolution d'un cas particulier du problème des moments :

- construire, (a_n) étant une suite donnée de nombres réels ou complexes, une fonction f qui satisfait pour tout n à condition $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) dt = a_n$ et vérifie des inégalités du type

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} e^{|t|^{\sigma}} |f(t)| < +\infty \qquad \text{ou} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{|t|^{\sigma}} |f(t)| dt < +\infty ;$$

ou bien de façon équivalente

- construire, (α_n) étant une suite donnée, une fonction g indéfiniment dérivable qui satisfait pour tout n à la condition $g^{(n)}(0) = \alpha_n$ et dont les dérivées successives vérifient des inégalités données du type

$|g^{(n)}(t)| \leqslant C\, A^n\, n!^s$ pour tout t,

C, A et s étant des constantes données.

Les paragraphes I, II, III et IV sont des préliminaires, qui introduisent et permettent d'utiliser la méthode du majorant harmonique.

COMPTE RENDU DE L'EPREUVE

Le problème proposé concerne l'analyse classique et ne nécessite pratiquement aucune connaissance "fine". Les correcteurs regrettent de constater qu'une grosse majorité de candidats n'ont que de bien faibles réflexes en analyse et paraissent même parfois étrangers aux méthodes, aux exigences et aux motivations de cette partie du programme.

Tout en donnant quelques indications sur la solution, les lignes qui suivent, signalent des fautes qui parfois surprennent.

Partie I

Ia. Il s'agit d'appliquer les théorèmes bien classiques de continuité et de dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale : $F(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,t)dt$.
Devrait-il être nécessaire de rappeler qu'une telle fonction n'est pas automatiquement indéfiniment dérivable et qu'il importe par exemple de prouver que les intégrales des dérivées successives $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{m+n} f(x,y,t)}{\partial x^m \ \partial y^n} dt$ sont localement uniformément convergentes ? Cela peut se faire ici en comparant à $\dfrac{1}{1+t^2}$ les dérivées du noyau de Poisson

$k(z,t) = \dfrac{y}{|z-t|^2} = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{t-z} - \dfrac{1}{t-\bar{z}}\right)$ où $z = x+iy$; il est étonnant que de nombreuses copies n'arrivent pas, ou n'arrivent qu'à grand peine, à faire cette comparaison. L'expression de k fournie par l'énoncé invite à remplacer les dérivations $\dfrac{\partial}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial}{\partial y}$ par leurs combinaisons linéaires $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ et $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$. Le noyau de Poisson $k(z,t)$, qui est à valeurs réelles, n'est évidemment pas une fonction holomorphe de z comme l'affirment plusieurs copies.

Pour l'existence de Kf, aucun candidat pratiquement ne tient compte des éventuelles discontinuités de f à distance finie et ne dit que sont λ-mesurables (λ mesure de Lebesque sur $\mathbb{R}$) la fonction f, continue λ-presque partout, et la fonction $t \longrightarrow k(z,t)\ f(t)$, bornée par une fonction λ-intégrable, d'après l'hypothèse $(\mathscr{P})$. Par ailleurs il est clair que les candidats ignorent les rapports entre l'intégrabilité Lebesque et l'intégrabilité impropre Riemann.

Nombreuses sont les erreurs concernant $k(z,t)$, qu'un peu d'attention éviterait parfois ; citons par exemple :

- $(\forall z \in D)$ $(\forall t$ "assez grand"$)$ $(|(x-t)^2 + y^2| > 1 + t^2)$
- Si $y < 1$ on a $k(z,t) < \dfrac{1}{1+t^2}$
- $k(z,t) = \mathrm{R}e\ \dfrac{1}{t-z}$ - $\lim\limits_{|t|\to+\infty} (1+t^2)\ k(z,t) = 1$
- $\lim\limits_{|t|\to+\infty} k(z,t) = \dfrac{y}{t^2}$ etc.

Des candidats ne réalisent pas que $k(z,t)$ prend des valeurs positives. D'autres, trop nombreux, écrivent froidement "il suffit de montrer que $Kf(z) < +\infty$ " ... On abuse des expressions "se comporte comme...", "le comportement de la fonction..." et on trouve écrit :

- $\dfrac{f(x-uy)}{1+u^2}$ est une fonction p.p. continue, donc intégrable sur tout segment ;
- $\int_{-\infty}^{+\infty}$ existe si $\int_{-X}^{X}$ a une limite quand $X \longrightarrow +\infty$, ce qui est scandaleux et a été sanctionné

(D'ailleurs un certain nombre de candidats n'ont pas compris la formulation du IIa et pourquoi l'on n'écrivait pas tout simplement : $F = kF$!).

Trop de calculs faux et extrêmement pénibles, où interviennent de nombreux trinômes du second degré, sont entrepris pour comparer $k(z,t)$ à $\frac{1}{1+t^2}$, et souvent on lit :

" $Kf(z)$ existe si $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(x-uy)|}{1+u^2}\, du < +\infty$, ce qui est, puisque f vérifie $(\mathscr{P})$"...

Toutes les erreurs possibles semblent avoir été commises dans l'étude du caractère C^∞ de Kf et de son harmonicité ; par exemple :

- croire que Kf est holomorphe (sans être d'ailleurs bien gêné par le cas où f est à valeurs réelles) et ceci :
  - soit parce que k est elle-même holomorphe en z,
  - soit parce que kf est C^∞ en x et y, donc holomorphe !

- prouver, sans s'étonner : $Kf(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u)}{1+u^2}$
- croire que "du moment que Kf existe et que $K\, f(z)$ est convergente, Kf est C^∞ en x et y"
- affirmer l'harmonicité de K sans la prouver, et en déduire aussi sans précautions celle de Kf.

Bien peu de candidats remarquent naturellement que K est harmonique comme partie imaginaire de $\frac{1}{t-z}$, et que d'autre part il suffit de justifier $\Delta\, kf = 0$ pour assurer le caractère C^∞ de Kf.
- pratiquement tous les essais de démonstration du caractère C^∞ de Kf par application du théorème de Lebesque sont non concluants ; presque tous les candidats pensent notamment :
  - soit que, si Kf est dérivable partiellement, c'est qu'on a pu dériver sous le signe somme ;
  - soit que, si par exemple $\frac{\partial(kf)}{\partial x}$ est intégrable, alors $\frac{\partial Kf}{\partial x}$ existe, et l'on a :

$$\frac{\partial Kf}{\partial x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\,(k(z,t)\, f(t)\,)\, dt.$$

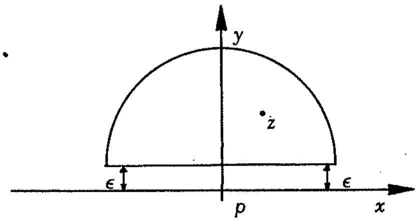
Le théorème de Lebesque de dérivation sous le signe somme est méconnu, et, semble-t-il, les candidats ne comprennent pas que la dérivabilité en un point est un phénomène local. Ainsi, le mot magique "uniforme" ou "uniformément" est-il employé à tort et à travers ! Les candidats semblent par ailleurs ignorer que la démonstration du caractère C^∞ de Kf fait intervenir les $\frac{\partial^{p+q} Kf}{\partial x^p\, \partial y^q}$ et pas seulement les $\frac{\partial^n Kf}{\partial x^n}$ et les $\frac{\partial^n Kf}{\partial y^n}$, et aussi que l'existence de tous les $\frac{\partial^{p+q} Kf}{\partial x^p\, \partial y^q}$ ne suffit pas. Dans les essais de démonstration concernant $\frac{\partial^n Kf}{\partial x^n}$, on trouve beaucoup de maladresses ou d'erreurs concernant les degrés ; fort peu de candidats utilisent pour cela, ou pour montrer l'harmonicité de k, les dérivations $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

Toutefois dans deux copies le raisonnement suivant a été récompensé par le maximum de points: Si $A > 0$ $f_A = f.\chi_{[-A,A]}$ vérifie $(\mathscr{P})$, et $Kf_A(z) = \int_{-A}^{A} k(z,t)\, f(t)\, dt$ est, très simplement, deux fois dérivable sous le signe somme, donc harmonique comme k. Mais on prouve sans peine que la convergence de Kf_A vers Kf, lorsque A tend vers $+\infty$, est uniforme sur tout compact de D. D'où le résultat.

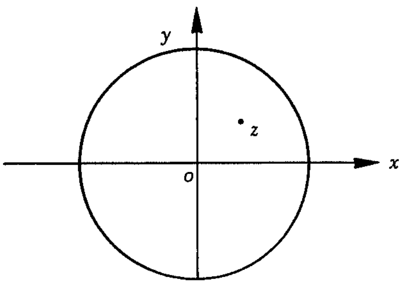
Ib. Dans cette question, il faut utiliser l'égalité $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} k(z,t)\, dt = 1$, et le fait que "toute la masse de k se concentre en t_0" quand z tend vers t_0 $(y > 0)$. En général les candidats prouvent que $K1 = 1$ et réussissent à majorer correctement une expression de la forme : $\frac{1}{\pi}\left[\int_{t_0-\alpha}^{t_0+\alpha} k(z,t)\,|f(t)-f(t_0)|\,dt\right]$. Mais la suite de la démonstration pose plus de difficultés et les majorations sont très souvent incorrectes. Signalons aussi que des candidats veulent à toute force utiliser un théorème des résidus pour arriver au résultat.

Partie II

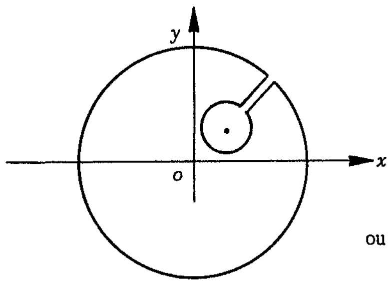
IIa. Rien dans l'énoncé ne suggère que l'intégrale $Kf_A(z) = \int_{-A}^{A} k(z,t)\,f(t)\,dt$ soit convergente ; il fallait introduire un contour convenable du demi-plan $y \geq 0$ - ce qui a été le cas en général - et faire un calcul de résidus. Quelques candidats précautionneux "décollent" même leur contour de l'axe réel mais, hélas ! intervertissent parfois l'ordre des passages à la limite.



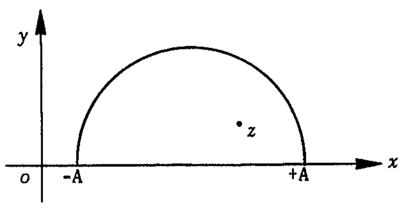
On trouve toutefois des contours inattendus du type :



ou



ou même



Relativement peu de candidats citent le lemme de Jordan ; très peu font une démonstration explicite ; il est très fréquent que l'on prouve : $\lim_{A\to+\infty}\int_{\gamma_A} k(z,\zeta)\,F(\zeta)\,d\zeta = 0$ en montrant séparément :

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{\gamma_A} \frac{1}{\zeta - z}\,F(\zeta)\,d\zeta = 0 \quad , \quad \text{et} \quad \lim_{A\to+\infty}\int_{\gamma_A} \frac{1}{\zeta-\bar{z}}\,F(\zeta)\,d\zeta = 0 \quad !$$

Rappelons que certains candidats considèrent que l'on prouve en fait : $F = KF$ ou plus précisément $F = KF/_{\mathbb{R}}$; pour cela certains, fort mal inspirés, disent :

- "puisque $\lim_{z\to\infty}\frac{F(z)}{z} = 0$, il est clair que $F/_{\mathbb{R}}$ vérifie $(\mathscr{P})$", l'explication dudit phénomène étant : on a certainement : $\lim_{z\to\infty} F(t) = 0$, donc F est bornée sur $\mathbb{R}$!"
- mieux encore, on a prouvé en Ia. et Ib. que Kf est holomorphe et vérifie : $\lim_{\substack{z\to t_0\\ y>0}} Kf(z) = f(t_0)$ si etc.; donc, si F est "holomorphe dans $\bar{D}$", on a $KF/_{\mathbb{R}} = F$ sur $\mathbb{R}$. L'analyticité prouve donc $KF/_{\mathbb{R}} = F$ dans D. Ce genre de raisonnement se retrouve même dans une assez bonne copie où l'on essaie de se ramener au problème du disque.

IIb. Il apparaît que bon nombre de candidats conçoivent mal le logarithme complexe et ses déterminations. On trouve presque systématiquement "la détermination du logarithme", "la détermination de l'argument" "$|\mathrm{Log}\ (z-\alpha)| = \mathrm{Log}\ |z-\alpha|$", "$\mathrm{Log}\ (z-\alpha) = \mathrm{Log}\ |z-\alpha| + i\theta$" "...Il est même des candidats pour prouver que $\mathrm{Log}\ |z-\alpha|$ est harmonique, donc partie réelle d'une fonction holomorphe dont on ne sait rien. Evidemment la plupart des candidats considèrent comme inutiles les démonstrations de ce que $\log\ (z-\alpha)$ satisfait aux hypothèses du a. et que $t \to \mathrm{Log}\ |t-\alpha|$ vérifie $(\mathscr{P})$. Pour $Im\ \alpha > 0$, on trouve souvent $Kf(z) = \mathrm{Log}\ |z-\alpha|$, et enfin, pour

l'inégalité (1), on a pu relever quelques énormités :
- Log $|P(z)|$ est une fonction analytique dans $\mathbb{C}$;
- si P est de degré pair, ses zéros sont deux à deux conjugués...

Rares sont les candidats qui utilisent l'inégalité $|z-\bar{\alpha}|<|z-\alpha|$, si $Im\ z$ et $Im\ \alpha$ sont de signes contraires, et qui, séparant les cas $z\in$ D, $z\notin \bar{\text{D}}$, utilisent $\overline{\text{P}}\ (\bar{z})$.

IIc. Un très grand nombre de copies oublient d'examiner le "comportement", au voisinage de $t = 0$, de $\frac{|t|^\sigma}{1+t^2}$ et concluent que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|^\sigma}{1+t^2}\,dt$ converge pour $\sigma < 1$ (au moins 80 % !) ; on peut même lire : "$t \to \frac{|t|^\sigma}{1+t^2}$ est toujours continue sur $[-A, A]$".

En général les candidats n'ont pas su se servir de la fonction indiquée par l'énoncé, et ont oublié que l'argument de z n'est pas le même sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$; d'où les résultats aberrants suivants : $c(\sigma) = 1$, $c(\sigma) = \pi$ etc. Dans plusieurs copies on peut lire $Re \left|\frac{t}{i}\right|^\sigma = \left|\frac{t}{i}\right|^\sigma = |t|^\sigma$ pour t réel

Partie III

De façon générale, les parties III, IV, V, VI ont été peu abordées.

IIIa. On rencontre des calculs très pénibles pour déterminer $\delta^2 k$ dont ensuite on ne fait rien. Pourtant cette question présente peu de difficultés, si on applique correctement la formule de Taylor en remarquant qu'on a : $K(f_\lambda) = (Kf)_\lambda$. On peut aussi faire le changement de variables : $r = e^t$

IIIb. On a : $\Delta = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \delta^2\right)$, qui est à peu de choses près l'expression du Laplacien en coordonnées polaires. Si f vérifie l'hypothèse de l'énoncé, on a $f_\lambda + f_{\frac{1}{\lambda}} - 2f \geqslant 0$, d'où $\delta^2(Kf) \geqslant 0$ et $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(Kf) \leqslant 0$ puisque $\frac{\partial^2 Kf}{\partial\theta^2} + \delta^2(Kf) = 0$.

IIIc. Il fallait simplement remarquer qu'une fonction $g(\theta)$ concave et symétrique par rapport au point $\frac{\pi}{2}$ [$g(\pi-\theta) = g(\theta)$] atteint son maximum au point $\frac{\pi}{2}$. Mais certains candidats pensent que le raisonnement est terminé, une fois prouvée l'égalité $\frac{\partial}{\partial\theta} Kf(re^{i\theta})\Big|_{\frac{\pi}{2}} = 0$!

Partie IV

Le IVa. se démontre de façon élémentaire en examinant la dérivée $\frac{\partial}{\partial u}(u\ v - e^{u-1} - v \log v)$.
Quelques erreurs inattendues sont relevées comme "u et v ont un rôle symétrique", "$v \log v$ est à valeurs positives"... ; trop de raisonnements non probants utilisent la convexité.

L'énoncé donnait des indications précises pour démontrer IVb. et IVc.

Partie V

La question Va. est presque une question de cours ; il s'agit du procédé d'orthonormalisation de Schmidt. Mais peu de candidats pensent à expliquer la convergence des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\ Q(t)\ (W(t))^{-1}\,dt$ (P, Q sont des fonctions polynômes réelles) et que l'on munit ainsi $\mathbb{R}[X]$ d'un produit scalaire. Les redémonstrations "à la main" du résultat sont en général incorrectes ou incomplètes.

Les questions Vb., Vc., Vd. n'ont pratiquement pas été abordées. Elles demandent une certaine familiarité avec le maniement des normes et des produits scalaires dans les espaces euclidiens (ou hermitiens) ; la notion d'espace de Hilbert est utile, mais n'est pas indispensable, car ici tout se ramène à des questions sur les espaces hermitiens de dimension finie (en particulier le problème d'existence et d'unicité de Vd).

Partie VI

L'énoncé guide assez bien les candidats pour les parties de VI ne se déduisant pas des questions précédentes. Encore faut-il prouver que la fonction f est indéfiniment dérivable, et pour cela montrer par exemple que l'intégrale $f^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (it)^n e^{itx} g(t)\ W_A^{-1}(t)\ dt$ est uniformément convergente ; cela résulte en particulier de la convergence des deux intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} |(it)^n e^{itx} W_A^{-\frac{1}{2}}(t)|^2\ dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)\ W_A^{-\frac{1}{2}}(t)|^2\ dt$, et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour majorer les dérivées de f, il fallait alors examiner l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n}\ e^{-\left|\frac{t}{A}\right|^\sigma}\ dt$ et utiliser la formule de Stirling rappelée dans l'énoncé.

QUELQUES REFLEXIONS GENERALES

1) Il semble que les candidats ne fassent que peu de profit de la lecture des rapports antérieurs ; il faut hélas ! encore répéter que :

- une écriture illisible ou presque ne peut qu'indisposer le correcteur ;
- l'usage de la règle (voire du compas) n'est pas interdit dans les épreuves ;
- il est recommandé d'employer correctement sa langue maternelle en formant des phrases intelligibles et en appliquant les règles usuelles de la grammaire et de l'orthographe ;
- il est permis de traiter le problème dans l'ordre des questions posées ;
- les quantificateurs ne se conjuguent pas et ne sont pas des abréviations ;
- il est indispensable de lire attentivement l'énoncé, d'en adopter les notations et les hypothèses (par exemple : ne pas faire semblant de confondre "continue" et "continue sauf en un nombre fini de points").

2) Les correcteurs notent que trop de candidats, une majorité semble-t-il, abusent des expressions suivantes -"et ainsi de suite" "on voit bien par récurrence que..." "d'après un calcul facile"(non traité) "on peut voir que..." "dans de bonnes conditions, on a..." etc.- En général il s'agit de bluffs d'autant plus naïfs qu'ils camouflent la seule réelle difficulté de la question et que leurs auteurs, amenés quelques lignes plus loin à expliciter un raisonnement ou un calcul, font la preuve de leur incompétence. Les correcteurs en arrivent ainsi à privilégier des copies honnêtes, qui citent explicitement des théorèmes exacts (exemples : théorème de Lebesque de dérivation sous le signe $\int$, lemme de Jordan etc.) même si, dans la suite, les candidats ne réussissent pas à prouver que sont réunies les conditions d'application des dits théorèmes.

En résumé l'habitude est malsaine, qui consiste à "voir tout de haut" et à se gargariser de mots ; contrairement à ce que certains pensent, il est possible de donner des raisonnements clairs et convaincants sans consacrer des pages et des pages à écrire des trivialités non probantes, ni escamoter les difficultés par des ellipses à prétentions esthétiques.

LES NOTES

Un barème particulièrement indulgent a donné la répartition suivante des notes :

CANDIDATES : 687 copies

	0	1 à 4	5 à 9	10 à 14	15 à 19	20 à 24	25 à 29	30 à 34	35 à 39	40 à 44	45 à 49	50 à 60
présentes	104	162	161	91	52	41	26	16	12	8	4	10

CANDIDATS : 1 225 copies.

	0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40	41 à 45	46 à 50	51 à 55	56 à 60
présents	147	420	208	136	124	95	38	26	9	7	3	4	8
admissibles	1	10	24	42	79	83	36	26	8	7	3	4	8
reçus	0	0	6	8	14	40	20	19	8	6	3	4	8

Ces tableaux font apparaître évidemment que les trois-quarts des candidats présents ont obtenu une note au plus égale à 15 sur 60. Il n'en reste pas moins que les correcteurs ont été heureux de trouver dans le peloton de tête des copies intéressantes qui sont la preuve d'une culture mathématique déjà solide.

TEXTE DE L'EPREUVE D'ANALYSE NUMERIQUE

O. *Notations*

α. Le naturel k étant supérieur ou égal à 1, on désigne par $\mathbf{R}^k$ l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ des colonnes (appelées aussi vecteurs) de k nombres réels, muni des lois usuelles d'addition et de multiplication par un scalaire réel. La notation $u = (u_i) \in \mathbf{R}^k$ signifie que u_i est la i-ième composante du vecteur u de $\mathbf{R}^k$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. On note e_i les vecteurs de la *base canonique de* $\mathbf{R}^k$ (e_i a toutes ses composantes nulles, sauf la i-ième qui vaut 1).

On définit sur $\mathbf{R}^k$ la *norme du maximum*, notée φ_∞ (quel que soit k), par :

$$u = (u_i) \in \mathbf{R}^k \longrightarrow \varphi_\infty(u) = \operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,k} |u_i|$$

β. Pour toute la suite on munit $\mathbf{R}^k$ de la relation d'ordre partiel (dite « composante à composante »), notée $\leqslant$, suivante : pour $u = (u_i)$ et $u' = (u'_i)$, éléments de $\mathbf{R}^k$, la relation $u \leqslant u'$ (notée aussi $u' \geqslant u$) est définie par :

$$\text{pour tout } i = 1, 2, \ldots, k \quad , \quad u_i \leqslant u'_i \text{ (dans } \mathbf{R})$$

En notant 0 le vecteur nul de $\mathbf{R}^k$, appelé aussi origine de $\mathbf{R}^k$, la relation $0 \leqslant u$ signifie donc que u a toutes ses composantes positives ou nulles dans $\mathbf{R}$. Si *toutes* les composantes de u sont strictement positives dans $\mathbf{R}$, on écrira $0 < u$ (ou aussi $u > 0$).

Pour tout $u = (u_i)$ de $\mathbf{R}^k$, on note $|u| = (|u_i|)$ le vecteur de $\mathbf{R}^k$, dont chaque composante est la valeur absolue de la composante correspondante de u; on a donc : $|u| \geqslant 0$.

γ. On note $\mathfrak{M}_k$ l'algèbre des matrices carrées (k, k) à éléments réels. La notation $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_k$ signifie que le réel a_{ij} est l'élément de la i-ième ligne et de la j-ième colonne $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$ dans la matrice A de $\mathfrak{M}_k$.

Pour toute la suite, on munit $\mathfrak{M}_k$ de la relation d'ordre partiel (dite « élément à élément ») suivante, notée encore $\leqslant$: pour $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$, éléments de $\mathfrak{M}_k$, la relation $A \leqslant B$ est définie par :

$$a_{ij} \leqslant b_{ij} \text{ dans } \mathbf{R}, \quad \text{quels que soient } i \text{ et } j \text{ dans } \{1, 2, \ldots, k\} .$$

Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, la matrice nulle sera désignée par 0. Une matrice A satisfait donc à : $A \geqslant 0$, si tous ses éléments sont positifs ou nuls dans $\mathbf{R}$; une telle matrice sera dite *nonnégative* (en un seul mot).

I

On appelle *rayon spectral* $\rho(A)$ d'une matrice carrée A, à éléments réels ou complexes, le module maximum des valeurs propres de A. On rappelle alors les résultats suivants :

Proposition 1.

Si $\rho(A)$ est strictement inférieur à 1, alors la matrice $I - A$ est inversible et on a :

$$(I - A)^{-1} = \lim_{r \to +\infty} \sum_{h=0}^{r} A^h$$

(I : matrice-unité de même type que A.)

Proposition 2.

Si A et B sont deux matrices de $\mathfrak{M}_k$ vérifiant $0 \leqslant A \leqslant B$, alors on a :

$$\rho(A) \leqslant \rho(B)$$

Proposition 3.

Soient L et U deux matrices nonnégatives dans $\mathcal{M}_k$. Si on a $\rho(L+U) < 1$ alors :

α. $I - L$ est inversible et $(I - L)^{-1}$ est nonnégative;

β. $\rho[(I - L)^{-1}U] \leqslant \rho(L + U) < 1$.

Q 1 *Démontrer, en utilisant les propositions 1 et 2, le point α de la proposition 3.* (L'étude du point β n'est pas demandée.)

Les propositions 1, 2, 3 seront utiles seulement dans les sections IV, VI, VII, VIII de ce problème.

II

Dans toute la suite, X désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{R}$. On rappelle que toute application Ψ de X dans $\mathbf{R}$, vérifiant les deux axiomes suivants :

(*a*) $\quad \forall x \in X \;,\; \forall \lambda \in \mathbf{R} \;,\quad \Psi(\lambda x) = |\lambda|\,\Psi(x)$

(*b*) $\quad \forall x, y \in X \;,\quad \Psi(x + y) \leqslant \Psi(x) + \Psi(y)$

est appelée *semi-norme* sur X.

Q 2 *Démontrer que toute semi-norme* Ψ *sur* X *prend nécessairement des valeurs* $\geqslant 0$ *et que son* noyau, *c'est-à-dire le sous-ensemble* V *de* X *défini par :*

$$V = \{ x \in X : \Psi(x) = 0 \}$$

est un sous-espace vectoriel de X. *Montrer que, pour tout* x *dans* X *et tout* v *dans* V, *il vient :*

$$\Psi(x + v) = \Psi(x)$$

On rappelle qu'une semi-norme sur X est une *norme* si, et seulement si, son noyau se réduit à l'origine de X.

III

On suppose qu'il existe une application p de X dans $\mathbf{R}^k$ (k étant un naturel $\geqslant 1$, donné) vérifiant les axiomes suivants :

(A) $\quad \forall x \in X \;,\; \forall \lambda \in \mathbf{R} \quad p(\lambda x) = |\lambda|\,p(x)$

(B) $\quad \forall x \;,\; y \in X \quad p(x + y) \leqslant p(x) + p(y) \quad$ [ordre sur $\mathbf{R}^k$]

(C) $\quad p(x) = 0 \quad$ implique $x = 0$.

On appelle une telle application une *norme vectorielle de taille k sur* X. On notera, pour tout x dans X, $p_i(x)$ la ième composante ($i = 1, 2, \ldots, k$) du vecteur $p(x)$ de $\mathbf{R}^k$.

Q 3 *Démontrer que les applications* p_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) *sont des semi-normes sur* X, *dont les noyaux* V_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) *vérifient :*

(D) $$\bigcap_{i=1}^{k} V_i = \{ 0 \} .$$

En déduire que, pour tout $x \in X$, *on a* $p(x) \geqslant 0$ *dans* $\mathbf{R}^k$.

Réciproquement, démontrer que la donnée de k *semi-normes* p_i ($i = 1, \ldots, k$) *sur* X, *dont les noyaux* V_i *vérifient* (D), *définit une norme vectorielle de taille* k *sur* X.

On définit alors l'application, notée φ, de X dans $\mathbf{R}$ suivante :

$$x \in \mathrm{X} \longmapsto \varphi(x) = \operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,k} p_i(x).$$

Q 4 *Démontrer que* φ *est une norme sur* X *(vectorielle de taille 1).*

Pour tout $u > 0$ dans $\mathbf{R}^k$ (toutes composantes strictement positives), on considère la partie suivante de X :

$$\mathcal{V}_u = \{x \in \mathrm{X};\ \ p(x) \leqslant u\}$$

Q 5 *Démontrer que l'ensemble des* $\mathcal{V}_u$ *forme un système fondamental de voisinag le l'origine de* X. *Démontrer que la topologie ainsi définie sur* X *est* équivalente *à celle de la norme* φ.

L'espace vectoriel X muni de la norme vectorielle p sera dit *vectoriellement normé*. Dans toute la suite, la topologie considérée sur X sera celle qui vient d'être définie.

Q 6 *Exemples :*

1. *On prend* $\mathrm{X} = \mathbf{R}^k$.

   Démontrer que $x \in \mathrm{X} \longmapsto |x|$ (voir O, β) *est une norme vectorielle de taille* k *sur* $\mathbf{R}^k$. *On l'appellera la* norme vectorielle type *sur* $\mathbf{R}^k$. *Quelle est la topologie correspondante?*

2. *Soit* Y *l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, continues sur* [0, 1]. *On prend* $\mathrm{X} = \mathrm{Y} \times \mathrm{Y}$, *et pour tout élément* $f = (f_1, f_2)$ *de* X (f_1 *et* f_2 *appartiennent à* Y) *on pose :*

$$p_1(f) = \operatorname*{Max}_{t \in [0\,,\,1]} |f_1(t)|$$

$$p_2(f) = \operatorname*{Max}_{t \in [0\,,\,1]} |f_2(t)|$$

Démontrer qu'on obtient ainsi une norme vectorielle de taille 2 sur X.

Ainsi vectoriellement normé, X *est-il complet?*

IV

Soit alors F une application de X dans lui-même, pour laquelle on suppose exister une matrice M, nonnégative dans $\mathcal{M}_k$, et de rayon spectral $\rho(\mathrm{M}) < 1$, telle que :

(E) $\qquad \forall\, x, y \in \mathrm{X} \qquad p(\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(y)) \leqslant \mathrm{M}p(x - y)$

F est alors dite *contractante sur* X *relativement à* p.

On appellera *point fixe* de F dans X tout élément x de X, s'il en existe, tel que $x = \mathrm{F}(x)$.

Q 7 *Démontrer que, si* F *admet un point fixe dans* X, *il est unique. Prouver de plus que toute suite* $(x^{(i)})_{i \in \mathbf{N}}$ *d'éléments de* X *ainsi définie* (méthode des approximations successives sur F) :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ pris quelconque dans X} \\ x^{(r+1)} = \mathrm{F}(x^{(r)}) \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

est une suite de Cauchy dans X.

En déduire que, si X *est complet,* F *admet dans* X *un unique point fixe* x, *calculable par la méthode des approximations successives et qu'on a alors l'estimation suivante en norme vectorielle :*

(F) $\qquad p(x - x^{(r)}) \leqslant \mathrm{M}^r(\mathrm{I} - \mathrm{M})^{-1} p(x^{(1)} - x^{(0)})$

On définit alors sur $\mathfrak{M}_k$ la norme suivante, notée s_∞ :

$$A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_k \longmapsto s_\infty(A) = \sup_{\substack{z \in \mathbf{R}^k \\ z \neq 0}} \frac{\varphi_\infty(Az)}{\varphi_\infty(z)}$$

Q 8 *Démontrer que, pour tout* A *dans* $\mathfrak{M}_k$, *il vient :*

$$s_\infty(A) = \max_{i=1,2,\ldots,k} \sum_{j=1}^{k} |a_{ij}|$$

Q 9 *Démontrer, à partir de l'inégalité de contraction* (E), *la relation :*

(G) $\qquad \forall x, y \in X \qquad \varphi(F(x) - F(y)) \leqslant s_\infty(M)\, \varphi(x - y)$

Démontrer que (G) n'implique pas nécessairement *que* F *soit contractante relativement à la norme* φ *(vectorielle de taille 1) sur* X.

Exemples :

Q 10 *En utilisant la norme vectorielle type sur* $\mathbf{R}^2$, *prouver que le système d'équations non linéaires suivant admet une solution unique* $x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$, *calculable par la méthode des approximations successives :*

$$\xi_1 = 0{,}4 \sin \xi_1 + 0{,}2 \cos \xi_2$$
$$\xi_2 = 0{,}8 \cos \xi_1 + 0{,}4 \sin \xi_2$$

*Démontrer que cet exemple illustre le résultat de **Q 9**.*

On considère la méthode des approximations successives sur cet exemple, en partant de :

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} \xi_1^{(0)} \\ \xi_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi/2 \end{bmatrix}$$

Donner une estimation de $|x - x^{(1)}|$ *et* $|x - x^{(4)}|$ *sans pour autant calculer* $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$ *(aucune table n'est nécessaire).*

Q 11 *En utilisant des majorations identiques à celles utilisées en **Q 10**, prouver qu'il existe un jeu unique* (f_1, f_2) *de fonctions à valeurs réelles, continues sur* $[0, 1]$, *telles que, pour tout* t *dans* $[0, 1]$:

$$f_1(t) = \int_0^t [0{,}4 \sin f_1(\theta) + 0{,}2 \cos f_2(\theta)]\, d\theta$$

$$f_2(t) = \int_0^t [0{,}8 \cos f_1(\theta) + 0{,}4 \sin f_2(\theta)]\, d\theta$$

La méthode des approximations successives est-elle numériquement *utilisable **telle** quelle pour calculer la solution* (f_1, f_2)?

V

Les deux naturels n et k étant strictement supérieurs à 1, on prend pour toute la suite $X = \mathbf{R}^n$, muni d'une norme vectorielle p de taille k. On définit les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbf{R}^n$ (V_i désigne encore le noyau de la semi-norme p_i) :

$$W_i = \bigcap_{\substack{j=1,2,\ldots,k \\ j \neq i}} V_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

On a évidemment $W_i \cap V_i = \{0\}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, de sorte qu'on peut définir, pour tout i, la somme directe Z_i de W_i et V_i :

$$Z_i = W_i \oplus V_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

Q 12 *Démontrer que la somme directe* $\mathbf{W} = \mathbf{W}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{W}_k$ *des* k *sous-espaces* $\mathbf{W}_i$ *est bien définie. Prouver que, de plus, pour tout* x *de* $\mathbf{W}$ *décomposé (de façon unique) en* $x = \sum_{i=1}^{k} x_i$, *avec* $x_i \in \mathbf{W}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, *on a :*

$$p(x) = \sum_{i=1}^{k} p(x_i) = \sum_{i=1}^{k} p_i(x_i) e_i$$

où les e_i *sont les vecteurs de base de* $\mathbf{R}^k$. *Prouver enfin que la restriction de* p_i *à* $\mathbf{W}_i$ *est une* norme *sur* $\mathbf{W}_i$.

Q 13 *Construire les sous-espaces* $\mathbf{V}_i, \mathbf{W}_i, \mathbf{Z}_i, \mathbf{W}$ *pour la norme vectorielle* p *suivante, de taille* 3 *sur* $\mathbf{R}^5$:

$$x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_5 \end{bmatrix} \longmapsto p(x) = \begin{bmatrix} |\xi_1| + |\xi_2| \\ |\xi_2| + |\xi_3| \\ |\xi_4| + |\xi_5| \end{bmatrix}$$

Même question pour la norme vectorielle q *suivante sur* $\mathbf{R}^5$:

$$x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ | \\ | \\ | \\ \xi_5 \end{bmatrix} \longmapsto q(x) = \begin{bmatrix} |\xi_1| + |\xi_2| \\ |\xi_3| \\ |\xi_4| + |\xi_5| \end{bmatrix}$$

Q 14 *Montrer que les propositions 1 et 2 suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathbf{Z}_i = \mathbf{R}^n \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$
2. $\mathbf{W} = \mathbf{R}^n$

Lorsqu'elles sont vérifiées, on dit que la norme vectorielle p est *régulière.*

VI

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ des naturels $\geqslant 1$ tels que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$ [d'où nécessairement $k \leqslant n$].

On « partitionne » alors tout vecteur x de $\mathbf{R}^n$ en k blocs, de la façon suivante :

$$x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_{\lambda_1} \\ \hdashline \xi_{\lambda_1+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_{\lambda_1+\lambda_2} \\ \hdashline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hdashline \xi_{\lambda_1+\dots+\lambda_{k-1}+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hdashline x_1 \\ \hdashline x_2 \\ \hdashline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hdashline x_k \\ \hdashline \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} a\\a\\a \end{matrix}}\right\} \lambda_1 \text{ composantes} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a\\a\\a \end{matrix}}\right\} \lambda_2 \text{ composantes} \\ \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a\\a\\a \end{matrix}}\right\} \lambda_k \text{ composantes} \end{array}$$

$$\left(x_i \in \mathbf{R}^{\lambda_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k) \ , \ x_i = \begin{bmatrix} \xi_{\lambda_1+\dots+\lambda_{i-1}+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_{\lambda_1+\dots+\lambda_{i-1}+\lambda_i} \end{bmatrix} \right)$$

φ_∞ désignant, pour tout i, la norme du maximum sur $\mathbf{R}^{\lambda_i}$, on pose, pour tout x de $\mathbf{R}^n$ ainsi décomposé :

$$p(x) = \begin{bmatrix} \varphi_\infty(x_1) \\ \vdots \\ \varphi_\infty(x_k) \end{bmatrix}$$

Q 15 *Montrer que l'application p est une norme vectorielle régulière de taille k sur $\mathbf{R}^n$. Qu'obtient-on pour $k = n$?*

Soit alors T une application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même, représentée dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ par une matrice, notée encore T, élément de $\mathcal{M}_n$.

On « partitionne » T selon les blocs suivants :

$$T = \left[\begin{array}{c|c|c|c} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1k} \\ \hline \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \hline T_{k1} & T_{k2} & \dots & T_{kk} \end{array} \right] \begin{array}{l} \} \ \lambda_1 \text{ lignes} \\ \\ \\ \\ \} \ \lambda_k \text{ lignes} \end{array}$$

$$\underbrace{\qquad}_{\lambda_1 \text{ colonnes}} \qquad\qquad \underbrace{\qquad}_{\lambda_k \text{ colonnes}}$$

de sorte que T_{ij} est une matrice à éléments réels, de type (λ_i, λ_j) $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$. On pose :

$$S(T) = \begin{vmatrix} s_\infty(T_{11}) \ldots s_\infty(T_{1k}) \\ \vdots \\ s_\infty(T_{k1}) \ldots s_\infty(T_{kk}) \end{vmatrix}$$

de sorte que S(T) est une matrice nonnégative de $\mathfrak{M}_k$.

On appelle alors *majorante de* T *relativement à* p toute matrice M, nonnégative dans $\mathfrak{M}_k$, telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \qquad p(Tx) \leqslant M p(x)$$

Q 16 *Démontrer que* S(T) *est une majorante de* T *relativement à p. Démontrer que toute majorante* M *de* T *relativement à p est* caractérisée *par l'inégalité :*

$$S(T) \leqslant M$$

En déduire que S(T) *est une majorante de rayon spectral minimum.*

Q 17 *Démontrer que l'application* S : $\mathfrak{M}_n \to \mathfrak{M}_k$ *définie ci-dessus est une norme vectorielle de taille* k^2, *régulière sur* $\mathfrak{M}_n$. *Prouver de plus la relation :*

$$\forall T_1, T_2 \in \mathfrak{M}_n \qquad S(T_1 . T_2) \leqslant S(T_1)S(T_2)$$

I_n *désignant la matrice-unité* (n, n), *que vaut* $S(I_n)$?

h étant un vecteur donné dans $\mathbf{R}^n$, on considère alors l'application affine F de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ suivante

$$x \in \mathbf{R}^n \longmapsto F(x) = Tx + h$$

Q 18 *Démontrer que, pour que* F *soit contractante relativement à p, il faut et il suffit que* $\rho(S(T)) < 1$.

En déduire que, si $\rho(S(T)) < 1$, *alors l'équation suivante dans* $\mathbf{R}^n$

$$x = Tx + h$$

admet une solution unique x calculable par la méthode des approximations successives, avec l'estimation suivante :

$$p(x - x^{(r)}) \leqslant [S(T)]^r [I - S(T)]^{-1} p(x^{(1)} - x^{(0)})$$

VII

F désigne maintenant une application, non nécessairement affine, de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$, contractante relativement à la norme vectorielle type sur $\mathbf{R}^n$.

On notera f_i les « composantes » de F, de sorte que :

$$x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \longmapsto F(x) = \begin{bmatrix} f_1(\xi_1, \ldots, \xi_n) \\ \vdots \\ f_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) \end{bmatrix}$$

avec :

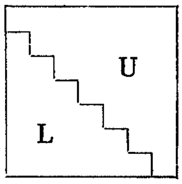
$$\forall x, y \in \mathbf{R}^n \quad |F(x) - F(y)| \leqslant M|x - y| \quad (M \geqslant 0; \ \rho(M) < 1)$$

On définit alors l'application G (composantes g_i) de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ par les relations :

$$g_1(x) = g_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = f_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$
$$g_2(x) = g_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = f_2(g_1(x), \xi_2, \ldots, \xi_n)$$
$$\vdots$$
$$g_i(x) = g_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = f_i(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_{i-1}(x), \xi_i, \ldots, \xi_n)$$
$$\vdots$$
$$g_n(x) = g_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = f_n(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_{n-1}(x), \xi_n)$$

Q 19 *Démontrer que* F *et* G *admettent le même unique point fixe dans* $\mathbf{R}^n$. *Expliciter la méthode des approximations successives sur* G.

On note L la triangulaire inférieure stricte de la matrice M, U sa triangulaire supérieure :

M =  = L + U

(Sur la diagonale et au-dessus les éléments de la matrice carrée L sont nuls ; au-dessous ils sont égaux à ceux de M ayant les mêmes positions).

Q 20 *Démontrer que :*

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^n \qquad |G(x) - G(y)| \leqslant (I - L)^{-1}U\,|x - y|$$

En déduire que la méthode des approximations successives sur G *converge vers l'unique point fixe de* F, *quel que soit le vecteur de départ choisi.*

VIII

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n$ et b un vecteur donné dans $\mathbf{R}^n$. On munit $\mathbf{R}^n$ de la norme vectorielle p définie dans la partie (VI) : A est alors décomposée en blocs A_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$ de la même façon que T l'était précédemment.

De même, le vecteur b est décomposé en blocs b_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

On suppose que les blocs diagonaux A_{ii} de A (qui sont carrés) sont inversibles (et numériquement, facilement inversibles). Pour résoudre le système linéaire $Ax = b$, on envisage les deux méthodes itératives suivantes :

Partant d'un vecteur quelconque $x^{(0)}$ dans $\mathbf{R}^n$ décomposé selon les blocs $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}$, on définit une suite de vecteurs $x^{(r)}$ de $\mathbf{R}^n$, décomposés selon les blocs $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots, x_k^{(r)}$, par la récurrence :

$$\left\{\begin{array}{l} x_i^{(r+1)} = -A_{ii}^{-1}\left[\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} A_{ij}x_j^{(r)}\right] + A_{ii}^{-1}\,b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) \\ (r = 0, 1, 2, \ldots) \end{array}\right.$$

(Méthode de Jacobi par blocs.)

De même, partant d'un vecteur quelconque $y^{(0)}$ de $\mathbf{R}^n$ décomposé selon les blocs $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_k^{(0)}$, on définit une suite de vecteurs

$y^{(r)}$ de $\mathbf{R}^n$ décomposés selon les blocs $y_1^{(r)}, y_2^{(r)}, \ldots, y_k^{(r)}$, par la récurrence :

$$\begin{cases} y_i^{(r+1)} = -A_{ii}^{-1}\left[\sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}y_j^{(r+1)} + \sum_{j=i+1}^{k} A_{ij}y_j^{(r)}\right] + A_{ii}^{-1} b_i \\ \hfill (i = 1, 2, \ldots, k) \\ (r = 0, 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

(Méthode de Gauss-Seidel par blocs.)
(Dans la somme entre crochets le premier terme disparaît lorsque i vaut *1*, et le second lorsque i vaut n).

On définit alors dans $\mathcal{M}_n$ les matrices L et U suivantes : dans la décomposition en blocs introduite sur $\mathcal{M}_n$, soient L_{ij} les blocs de L, U_{ij} ceux de U ($i, j = 1, 2, \ldots, k$). On pose, pour définir L et U :

$$L_{ij} = 0 \quad \text{si } i \leqslant j \text{ , } U_{ij} = -A_{ii}^{-1} A_{ij} \quad \text{si } i < j$$

$$L_{ij} = -A_{ii}^{-1} A_{ij} \quad \text{si } i > j \text{ , } U_{ij} = 0 \quad \text{si } i \geqslant j$$

De sorte que L (respectivement : U) est une matrice triangulaire inférieure (respectivement : supérieure) stricte, par blocs.

ERRATUM : ligne 19, *lire* « i vaut k » *au lieu de* « i vaut n ».

Q 21 *Démontrer que les deux méthodes introduites peuvent se mettre sous la forme :*

$$x^{(r+1)} = J \quad x^{(r)} + h_1 \quad \text{(Jacobi par blocs)}$$
$$y^{(r+1)} = \mathcal{L} \ y^{(r)} + h_2 \quad \text{(Gauss-Seidel par blocs)}$$

où J *et* $\mathcal{L}$ *sont deux matrices dans* $\mathcal{M}_n$, *indépendantes de* r, *qu'on explicitera en fonction de* L *et* U, *et où* h_1 *et* h_2 *sont deux vecteurs de* $\mathbf{R}^n$, *indépendants de* r, *qu'on explicitera également.*

Q 22 *Démontrer que, si* $\rho(S(J)) < 1$:

1. *Le système linéaire* $Ax = b$ *admet une solution unique* x *dans* $\mathbf{R}^n$;
2. *La méthode de Jacobi par blocs considérée produit une suite qui converge vers cette solution, quel que soit le vecteur* $x^{(0)}$ *de départ;*
3. *La méthode de Gauss-Seidel par blocs considérée produit une suite qui converge vers cette solution, quel que soit le vecteur* $y^{(0)}$ *de départ.*

Q 23 *Démontrer que l'on peut étendre intégralement l'étude faite à la section (VII) au cas de la norme vectorielle p définie à la section (VI).*

Formuler ces résultats plus généraux; démontrer alors que l'étude faite ci-dessus en **Q 21** *et* **Q 22** *en est cas particulier pour une application affine de* $\mathbf{R}^n$ *dans* $\mathbf{R}^n$.

RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE NUMERIQUE

Le problème concernait l'étude et l'utilisation (pour des questions d'analyse numérique) de la notion de norme vectorielle : sur un espace vectoriel X, une norme vectorielle de taille k est une norme à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ (ordonné composante à composante pour l'inégalité triangulaire). L'étude proposée était relativement "simple", avec quelques questions plus difficiles. L'épaisseur des copies (15, 30 pages...) montre que la quasi totalité des candidats a pu fournir une prose abondante. La longueur apparente du problème correspondait en fait à une démarche très détaillée par l'énoncé.

On a trouvé : peu de copies totalement nulles, une grande mane de copies médiocres, un lot assez important de copies acceptables et pas mal de copies bonnes ou très bonnes. Les questions posées et le barème adopté ont permis un classement clairement satisfaisant, qui s'est révélé, à la délibération, très corrélé avec celui des deux autres épreuves.

Les six premières questions, élémentaires, ont été dans l'ensemble bien traitées, et en tous cas étudiées par la quasi totalité des candidats. Elles permettaient de voir que munir X d'une norme vectorielle p de taille k n'est pas autre chose que le munir de la topologie séparée définie par k semi-normes (les composantes p_i de p). Cette topologie est équivalente à celle d'une norme notée φ dans le texte.

De **Q7** à **Q14**, on utilisait la notion introduite pour l'étude de l'existence, de l'unicité, et de la construction algorithmique du point fixe (appelé souvent "point double" dans les copies..) de certains opérateurs sur X : à partir de la notion de contraction en norme vectorielle (la constante de contraction usuelle est ici remplacée par une matrice K, non-négative et de rayon spectral ρ (K) $<$ 1) il s'agissait exactement de retranscrire, en **Q7**, la démonstration du théorème usuel du point fixe pour un opérateur contractant F.

Un lot bien trop important de copies commence à trébucher à ce niveau : confusion dans la notion de suite de Cauchy (!) qu'on ramène très souvent, de façon explicite ou plus dissimulée, à la suivante : "la distance de deux éléments successifs tend vers 0". D'autre part lorsque $x_{2+1}= F(x_r)$ $(r\in \mathbb{N}\ ,\ x_r\in X)$, et que x_r converge vers x dans X, il paraît évident à beaucoup trop de candidats que $x = F(x)$ "d'après le principe de prolongement des égalités". Peu de copies estiment nécessaire de démontrer cette conclusion, et parmi celles qui y pensent, beaucoup se livrent à des développements touffus : trop peu signalent que, F étant contractant, est nécessairement continu ... ce qui suffisait.

L'illustration, en **Q10** et **Q11**, de cette première étude sur deux exemples simples pris dans le contexte des exemples de normes vectorielles donnés en **Q6**, permet de bien distinguer les copies dont les auteurs savent ce qu'ils font et où ils vont : ces copies-là mettent bien en évidence que la contraction en norme vectorielle est, pour le même résultat, une notion moins impérative que la contraction "scalaire" obtenue en utilisant la norme φ.

De **Q12** à **Q14** était demandée une étude, purement algébrique, de la structure en sous-espaces vectoriels définie par une norme vectorielle sur $\mathbb{R}^n$. La plupart des copies ignorent une caractérisation correcte du fait que k sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ admettent une somme directe : on se contente très souvent de vérifier que ces sous-espaces sont deux à deux d'intersection réduite à zéro (on les appelle alors "disjoints"...). **Q13**, exercice de construction de ces sous-espaces sur 2 exemples, a été généralement bien traité, de même que **Q14** qui était une question importante et jugée assez difficile : malgré la réserve ci-dessus, il semble que les questions à caractère algébrique soient mieux traitées par l'ensemble des candidats :

de **Q15** à **Q18** on construisait, à partir d'une norme vectorielle ρ régulière sur $\mathbb{R}^n$, la norme vectorielle d'opérateur linéaire correspondante : toute matrice T (n,n) est alors décomposée en blocs et la norme vectorielle S(T) construite s'obtient en remplaçant chaque bloc de T par sa norme (scalaire). Par cette construction on retrouvait, en **Q18**, pour le cas d'opérateurs affines sur $\mathbb{R}^n$ $[F(x) = Tx + h]$ le résultat de **Q7** : car dans ce cas la contraction de F est caractérisée par la condition $\rho(S(T)) < 1$: très peu de candidats traitent correctement cette question, qui donne lieu à de grosses confusions.

On revenait ensuite, pour la simplicité des notations, à la norme vectorielle type sur $\mathbb{R}^n$, et (en **Q19** et **Q20**) on considérait un opérateur F, non nécessairement linéaire, contractant sur $\mathbb{R}^n$: il s'agissait alors de voir que non seulement la méthode des approximations successives, mais aussi la méthode non linéaire de Gauss-Seidel, converge vers l'unique point fixe de F. C'est l'extension de ce résultat au cas d'une norme vectorielle régulière plus générale (correspondant alors à des méthodes par blocs) qui sera demandée en **Q23**.

En **Q19** beaucoup trop de copies se bornent à montrer que l'unique point fixe de F est point fixe de G sans penser à la réciproque. En **Q20** (question jugée difficile) une bonne quinzaine de copies parvient correctement au résultat : voici la démarche (cf les notations de l'énoncé) $|F(x) - F(y)| \leqslant K|x - y|$ d'où d'après la définition de G (opérateur non linéaire de Gauss-Seidel attaché à F) et la décomposition donnée de K en L + U :

$$|G(x) - G(y)| \leqslant L\,|G(x) - G(y)| + U(x - y)$$

d'où $$|G(x) - G(y)| \leqslant (I - L)^{-1}\,U\,|x - y|$$

or $\rho\,[(I - L)^{-1}\,U] \leqslant \rho\,(L + U) = \rho\,(K) < 1$ d'après le théorème de Stein-Rosenberg, donné dans l'énoncé (proposition 3).

Les copies qui parviennent à ce niveau le font dans l'aisance et la solidité : les questions difficiles, lorsqu'elles sont traitées, le sont bien mieux que les questions simples, qui donnent lieu à de nombreuses rédactions floues, approximatives, pénibles.

En **Q21** était demandé d'établir le formalisme matriciel des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel par blocs pour le cas linéaire, en **Q22** de démontrer la convergence de ces méthodes sous l'hypothèse de contraction de l'opérateur correspondant de Jacobi.

Enfin, en **Q23** on demandait une synthèse du problème : précisément, d'étendre au cas non linéaire le résultat de **Q22**, généralisant la démonstration demandée en **Q20** et rappelée ci-dessus. Une quinzaine de copies brillantes parviennent à cette synthèse, sans toutefois formuler l'énoncé demandé. Ce sont les meilleures copies, qui, ayant dominé l'ensemble du problème, proposent une rédaction claire, concise, sûre, et de lecture intéressante.

Pour terminer, citons les erreurs les plus grosses, rencontrées de façon systématique dans un trop grand nombre de copies :

a) formalisme matriciel : si $u \in \mathbb{R}^k$ et M est une matrice (k,k) on écrit, sous différentes formes :

$$\frac{1}{u}\ ;\ u\mathrm{M} \text{ au lieu de } \mathrm{M}u\ ;\ \frac{1}{I - M} \text{ pour } (I - M)^{-1}$$

On croit que $Mu \leqslant u$ entraîne $M \leqslant I$; que si u n'est pas $\geqslant 0$ (composantes à composantes) ni nul, il est < 0. Ou encore que u est > 0 dès qu'il est $\geqslant 0$ et $\neq 0$. On croit que si une matrice A est $\geqslant 0$ et de rayon spectral plus petit que 1, elle est majorée par la matrice "pleine de 1"...

b) analyse : suite de Cauchy dans un espace vectoriel ; $x^{r+1} - x^r$ tend vers 0 ou variantes équivalentes ; "il existe des suites de fonctions continues qui convergent, au sens de la convergence uniforme vers une fonction discontinue sur $[0,1]$".

Notions de continuité, de limite mal assimilées, utilisées de façon fondamentalement erronée. On parle de la topologie de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^n$. Un raisonnement pernicieux :

$$\left.\begin{array}{l} x^r - F(x^r) \text{ tend vers } 0 \\ x^r \text{ tend vers } x \end{array}\right\} \quad \text{"donc" } F(x^r) \text{ tend vers } F(x)$$

c) algèbre : soient $W_1 \ldots W_k$ k sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.
Voici (au dire de beaucoup) différentes CNS pour que leur somme algébrique soit directe :

$$W_i \cap W_j = \{0\} \ (i \neq j) \ ; \ W_i \cap [\bigcup_{j \neq i} W_j] = \{0\} \quad i \in (1,2\ldots k) \ ;$$

$$W_i \cap [\bigcap_{j \neq i} W_j] = \{0\} \quad i \in (1,2\ldots k) \ !$$

$$W_i \cap W_{i+1} = \{0\} \quad i = 1,2\ldots k-1$$

$$\bigcap_{j \in 1,2..k} W_j = \{0\}$$

ou encore : "Pour que k sous-espaces admettent une somme directe, il faut et il suffit qu'ils soient 2 à 2 **distincts**"

Autre erreur grave : si $x \in V \oplus W$, et si $x \notin V$ alors $x \in W$.

d) **confusion** entre un vecteur et sa norme, une matrice et sa norme $T \leqslant s(T)$

e) **Calcul numérique :** même élémentaire, il rebute. Très peu évitent l'erreur de calcul grossière. Visiblement un calcul numérique fait peur:... "mais ceci nécessiterait de calculer $(I - M)^{-1}$" (dans l'exemple, M est une matrice (2,2)...).

f) **l'inégalité** $|\sin a - \sin b| \leqslant |a - b|$ fait trébucher beaucoup de candidates ; on écrit que, dans $\mathbb{R}^3$, l'équation $|x_1| + |x_2| = 0$ "est celle d'un hyperplan".

Enfin, citons à propos de la question **Q9**, la plus énorme bêtise commise dans ce problème :

$$F(x) = F(x_1,x_2) = \left| \begin{array}{l} 0,4 \sin x_1 + 0,2 \cos x_2 \\ 0,8 \cos x_1 + 0,4 \sin x_2 \end{array} \right. = \begin{pmatrix} 0,4 \sin & 0,2 \cos \\ 0,8 \cos & 0,4 \sin \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Mx$$

$$\text{d'où} \quad F(x) - F(y) = Mx - My = M(x - y)$$

il s'agit donc d'un principe nouveau de linéarisation.

L'auteur continue, en calculant ensuite $(I - M)^{-1}$, utilisant pour cela :

$$\det (I - M) = (1 - 0,4 \sin)^2 - (0,4 \cos)^2 = \text{etc.}$$

Répartition des notes (entre 0 et 40)

Agrégation masculine (510 copies)

n ⩽ 4	4 < n ⩽ 9	9 < n ⩽ 14	14 < n ⩽ 19	19 < n ⩽ 24	24 < n ⩽ 29	29 < n ⩽ 34	34 < n
66	124	130	110	38	28	12	2

Agrégation féminine (282 copies ; moyenne 11,83/40)

n ⩽ 4	4 < n ⩽ 9	9 < n ⩽ 14	14 < n ⩽ 19	19 < n ⩽ 24	24 < n ⩽ 29	29 < n ⩽ 34	34 < n
36	70	98	41	22	7	3	5

TEXTE DE L'EPREUVE DE MECANIQUE

DÉFINITIONS ET NOTATIONS

1. *Système mécanique.*

On se propose d'étudier quelques questions relatives au système mécanique Σ, *supposé isolé,* constitué par trois points matériels M_0, M_1, M_2, de masses respectives m_0, m_1, m_2 non nulles et en mouvement dans l'espace affine euclidien E_3.

Pour $i, j = 0, 1, 2$ et $i \neq j$, on désigne par d_{ij} la longueur du segment M_iM_j, supposée toujours non nulle, et par $\vec{u}_{ij}$ le vecteur unitaire de la demi-droite M_iM_j d'origine M_i, contenant M_j. On a donc $\overrightarrow{M_iM_j} = d_{ij}\vec{u}_{ij}$.

Chacun des trois points M_i est soumis *uniquement* à l'action des deux autres : on note $\vec{F}_{ij}$ l'action de M_j sur M_i $(i \neq j)$; dans tout le problème, les hypothèses suivantes sont faites sur les forces $\vec{F}_{ij}$:

a. $\vec{F}_{ij}$ est colinéaire à $\vec{u}_{ij}$;

b. $\vec{F}_{ij}$ s'écrit sous la forme $\vec{F}_{ij} = m_im_jf_{ij}(d_{ij})\vec{u}_{ij}$, où f_{ij} n'est fonction que de d_{ij};

c. en général, les fonctions f_{ij} et f_{ji} ne sont pas égales : cette dernière hypothèse implique que, *à l'intérieur de* Σ, « *l'action n'est pas toujours égale à la réaction* »;

d. Les fonctions $u \longmapsto f_{ij}(u)$ sont définies et continûment dérivables pour u réel strictement positif.

2. *Repères et coordonnées.*

Dans E_3 trois repères orthonormés seront utilisés :

- $\mathcal{F}$ est un repère fixe d'origine O arbitraire;
- $\mathcal{R}_0$ est le repère d'origine M_0, d'axes parallèles à ceux de $\mathcal{F}$;
- $\mathcal{R}$, utilisé dans la deuxième partie, est un repère mobile d'origine M_0, dont le premier axe passe par M_1 et dont le troisième axe coïncide avec le troisième axe de $\mathcal{R}_0$.

On utilisera aussi un repère $\mathcal{N}$ dans un espace auxiliaire introduit dans la question II 6°.

Dans la mesure du possible, on se conformera aux notations suivantes, choisies pour leur commodité, en désignant :

- Par $\vec{r}_i$ le vecteur $\overrightarrow{M_0M_i}$, et par x_i, y_i, z_i ses coordonnées dans $\mathcal{R}_0$ $(i = 1, 2)$.
- Par $\vec{R}_i$ le vecteur $\overrightarrow{OM_i}$ et par X_i, Y_i, Z_i ses coordonnées dans $\mathcal{F}$ $(i = 0, 1, 2)$.

Les trois points jouent dans le problème des rôles dissymétriques; on sera amené à utiliser :

$$d_{01} = d_{10} = \rho \quad , \quad d_{02} = d_{20} = r \quad , \quad d_{12} = d_{21} = d$$

Enfin on notera t le temps, et θ l'angle qui fixe la position de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}_0$.

N. B. — Une lecture attentive du texte montrera facilement quelles sont les relations de dépendance entre les différentes questions.

I

1° Écrire le système (D) des équations différentielles qui définissent le mouvement de Σ dans $\mathcal{R}_0$. On utilisera de préférence les inconnues $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ ainsi que les variables ρ, r, d.

Si l'on suppose connue la solution de (D) qui satisfait à des conditions initiales données, comment peut-on obtenir le mouvement de $\mathcal{R}_0$ par rapport à $\mathcal{F}$?

Donner les relations que doivent vérifier les fonctions f_{ij} ($i, j = 0, 1, 2$; $i \neq j$) pour que, quelles que soient les conditions initiales et quelles que soient les masses m_i ($i = 0, 1, 2$), le mouvement dans $\mathcal{F}$ du centre d'inertie G de Σ soit rectiligne uniforme. Donner une interprétation mécanique du résultat obtenu.

2° *Dans cette question seulement*, on suppose $f_{ij} = f_{ji}$ ($i, j = 0, 1, 2$; $i \neq j$); on suppose de plus que, pour tout $u > 0$ et pour toute fonction f_{ij}, on a : $f_{ij}(u) \neq 0$.

a. Étudier l'existence de positions d'équilibre de Σ *dans* $\mathcal{R}_0$ pour chacun des deux cas :

- Les points M_0, M_1, M_2 forment un véritable triangle;
- M_0, M_1, M_2 sont alignés et, pour tout $u > 0$, on a :

$$f_{01}(u) < 0 \quad , \quad f_{02}(u) < 0 \quad , \quad f_{12}(u) > 0$$

b. En supposant que les points M_0, M_1, M_2 sont astreints, par des liaisons sans frottement, à rester alignés sur une droite fixe par rapport à $\mathcal{F}$ et que les fonctions f_{ij} sont égales à :

$$f_{01}(u) = -\frac{1}{u^2} \quad , \quad f_{02}(u) = -\frac{1}{u^2} \quad , \quad f_{12}(u) = \frac{1}{u} \quad ,$$

étudier les mouvements de Σ dans lesquels r et ρ sont constants et discuter la stabilité de ces équilibres relatifs : on remarquera que, dans le mouvement de Σ par rapport à $\mathcal{F}$, les forces en jeu dérivent d'une fonction de forces et on appliquera le théorème de Lejeune-Dirichlet.

3° Dans cette question, les fonctions f_{ij} sont définies, pour $u > 0$, par $f_{ij}(u) = \lambda_{ij}u$, où les λ_{ij} sont des constantes ($i, j, = 0, 1, 2$; $i \neq j$). Intégrer les équations du mouvement de Σ dans $\mathcal{F}$, sans examiner les cas particuliers. On pourra définir toute constante intermédiaire susceptible de simplifier l'écriture; on démontrera que la solution dépend de six vecteurs constants arbitraires et on s'attachera à expliciter cette dépendance.

II

Dans toute la suite on suppose que M_2 n'agit pas sur M_0 et M_1 (mais M_0 et M_1 agissent sur M_2), c'est-à-dire que les fonctions f_{02} et f_{12} sont identiquement nulles.

Le système différentiel (D), qui définit le mouvement de Σ dans $\mathcal{R}_0$, se scinde alors en deux parties : (D_1) définit le mouvement de M_1 dans $\mathcal{R}_0$ et (D_2) définit le mouvement de M_2 dans $\mathcal{R}_0$, lorsque celui de M_1 est connu.

1° Démontrer que la trajectoire de M_1 dans $\mathcal{R}_0$ est située dans un plan P passant par M_0. On choisit $\mathcal{F}$ de façon que les deux premiers axes de $\mathcal{R}_0$ soient dans P; la position de M_1 dans P est alors donnée par ses coordonnées polaires ρ et θ (voir notations). On posera $f = m_0 f_{10} + m_1 f_{01}$, et on désignera par F une primitive de f.

Définir la trajectoire de M_1 dans P par une quadrature.

Dans le cas $F(\rho) = k\rho^n$, $n \in \mathbf{Z}$ et k constant, quelles sont les valeurs de n pour lesquelles θ s'exprime en fonction de ρ au moyen de fonctions élémentaires, quelles que soient les conditions initiales?

2° On suppose qu'il existe des valeurs positives de ρ pour lesquelles on a $f(\rho) > 0$. Démontrer que, si a est une telle valeur, il existe des conditions initiales telles que ρ soit constamment égal à a. Comment varie alors θ en fonction de t?

3° Dans le repère $\mathcal{R}$ (défini dans «définitions et notations»), les coordonnées de M_1 sont $\rho(t)$, 0, 0. Soient x, y, z celles de M_2; on a :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \text{et} \qquad d = \sqrt{r^2 - 2\rho x + \rho^2}$$

On désigne par U la matrice-colonne d'ordre 3 d'éléments x, y, z. Mettre les équations du mouvement de M_2 dans $\mathcal{R}$ sous la forme :

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^2 U}{dt^2} + A\frac{dU}{dt} + BU = C$$

où A, B sont des matrices carrées d'ordre 3 dont les éléments ne dépendent que de la fonction $t \longrightarrow \theta(t)$, et où C est une matrice-colonne d'ordre 3 dont les éléments ne dépendent que de x, y, z et de la fonction $t \longrightarrow \rho(t)$.

4° Dans le cas particulier, étudié en II-2, où le mouvement de M_1 dans P est circulaire, démontrer que le système (1) possède une intégrale première quadratique dont on donnera une interprétation mécanique.

5° Revenant au cas général, on effectue sur le système (1) la transformation (T) suivante : choisissant θ comme nouvelle variable, on pose :

$$x = \rho\xi \qquad y = \rho\eta \qquad z = \rho\zeta$$

(on rappelle que, après l'intégration des équations du mouvement de M_1, ρ est une fonction connue de θ).

Écrire le système différentiel reliant les fonctions ξ, η, ζ de la variable θ et leurs dérivées par rapport à θ.

Démontrer que ce système peut se mettre sous la forme :

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} \xi'' - 2\eta' = \rho^3 \dfrac{\partial R}{\partial \xi} \\[2ex] \eta'' + 2\xi' = \rho^3 \dfrac{\partial R}{\partial \eta} \\[2ex] \zeta'' + \zeta = \rho^3 \dfrac{\partial R}{\partial \zeta} \end{cases}$$

où R est une fonction de ξ, η, ζ, ρ qu'on exprimera au moyen des f_{ij}, de leurs primitives et des conditions initiales du mouvement de M_1.

6° Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3, muni d'un repère orthonormé $\mathcal{N}$. Soient μ_0, μ_1, μ_2 les points de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées respectives dans $\mathcal{N}$ sont $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, (ξ, η, ζ); ces points peuvent être considérés comme les images par (T) des points M_0, M_1, M_2 de E_3.

La connaissance en fonction de θ de la trajectoire de μ_2 dans $\mathcal{N}$ et la connaissance du mouvement de M_1 dans $\mathcal{R}_0$ définissent complètement le mouvement de Σ dans $\mathcal{R}_0$. Trouver les conditions que doivent vérifier les fonctions f_{ij} pour qu'il existe des solutions de (2) telles que μ_2 soit fixe dans le plan d'équation $\zeta = 0$ et forme avec μ_1 et μ_0 un triangle équilatéral.

7° Dans toute la suite on suppose que, quel que soit ρ, les fonctions f_{ij} vérifient les conditions trouvées dans II-6° et on se place dans le cas particulier étudié dans II-2° et II-4° ($\rho = a$). Si μ_2 est fixe dans $\mathcal{N}$, alors M_2 est fixe dans $\mathcal{R}$. Soient ξ_0, η_0 et ζ_0 les coordonnées de l'une des positions d'équilibre de μ_2 trouvées à la question précédente. On pose :

$$\xi = \xi_0 + \bar{\xi} \qquad \eta = \eta_0 + \bar{\eta} \qquad \zeta = \zeta_0 + \bar{\zeta}$$

En utilisant éventuellement le résultat trouvé en II-4°, démontrer qu'il existe une forme quadratique $\Phi(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ telle que, pour toute solution de (2), on ait :

$$\bar{\xi}'^2 + \bar{\eta}'^2 + \bar{\zeta}'^2 = -\Phi(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}) + (\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \varepsilon(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}) + H$$

où H est une constante et ε une fonction de trois variables bornée au voisinage de (0, 0, 0).

La fonction f a été définie au II-1° par : $f = m_0 f_{10} + m_1 f_{01}$; on définit de même la fonction g par : $g = m_0 f_{10} - m_1 f_{01}$.

Exprimer les coefficients de Φ en fonction des valeurs de f, g et de leurs dérivées au point a.

Démontrer qu'une condition suffisante de stabilité de la position d'équilibre de μ_2 dans $\mathcal{M}$ est que Φ soit une forme quadratique définie positive.

Quelles conditions doivent vérifier f, g et a pour qu'il en soit ainsi?

8° Étudier la stabilité du système différentiel (L) obtenu en linéarisant le système (2) autour de sa solution $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$, $\zeta = \zeta_0$. Que peut-on en conclure sur la stabilité de la position d'équilibre de μ_2?

RAPPORT SUR L'EPREUVE DE MECANIQUE

Bâti sur le thème de l'étude d'un système isolé formé de 3 masses ponctuelles, le problème avait été conçu pour tester les réactions des candidats devant un certain nombre de questions très classiques en mécanique générale et ne contenant aucun piège. Les résultats ont été décevants : très peu de candidats dominent convenablement le programme de mécanique de premier cycle, et on peut s'étonner du nombre considérable de copies blanches ou presque vides, alors que le problème commençait par des questions sans difficulté particulière.

Partie I

Dans la première question on demandait la mise en équation du problème dans un repère mobile, en translation par rapport au repère galiléen. On a retrouvé à ce propos toutes les erreurs classiques : confusion de notations, utilisation simultanée (dans l'un ou l'autre membre de l'équation) des "forces d'inertie d'entraînement" et des "accélérations d'entraînement", application sans précaution de la méthode de Lagrange à partir d'un énergie cinétique relative, sans compter l'apparition subreptice de forces de pesanteur (?).

Ce ci n'est pas pour étonner les correcteurs, vieux routiers du métier, et qui savent combien ces questions de mouvement relatif sont en général mal comprises ou mal assimilées. Ce qui est plus surprenant c'est l'utilisation généralisée de la méthode de "pêche à la ligne" des équations : on écrit une équation de la quantité de mouvement par-ci, un théorème du moment cinétique par là, éventuellement une forme bâtarde d'un théorème de l'énergie, sans se préoccuper de la cohérence du système d'équations ainsi obtenu, sans chercher à savoir si les équations sont en nombre suffisant, si elles sont indépendantes ou non. Le résultat est trop souvent catastrophique.

En particulier, les candidats qui se contentent du système formé par l'équation définissant le mouvement du centre d'inertie et l'équation du moment cinétique autour de ce centre d'inertie n'ont sans doute guère réfléchi à la différence qui existe entre un système de points matériels quelconque et un solide.

On peut s'étonner aussi de trouver des candidats qui pensent, ou semblent penser, que tout mouvement de translation est uniforme.

Dans la deuxième question on demandait tout d'abord d'étudier les positions d'équilibre relatif du système dans le cas où $f_{ij} = f_{ji} \neq 0$.

Des conditions nécessaires d'équilibre sont évidemment $\frac{d^2\vec{R}_1}{dt^2} = \frac{d^2\vec{R}_0}{dt^2} = \frac{d^2\vec{R}_2}{dt^2}$ mais, comme avec l'hypothèse $f_{ij} = f_{ji}$ le centre d'inertie a un mouvement de translation uniforme, il vient immédiatement : $\frac{d^2\vec{R}i}{dt^2} = 0 \quad i = 0, 1, 2$. Il est clair qu'il ne peut y avoir équilibre si les 3 points forment un vrai triangle et les conditions d'équilibre dans le cas de 3 points alignés sont faciles à déterminer :

Le (b) de cette question est une application immédiate du théorème de Lejeune Dirichlet pour la recherche de la stabilité. Doit-on rappeler ici que les conditions :
$\frac{\partial U}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0 \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x_0, y_0) < 0$ ne fournissent pas un ensemble de conditions suffisantes pour que U soit maximum au point (x_0, y_0) ?

La question 3 a été l'occasion de vérifier qu'un bon nombre de candidats n'ont, sur les systèmes différentiels, que des connaissances superficielles. On s'attendait à trouver plus souvent la forme générale de la solution d'un système de 6 équations du second ordre, linéaires et à coefficients constants. On ne s'attendait pas, par contre, à rencontrer le raisonnement suivant :
"X est un vecteur colonne, A une matrice carrée (6 × 6). Si X" = AX, alors $X'^2 = AX^2 + Cte$".

Partie II

Le problème traité dans cette partie est une généralisation du problème restreint des trois corps. Les 2 premières questions sont des questions de cours classiques et appellent peu de remarques particulières. Rappelons encore une fois que les trajectoires, dans un mouvement à accélération centrale, ne sont pas toujours des coniques et que $\frac{d\rho}{dt} = f(\theta)$ n'est pas l'équation différentielle d'une trajectoire.

Peu de candidats sont allés au-delà de la 3e question. Ceux qui ont franchi ce cap alors facilement obtenu des points dans la suite, où seule était nécessaire une certaine maîtrise des techniques de calcul. Aucun candidat n'a abordé de façon positive les deux dernières questions, où la stabilité des positions d'équilibre trouvées au 6° était étudiée de deux façons : par une méthode de type Liapounov et par linéarisation.

Sur le plan général, on doit noter la maladresse et la lourdeur avec laquelle sont menés les calculs, les difficultés qu'éprouvent de nombreux candidats dans la manipulation de l'analyse vectorielle, pourtant classique maintenant dans tous les cycles d'enseignement.

On peut aussi ajouter au florilège de l'agrégation les extraits suivants, sans commentaire :
"$\log a = \log b + \log c \quad \Longrightarrow \quad a = b + c$"
"$\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ et $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ sont trois vecteurs linéairement indépendants, donc :
$a\vec{r}_1 + b\vec{r}_2 + c(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = b = c = 0$"
"il faut et il suffit connaître..."

Répartition des notes (entre 0 et 40)

Agrégation masculine : 198 copies

n = 0	1 ⩽ n ⩽ 5	6 ⩽ n ⩽ 10	11 ⩽ n ⩽ 15	16 ⩽ n ⩽ 20	21 ⩽ n ⩽ 25	26 ⩽ n ⩽ 30	31 ⩽ n ⩽ 35	36 ⩽ n ⩽ 40
26	77	28	42	13	6	3	2	1

Agrégation féminine : 81 copies

n = 0	1 ⩽ n ⩽ 5	6 ⩽ n ⩽ 10	11 ⩽ n ⩽ 15	16 ⩽ n ⩽ 20	21 ⩽ n ⩽ 25	26 ⩽ n ⩽ 30	31 ⩽ n ⩽ 35	36 ⩽ n ⩽ 40
10	29	18	12	8	2	2	0	0

TEXTE DE L'EPREUVE
DE PROBABILITES ET STATISTIQUES

Conventions et notations.

a. Dans ce problème, on aura lieu de considérer, sur l'ensemble $\mathbf{R}^n$,

— le *produit scalaire* usuel (noté .) et la *norme* qui lui est associée (norme euclidienne, notée $| \quad |$);

— la *topologie usuelle,* définie par la norme $| \quad |$ (pour toute partie A de $\mathbf{R}^n$, on note $\mathring{A}$ son intérieur et $\bar{A}$ sa fermeture) et la *tribu borélienne* (notée $\mathcal{B}^n$) qui lui est associée;

— l'ensemble des parties *convexes* : étant donné une partie A de $\mathbf{R}^n$, on appelle enveloppe convexe (resp enveloppe convexe fermée) de A la plus petite (au sens de l'inclusion) partie convexe (resp convexe fermée) contenant A.

b. Tous les espaces mesurables envisagés dans ce problème sont *euclidiens :* $(\Omega, \mathcal{A})$ est dit euclidien si, et seulement si, il existe n, entier strictement positif, tel que $\Omega \in \mathcal{B}^n$, et que $\mathcal{A}$ soit la tribu induite par $\mathcal{B}^n$ sur Ω (c'est-à-dire $\mathcal{A} = \{ A \in \mathcal{B}^n \; ; \; A \subset \Omega \}$).

c. Pour toute probabilité P sur $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}^n)$, on appelle *support* de P, et on note Supp (P) la plus petite (au sens de l'inclusion) partie fermée F de $\mathbf{R}^n$ vérifiant $P(F) = 1$ (on admettra son existence).

Définitions.

Soient deux entiers strictement positifs, n et m; soit $\Omega \in \mathcal{B}^n$ et soit $\Theta \subset \mathbf{R}^m$; soit (P_θ) une famille de probabilités sur l'espace mesurable euclidien $(\Omega, \mathcal{A})$, indicée par Θ; Ω est appelé l'ensemble des *résultats,* et Θ l'ensemble des *paramètres de* la famille (P_θ).

On dit que la famille (P_θ) est *exponentielle* si et seulement si il existe :

une mesure σ-finie μ sur $(\Omega, \mathcal{A})$,
un entier strictement positif k,
une application mesurable T de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbf{R}^k, \mathcal{B}^k)$,
une application U de Θ dans $\mathbf{R}^k$,
une application mesurable a de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$,
une application b de Θ dans $\mathbf{R}$,

tels que, pour tout θ, P_θ soit absolument continue par rapport à μ et admette, pour densité par rapport à μ, la fonction

$$\omega \longmapsto \exp [T(\omega) \, . \, U(\theta) - a(\omega) - b(\theta)] \; .$$

Le quadruplet (T, U, a, b) est appelé une *représentation* de *référence* μ (ou μ-représentation), de *dimension* k, de la famille (P_θ); cette représentation est dite :

résultats-identique si $n = k$ et, pour tout $\omega \in \Omega$, $T(\omega) = \omega$,
paramètres-identique si $m = k$ et, pour tout $\theta \in \Theta$, $U(\theta) = \theta$,
de *type nul* si, pour tout $\omega \in \Omega$, $a(\omega) = 0$;

la fonction b est appelée *fonction de cumul.*

I. *Généralités sur les familles exponentielles.*

1° Démontrer que les familles suivantes sont exponentielles :

a. Étant donné un entier strictement positif h, $\Omega = \{ 0, 1, \ldots, h \}$; $\Theta =]0, 1[$; pour tout θ, P_θ est la loi binomiale d'ordre h et paramètre θ.

b. $\Omega = \mathbf{N}$; $\Theta = \mathbf{R}_+^*$ $(=]0, +\infty[)$; pour tout θ, P_θ est la loi de Poisson de paramètre θ.

c. $\Omega = \mathbf{R}$; $\Theta = \mathbf{R}$; pour tout θ, P_θ est la loi de Laplace-Gauss (dite aussi loi normale) réduite (c'est-à-dire de variance égale à 1), de moyenne θ.

d. $\Omega = \mathbf{R}$; $\Theta = \mathbf{R}_+^*$; pour tout θ, P_θ est la loi de Laplace-Gauss centrée (c'est-à-dire de moyenne égale à 0), de variance θ.

e. $\Omega = \mathbf{R}$; $\Theta = \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$; pour tout $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, P_θ est la loi de Laplace-Gauss de moyenne θ_1 et variance θ_2.

2° Soit (P_θ) une famille exponentielle, d'ensemble des résultats Ω et ensemble des paramètres Θ ; soit (T, U, a, b) une μ-représentation de dimension k de (P_θ).

a. Deux mesures σ-finies sur $(\Omega, \mathcal{A})$ sont dites équivalentes si chacune est absolument continue par rapport à l'autre.

Démontrer que, pour toute mesure σ-finie ν équivalente à μ, la famille (P_θ) admet une représentation de référence ν et de dimension k.

Démontrer que, pour tout $\theta^0 \in \Theta$, la famille (P_θ) admet une représentation de référence P_{θ^0} et de dimension k, qui est de type nul.

b. Une application surjective φ, de Θ sur un ensemble Θ', est appelée un codage compatible avec la famille (P_θ) si, et seulement si, pour tout couple $(\theta^1, \theta^2) \in \Theta^2$, tel que $\varphi(\theta^1) = \varphi(\theta^2)$, on a $P_{\theta^1} = P_{\theta^2}$; l'unique famille, notée $(({}_\varphi P)_{\theta'})$, admettant Ω pour ensemble des résultats et Θ' pour ensemble des paramètres, définie par

$$(\forall \theta \in \Theta) \qquad P_\theta = ({}_\varphi P)_{\varphi(\theta)},$$

est dite *codée* de (P_θ) par φ.

Soit $\Theta' = U(\Theta)$.

Démontrer que U est un codage compatible avec la famille (P_θ).

Démontrer que la famille $(({}_U P)_{\theta'})$, codée de (P_θ) par U, est exponentielle et admet une μ-représentation de dimension k, paramètres-identique.

c. f étant une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans un espace mesurable $(\Omega', \mathcal{A}')$, on appelle *transformée* de (P_θ) par f la famille, notée $(({}^f P)_\theta)$, admettant Ω' pour ensemble des résultats et Θ pour ensemble des paramètres, et où, pour tout $\theta \in \Theta$, $({}^f P)_\theta$ est l'image de P_θ par f (c'est-à-dire que, pour tout $A' \in \mathcal{A}'$, on a

$$({}^f P)_\theta (A') = P_\theta [f^{-1}(A')]) .$$

Soit $\Omega' \in \mathcal{B}^k$, tel que $T(\Omega) \subset \Omega'$; T peut être considéré comme une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans l'espace mesurable euclidien $(\Omega', \mathcal{A}')$.

Soit ${}^T\mu$ la mesure, sur $(\Omega', \mathcal{A}')$, image de μ par T; démontrer que la famille $(({}^T P)_\theta)$, transformée de (P_θ) par T, est exponentielle et admet une ${}^T\mu$-représentation de dimension k, résultats-identique.

II. *Représentation canonique d'une famille exponentielle.*

A partir de toute famille exponentielle admettant une représentation de dimension k on peut obtenir, par les opérations détaillées en I 2° (changement de référence, codage, transformation), une famille exponentielle (P_θ), admettant une représentation de référence P_{θ^0} (où θ^0 appartient à l'ensemble des paramètres), de dimension k, qui est de type nul, paramètres-identique et résultats-identique; si de plus $\theta^0 = 0$ (ce qui est toujours réalisable par un codage défini par une application bijective de $\mathbf{R}^k$ sur lui-même), la P_{θ^0}-représentation est dite *canonique*.

1° Soit P_0 une probabilité sur $(\mathbf{R}^k, \mathcal{B}^k)$.

a. On note b l'application de $\mathbf{R}^k$ dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$(\forall y \in \mathbf{R}^k) \qquad b(y) = \log \int_{\mathbf{R}^k} \exp(x \cdot y)\, P_0(dx) \quad ;$$

soit $\Theta = b^{-1}(\mathbf{R})$; démontrer que Θ est une partie convexe non vide de $\mathbf{R}^k$.

b. On note Ω l'enveloppe convexe fermée de Supp (P_0); démontrer qu'il existe une famille exponentielle, dont l'ensemble des résultats est Ω et l'ensemble des paramètres Θ, admettant une P_0-représentation canonique de fonction de cumul b (on s'autorise les « abus de langage » consistant à confondre :

1° P_0, probabilité sur $(\mathbf{R}^k , \mathcal{B}^k)$, avec la probabilité qu'elle définit, par restriction, sur $(\Omega , \mathcal{A})$ (car $P_0(\Omega) = 1$),

2° b, application de $\mathbf{R}^k$ dans $\mathrm{R} \cup \{+\infty\}$, avec l'application, à valeurs dans $\mathbf{R}$, qui s'en déduit par restriction à Θ).

La famille exponentielle ainsi définie est dite *engendrée* par P_0.

2° Dans chacun des cas ci-dessous (de *a.* à *e.*), caractériser (en donnant l'ensemble des résultats (Ω'), l'ensemble des paramètres (Θ') et la fonction de cumul de la représentation P_0'-canonique (b')) la famille exponentielle engendrée par P_0', et démontrer que cette famille peut être obtenue, par codage et transformation, à partir de la famille exponentielle étudiée dans le cas correspondant de la question I 1°.

a. Étant donné un entier strictement positif h, P_0' est l'unique probabilité sur $(\mathbf{R} , \mathcal{B})$ qui vérifie

$$(\forall\, i \in \{0 , 1 , \ldots , h\}) \qquad P_0'(\{i\}) = C^i_h \left(\frac{1}{2}\right)^h .$$

b. P_0' est l'unique probabilité sur $(\mathbf{R} , \mathcal{B})$ qui vérifie

$$(\forall\, i \in \mathbf{N}) \qquad P_0'(\{i\}) = \frac{1}{e}\,\frac{1}{i\,!} .$$

c. P_0' est la loi de Laplace-Gauss de dimension 1, centrée et réduite.

d. P_0' est la probabilité sur $(\mathbf{R} , \mathcal{B})$ qui admet, pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue, la fonction f_0 définie par :

$$\left|\begin{array}{lll} \text{si} \quad x \leqslant 0 , & & f_0(x) = 0 \\[2ex] \text{si} \quad x > 0 , & & f_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} . \end{array}\right.$$

e. P_0' est la probabilité définie sur $(\mathbf{R}^2 , \mathcal{B}^2)$ par les conditions suivantes :

$$P_0'(\{(x_1 , x_2) \in \mathbf{R}^2 ; \quad x_2 = \frac{1}{2}(x_1)^2\}) = 1 ,$$

la première marge de P_0' (c'est-à-dire l'image de P_0' par la projection $\pi_1 : (x_1 , x_2) \longmapsto x_1$) est la loi de Laplace-Gauss centrée et réduite.

3° Soit P_0 une probabilité sur $(\mathbf{R}^k , \mathcal{B}^k)$; soit (P_θ) la famille exponentielle (d'ensemble des résultats Ω et ensemble des paramètres Θ) engendrée par P_0, et soit b (application de $\mathbf{R}^k$ dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$) la « fonction de cumul » de sa P_0-représentation canonique.

a. Démontrer que, en tout élément θ de l'intérieur $\mathring{\Theta}$ de Θ, la fonction b est dérivable à tous les ordres.

b. Pour tout $i \in \{1 , \ldots , k\}$, on note π_i la projection de Ω $(\subset \mathbf{R}^k)$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$(\forall\, (x_j)_{1 \leqslant j \leqslant k} \in \Omega) \qquad \pi_i((x_j)_{1 \leqslant j \leqslant k}) = x_i .$$

Démontrer que, pour tout $\theta \in \mathring{\Theta}$ $(\theta = (\theta_j)_{1 \leqslant j \leqslant k})$, on a les résultats suivants :

— pour tout $i \in \{1 , \ldots , k\}$, l'*espérance mathématique* de π_i par rapport à P_θ est égale à $\dfrac{\partial b}{\partial \theta_i}(\theta)$;

— pour tout $i \in \{1 , \ldots , k\}$, la *variance* de π_i par rapport à P_θ est égale à $\dfrac{\partial^2 b}{\partial \theta_i^2}(\theta)$;

— pour tout couple $(i, j) \in \{1, \ldots, k\}^2$, tel que $i \neq j$, la *covariance* de π_i et π_j, par rapport à P_θ, est égale à $\dfrac{\partial^2 b}{\partial\theta_i\,\partial\theta_j}(\theta)$.

III. *Estimation par maximum de vraisemblance.*

Soit P_0 une probabilité sur $(\mathbf{R}^k, \mathcal{B}^k)$; soit (P_θ) la famille exponentielle (d'ensemble des résultats Ω et ensemble des paramètres Θ) engendrée par P_0, et soit b (application de $\mathbf{R}^k$ dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$) la « fonction de cumul » de sa P_0-représentation canonique (voir II 1°). On suppose que Supp (P_0) n'est contenu dans aucun hyperplan.

On va étudier le problème de l'estimation, en un résultat ω, du paramètre θ par la méthode du maximum de vraisemblance.

1° On appelle fonction convexe à k dimensions toute application f de $\mathbf{R}^k$ dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ vérifiant :

$$\left|\begin{array}{l} (\forall (x^1, x^2) \in (\mathbf{R}^k)^2) \quad (\forall \lambda \in]0,1[) \\ \qquad\qquad f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leqslant \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2), \\ f^{-1}(\mathbf{R}) \neq \varnothing \quad (f^{-1}(\mathbf{R}) \text{ est appelé le } \textit{domaine} \text{ de } f, \text{ et noté } D_f). \end{array}\right.$$

Si de plus la fonction convexe f vérifie :

$$(\forall (x^1, x^2) \in (\mathring{D}_f)^2) \quad (\forall \lambda \in]0,1[) \quad :$$

$$x^1 \neq x^2 \quad \Rightarrow \quad f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) < \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2) \quad ,$$

elle est dite *stricte.*

Démontrer que b est une fonction convexe stricte, de domaine Θ.

2° On rappelle qu'une fonction convexe f est continue sur $\mathring{D}_f \cup \complement \overline{D}_f$; elle est dite *fermée* si elle est semi-continue inférieurement sur $\mathbf{R}^k$, c'est-à-dire vérifie : $\quad (\forall x \in \mathbf{R}^k) \qquad f(x) = \liminf\limits_{x' \to x} f(x')$.

(On rappelle que, pour que $l = \liminf\limits_{x' \to x} f(x')$, il faut que :

$$(\forall l' < l) \quad (\exists \eta > 0) \quad (\forall x' \in \mathbf{R}^k) \quad [\,|x' - x| < \eta \;\Rightarrow\; f(x') \geqslant l'\,])$$

Cette condition équivaut aussi au fait, pour f, d'être enveloppe supérieure des fonctions affines qu'elle majore, c'est-à-dire que, pour tout $x \in \mathbf{R}^k$,

$$f(x) = \sup \{\alpha \in \mathbf{R} \;;\; (\exists y \in \mathbf{R}^k)\,(\forall x' \in \mathbf{R}^k)\; y.(x'-x) + \alpha \leqslant f(x')\} \;.$$

a. Démontrer que, pour qu'une fonction convexe f soit fermée, il suffit qu'elle vérifie :

$$(\forall x \in \mathbf{R}^k) \qquad f(x) \leqslant \liminf_{x' \to x} f(x') \;.$$

b. Démontrer que b est une fonction convexe fermée.

3° Deux fonctions convexes fermées à k dimensions, f et g, sont dites *compatibles* si, et seulement si, elles vérifient :

$$(\forall (x, y) \in (\mathbf{R}^k)^2) \qquad f(x) + g(y) \geqslant x.y \;.$$

a. Démontrer que, pour toute fonction convexe fermée f, l'ensemble des fonctions convexes fermées compatibles avec f est non vide, et admet un plus petit élément, noté f^*.

b. Démontrer que, pour toute fonction convexe fermée f, on a $(f^*)^* \leqslant f$.

Soit l une fonction affine; démontrer, en calculant l^* et $(l^*)^*$, que $l = (l^*)^*$.

En déduire que, pour toute fonction convexe fermée f, on a $(f^*)^* = f$.

On dit que deux fonctions convexes fermées f et g sont *conjuguées* si, et seulement si, elles vérifient $f^* = g$ (ce qui équivaut à $f = g^*$).

c. Démontrer que l'estimation du paramètre par maximum de vraisemblance, en l'observation $\omega \in \Omega$, est, *s'il existe et est unique,* l'élément θ de Θ tel que $b(\theta) + b^*(\omega) = \theta \, . \, \omega$.

4° On sait que l'ensemble des paramètres Θ est égal à D_b, domaine de la fonction convexe b; le but de cette question est de comparer Ω, ensemble des résultats, et D_{b^*}, domaine de la fonction convexe b^*.

On note S la boule unité fermée de $\mathbf{R}^k$; pour tout $x \in \mathbf{R}^k$ et tout $\delta > 0$, $x + \delta S$ désigne la boule fermée de centre x et rayon δ

$$x + \delta S = \{ x' \in \mathbf{R}^k \quad ; \quad |x' - x| \leqslant \delta \}$$

a. Nous allons démontrer que $D_{b^*} \subset \Omega$.

Soit $x_0 \in \complement_{\mathbf{R}^k} \Omega$.

Démontrer qu'il existe $y_0 \in S$, et $\alpha < 0$, tels que, pour tout $\omega \in \Omega$, on ait $y_0 \, . \, (\omega - x_0) \leqslant \alpha$.

Démontrer qu'on a :

$$\lim_{r \to +\infty} [(r y_0) \, . \, x_0 - b(r y_0)] = +\infty.$$

En déduire

$$x_0 \notin D_{b^*} \, .$$

b. Nous allons démontrer que $\mathring{\Omega} \subset D_{b^*}$.

Soit $\omega_0 \in \mathring{\Omega}$.

On rappelle que Ω est l'enveloppe convexe fermée de Supp (P_0); on admet qu'il en résulte qu'il existe Ω', partie *finie* de Supp (P_0), telle que ω_0 appartienne à l'intérieur de l'enveloppe convexe de Ω'.

Soit y un élément de $\mathbf{R}^k$ de norme 1 ; on note :

$H(y)$	l'hyperplan	$\{ x \in \mathbf{R}^k \; ; \; y . x = y . \omega_0 \}$	,
$K^+(y)$	le demi-espace	$\{ x \in \mathbf{R}^k \; ; \; y . x \geqslant y . \omega_0 \}$	,
$K^-(y)$	le demi-espace	$\{ x \in \mathbf{R}^k \; ; \; y . x \leqslant y . \omega_0 \}$	;

pour tout $\omega' \in \Omega'$, on note $d(\omega', y)$ la distance de ω' à $H(y)$

$$\Big(d(\omega', y) = \inf_{x \in H(y)} |\omega' - x|\Big)$$

et on pose

$$d(y) = \min \Big[\max_{\omega' \in K^+(y)} d(\omega', y) \quad , \quad \max_{\omega' \in K^-(y)} d(\omega', y) \Big] \; ;$$

Démontrer que dans ces conditions on a : $d(y) > 0$.

Soit $d_0 = \inf_{|y|=1} d(y)$; démontrer qu'on a : $d_0 > 0$.

Démontrer que, pour tout élément ω de Supp (P_0) et tout $\delta > 0$, on a : $P_0(\omega + \delta S) > 0$.

On pose : $\quad \alpha = \inf_{\omega' \in \Omega'} P_0(\omega' + d_0 S)$.

Démontrer qu'on a : $\alpha > 0$.

Démontrer que, pour tout y de norme 1, on a : $P_0[K^+(y)] \geqslant \alpha$.

En déduire : $\omega_0 \in D_{b^*}$.

c. Démontrer l'égalité $\mathring{D}_{b^*} = \mathring{\Omega}$.

5° On appelle *sous-gradient,* en un point $x \in \mathbf{R}^k$, de la fonction convexe à k dimensions f, la partie de $\mathbf{R}^k$,

$$\partial f(x) = \{ y \in \mathbf{R}^k \quad ; \quad (\forall x' \in \mathbf{R}^k) \qquad f(x') \geqslant f(x) + y\,.\,(x' - x) \} \,.$$

a. Soit $(x, y) \in (\mathbf{R}^k)^2$, et soit (f, g) un couple de fonctions convexes fermées à k dimensions, conjuguées. Démontrer l'équivalence des 3 propositions suivantes :

$$\left|\begin{array}{l} y \in \partial f(x) \quad , \\ f(x) + g(y) = x\,.\,y \quad , \\ x \in \partial g(y) \quad . \end{array}\right.$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante d'existence, en $\omega \in \Omega$, d'une estimation du paramètre par maximum de vraisemblance.

b. Une fonction convexe fermée à k dimensions est dite *douce* si, et seulement si, en tout $x \in \mathbf{R}^k$, $\partial f(x)$ a au plus un élément; on admettra que cette condition équivaut au couple de conditions suivantes :

| pour tout $x \notin \mathring{\mathrm{D}}_f$, $\partial f(x) = \varnothing$,
| pour tout $x \in \mathring{\mathrm{D}}_f$, f est dérivable en x et , $df(x)$ dénotant le gradient de f en x, on a $\partial f(x) = \{df(x)\}$.

Démontrer que, si la fonction convexe fermée f est stricte et douce, il en est de même de f^* (on pourra démontrer, à chaque fois par l'absurde, que f^* est douce, puis que f^* est stricte).

c. On suppose que la fonction b est douce.

Démontrer qu'alors l'estimation par maximum de vraisemblance

| n'est pas définie aux points ω appartenant à la frontière de Ω,
| est définie en tout point ω appartenant à $\mathring{\Omega}$, et vaut $db^*(\omega)$ (dire quelle est alors l'espérance mathématique, par rapport à $\mathrm{P}_{db^*(\omega)}$, de chacune des projections π_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ (voir II 3°)) .

6° Pour chacun des exemples étudiés en II 2°, on demande de :

a. s'assurer que la fonction de cumul est douce,

b. calculer la fonction $(b')^*$,

c. préciser $\mathring{\Omega}'$ et donner la valeur, pour tout $\theta' \in \Theta'$, de $\mathrm{P}'_{\theta'}(\mathring{\Omega}')$,

d. calculer, en tout $\omega' \in \mathring{\Omega}'$, la valeur de l'estimation par maximum de vraisemblance.

RAPPORT SUR L'EPREUVE DE PROBABILITES ET STATISTIQUES

GENERALITES

Ce problème est consacré aux familles exponentielles de Probabilités sur un espace mesurable euclidien. Ces familles exponentielles jouent un rôle essentiel dans toute la Statistique Mathématique, car les structures statistiques où elles interviennent fournissent l'existence d'outils (statistiques exhaustives et complètes, rapports de vraisemblance monotone) qui permettent de construire des procédures statistiques possédant de nombreuses qualités (estimateurs sans biais de variance minimum, tests uniformément plus puissants pour le problème de test unilatéral relatif au paramètre d'une structure exponentielle à une dimension,...) ; nous renvoyons le lecteur intéressé par ces propriétés aux chapitres X et XI de [2].

La définition d'une famille exponentielle est donnée en introdution au problème ; il s'agit d'une famille de probabilités absolument continues par rapport à une mesure σ- finie donnée (ces notions figurent en [3], II, 2° (sous la forme "théorème de Radon-Nikodym") et dont les densités ont une forme remarquable donnée.

Dans la première partie, on s'assure tout d'abord qu'un certain nombre de familles classiques de lois de probabilités sont exponentielles ; les seuls outils nécessaires sont l'absolue continuité et, bien sûr, la connaissance des lois étudiées : binomiale, Poisson, Laplace-Gauss ([4], I, 6e alinéa). On étudie ensuite le comportement des familles exponentielles relativement aux opérations suivantes : changement de mesure de référence, changement de l'espace des paramètres, changement de l'espace des observations ; toutes ces études ne font intervenir que le théorème de Radon-Nikodym et le changement de variable dans les intégrales.

La deuxième partie est consacrée à la génération d'une famille exponentielle par une probabilité (la famille est alors obtenue sous forme d'une représentation dite canonique) ; il s'agit là d'une procédure fort classique, qu'on peut trouver par exemple dans [I], 5, p. 5.4 ; et [2], chap. X, § 2 (où l'on considère, plus généralement, la famille exponentielle engendrée par une "mesure modérée" sur $\mathbb{R}^n$). On donne, pour chacune des familles étudiées en I, une probabilité qui l'engendre ; vérifier, dans chaque cas, qu'il en est bien ainsi, ne fait intervenir aucune notion nouvelle, mais exige une certaine habileté de calcul. On précise ensuite le lien entre les dérivées successives de la "fonction de cumul" de la famille exponentielle engendrée par une probabilité P_0, et les moments des différentes probabilités de cette famille ; il s'agit là d'un résultat bien classique (voir par exemple [2], X, §2, th.2) fondé sur des calculs formellement simples, (dérivations sous le signe somme), mais qui doivent être justifiés ([3], II,3).

La troisième partie, la plus proprement statistique, est consacrée à l'estimation par maximum de vraisemblance ([4], IV, 2e alinéa) du paramètre d'une famille exponentielle ; cette étude est extraite de [I], 6. La recherche de maxima que cette étude nécessite utilise la convexité de la fonction de cumul ; pour démontrer que la fonction de cumul est strictement convexe fermée on utilise des propriétés des espaces L ([3], II, I.), (inégalité de Hölder), et la convergence sous le signe somme ([3], II,3), (théorème de Fatou-Lebesgue). On applique ensuite à la fontion de cumul la théorie des fonctions convexes conjuguées ; on donne ou on fait redémontrer les éléments ici nécessaires de cette théorie (que le lecteur intéressé pourra trouver dans [5], 12). Cette dernière étude nécessite, pour être menée à bien, une réelle aisance dans le maniement de l'analyse.

Partie I

I 1°) 99 candidats à l'agrégation masculine (sur 451 ayant composé en Probabilités et Statistiques) ont obtenu la note 0 à cette épreuve ; ils ont donc arrêtés dès cette première question ; les raisons essentielles semblent être, outre chez certains l'incapacité de lire un énoncé - ici d'assimiler la notion même de famille exponentielle -, l'ignorance des lois de probabilités élémentaires considérées, et l'incompréhension de la notion d'absolue continuité ; en particulier, si la plupart des candidats savent que la probabilité de Laplace-Gauss est "absolument continue" (en oubliant souvent de préciser que c'est par rapport à la mesure de Lebesgue), nombreux sont ceux qui ne savent pas que les probabilités définies sur un ensemble fini ou dénombrable Ω sont toutes absolument continues par rapport à la mesure de dénombrement (cardinalité), la densité p d'une probabilité P par rapport à cette mesure étant donnée par : $(\forall\, \omega \in \Omega)\ p(\omega) = P(\{\omega\})$.

I 2°) a. Tout repose ici sur le caractère strictement positif des densités utilisées ; de nombreux candidats ont été pénalisés pour ne pas l'avoir remarqué.

b. Question facile, en général correctement traitée ; il faut cependant démontrer que b se factorise à travers U, ce qui résulte de l'égalité (due au fait que, pour tout θ, P_θ est une probabilité): $b(\theta) = \log \int_{\mathbb{R}^k} \exp\,[T(\omega).U(\theta) - a(\omega)]\ p(d\omega)$; ceci entraîne que U est un codage compatible avec la famille (P_θ), et permet d'introduire b', fonction de cumul de la famille codée (application de Θ' dans $\mathbb{R}$, telle que $b = b' \circ U$) ; un certain manque de contrôle dans la rédaction (confusion entre b et b', absence de précision sur les espaces de départ et d'arrivée des applications en jeu) rend, dans d'assez nombreuses copies, ce passage très confus.

c. La plupart des candidats ne savent pas, étant données deux probabilités P et μ, définies sur un même espace (Ω, α), (P absolument continue par rapport à μ), et une application T, mesurable de (Ω, α) dans (Ω', α'), exprimer f', densité de ${}^T P$ par rapport à ${}^T\mu$(${}^T P$ et ${}^T\mu$ sont les images de P et μ par l'application T) en fonction de f, densité de P par rapport à μ : cette densité f' est l'espérance conditionnelle de f, relativement à la mesure μ, et par rapport à l'application T. L'ignorance de ce résultat est sans gravité, si on se ramène, grâce à a), au cas où la famille exponentielle est de type nul ; en effet alors toutes les densités f_θ des probabilités P_θ par rapport à la mesure de référence μ se factorisent à travers T ; on a $f_\theta = f'_\theta \circ T$, et on peut vérifier directement (simple calcul de changement de variable dans les intégrales) que f'_θ est la densité ${}^T P_\theta$ par rapport à ${}^T\mu$; plusieurs candidats, ne songeant pas à se ramener à une famille de type nul, mais voyant que cela les arrangeait, ont affirmé que (ou fait "comme si"), dans le cas général, la densité f_θ se factorise à travers T, ce qui est évidemment faux.

Partie II

II 1°) Pour que $b(y)$ soit fini, il faut et il suffit que $\exp b(y)$ le soit ; la convexité de l'ensemble des y tels que $\exp b(y)$ est fini est alors une conséquence immédiate de la convexité de l'exponentielle ; des candidats ayant voulu démontrer ici la convexité de l'application b qui n'est demandée qu'en III 1°) ont commis des erreurs que nous analysons plus loin.

II 2°) Pour être lisible par les correcteurs, cette question exige une rédaction et une présentation claire des résultats (avec respect des notations de l'énoncé !) qui font souvent défaut ; certains ont semblé trouver difficiles les calculs suivants :

en d. retrouver la loi du κ^2 à un degré de liberté à partir de la loi de Laplace-Gauss de dimension 1 (transformation de la densité par l'application $x \rightsquigarrow x^2$).

en e. intégrer par rapport à la probabilité P_{δ}, définie sur $(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}^2)$ mais concentrée sur la parabole d'équation $x_2 = \frac{1}{2}(x_1)^2$ [on a évidemment, P_{δ}^1 désignant ici la première projection de P_{δ} : $\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2)\, P_{\delta}(dx_1,dx_2) = \int_{\mathbb{R}} f(x_1,\frac{1}{2}(x_1)^2)\, P_{\delta}^1(dx_1)$, égalité que les candidats qui en font usage omettent de justifier ; la justification la plus simple est bien sûr la P_{δ} - $p.s.$ égalité des applications f et $(x_1,x_2) \rightsquigarrow f(x_1, \frac{1}{2}(x_1)^2)$].

II 3°) a. Cette question n'a été que très exceptionnellement correctement traitée ; les correcteurs se satisfaisaient cependant d'une démonstration correcte de la dérivabilité à l'ordre 1, par rapport à la variable θ_1 (le cas d'un ordre supérieur ne faisant pas appel à des arguments nouveaux) ; mais il fallait au moins :

- énoncer correctement qu'on devait trouver, pour tout $\theta^o \in \overset{o}{\Theta}$, un voisinage V_{θ^o} de θ^o, contenu dans $\overset{o}{\Theta}$, et une application M_{θ^o}, P_o- intégrable, de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}_+$, de telle sorte que, pour tout $\theta \in V_{\theta^o}$, M_{θ^o} domine $\frac{\partial b}{\partial \theta_1}(\theta)$;

- présenter les principes de la construction de M_{θ^o} (on peut, étant donné $\varepsilon > 0$ tel que $\prod_{i=1}^{k} [\theta_i^o - \varepsilon, \theta_i^o + \varepsilon] \subset \overset{o}{\Theta}$, prendre $V_{\theta^o} = \prod_{i=1}^{k}[\theta_i^o - \frac{\varepsilon}{2}, \theta_i^o + \frac{\varepsilon}{2}]$ et choisir $L \geqslant 1$ tel que, pour tout $x \geqslant L$, on ait $x \leqslant e^{x\frac{\varepsilon}{2}}$; on peut alors définir M_{θ^o} par :

$$\text{pour } |x_1| > L, \qquad M_{\theta^o}(x_1, \ldots, x_k) = \prod_{i=1}^{k} \exp\left[x_i\left(\theta_i^o + sgn(x_i)\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]$$

$$\text{pour } |x_1| \leqslant L, \qquad M_{\theta^o}(x_1, \ldots, x_k) = |x_1| \prod_{i=1}^{k} \exp\left[x_i\left(\theta_i^o + sgn(x_i)\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]$$

Les correcteurs ont souvent regretté que les candidats n'aient pas préféré ne pas traiter cette question plutôt que de fournir de fausses justifications de dérivabilité sous le signe somme ; ils tiennent à insister sur la gravité des lacunes que l'on rencontre ici chez presque tous les candidats (même fort bons par ailleurs).

Partie III

III 1°) La convexité de la fonction b est une conséquence directe de l'inégalité de Hölder (ou de l'inégalité de Schwartz si on se contente de démontrer que

$$[\ \forall (x^1,x^2) \in (\overset{o}{D} f)^2\ ] \qquad b\left(\frac{x^1 + x^2}{2}\right) \leqslant \frac{b(x^1) + b(x^2)}{2}$$

ce qui est licite à condition de s'assurer que b est continue) ; de nombreux candidats ont cru démontrer cette convexité de proche en proche, en utilisant successivement la convexité de la fonction exponentielle, la linéarité et positivité de l'intégrale, puis enfin la "convexité" de la fonction logarithme (qui est évidemment concave !).

Peu de candidats ont vu l'importance, pour la **stricte** convexité de b, de l'hypothèse "Supp (P_o) n'est contenu dans aucun hyperplan" ; or, étant données 2 fonctions f et g, P_o - intégrables, et deux nombres réels p et q, strictement supérieurs à 1, tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, l'"égalité de Hölder" $\int_{\mathbb{R}^k} |f(x)\, g(x)|\, P_o(dx) = \left(\int_{\mathbb{R}^k} |f(x)|^p\, P_o(dx)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^k} |g(x)|^q\, P_o(dx)\right)^{\frac{1}{q}}$ équivaut à la P_o- presque sûre égalité de f et g, autrement dit, si f et g sont continues, à leur coïncidence sur Supp (P_o) ; ici où on applique l'inégalité de Hölder à $f(x) = e^{\lambda(x.y^1)}$ et $g(x) = e^{\lambda(x.y^2)}$, cette condition équivaut au fait pour Supp (P_o) d'être contenu dans l'hyperplan $\{x \in \mathbb{R}^k ; x.(y^1 - y^2) = 0\}$ ce qui est contraire à l'hypothèse faite.

III 2°) Question rarement abordée, mais les candidats qui y sont arrivés ont en général su voir que l'inégalité $b(y) \leqslant \liminf_{y' \to y} b(y')$ est vérifiée en vertu du théorème de Fatou-Lebesgue, appliqué à une suite de fonctions positives $x \rightsquigarrow e^{y_n \cdot x}$ (où $\lim_{n \to \infty} y_n = y$) (on a en effet alors

$$\int_{\mathbb{R}^k} (\liminf_{n \to \infty} e^{y_n \cdot x}) \, P_0 \, (dx) < \liminf_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^k} e^{y_n \cdot x} \, P_0 (dx) \quad).$$

III 3°) Ceux des candidats qui ont essayé de traiter cette question ont souvent échoué faute d'avoir d'avoir su effectuer le calcul, pourtant facile, qui permet d'obtenir l^* (si $y \neq y_0$, $l^*(y) = +\infty$; $l(y_0) = \alpha$).

III 4°) à 6°) Ces questions n'ayant été que très rarement abordées, nous renvoyons le lecteur intéressé à l'ouvrage [1], 6, d'où elles ont été extraites.

CONCLUSION

Mise à part l'ignorance de nombre d'entre eux sur certaines notions de base du calcul des probabilités (lois fondamentales en particulier) il semble que les candidats aient surtout éprouvé des difficultés dues à leur manque de maîtrise des méthodes de l'analyse (dérivation sous le signe somme, par exemple) et à leur maladresse dans la conduite de calculs pourtant élémentaires.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARNDORFF NIELSEN O. *Exact exponential families* Varions Publications Series, 19, Mathematisk Institut, Aarhus Universitet, 1971.

[2] BARRA J.R. *Notions fondamentales de Statistique Mathématique* Dunod, Paris, 1971.

[3] PROGRAMMES des épreuves écrites et orales des Agrégations de Mathématiques (candidats et candidates) pour la session de 1970, *Composition d'Analyse*, Note du 24 Septembre 1969 ; *Bull. Off. Ed. Nat.* n° 37 (2-10-1969) (reconduits pour 1973).

[4] PROGRAMMES des épreuves écrites et orales des Agrégations de Mathématiques (candidats et candidates) pour la session de 1970, *Probabilités et Statistiques*, note du 24 Septembre 1969, *Bull. Off. Ed. Nat.* n° 37 (2-10-1969) (reconduits pour 1973).

[5] ROCKAFELLAR R.T. *Convex Analysis*, Princeton University Press 1970.

RENSEIGNEMENTS STATISTIQUES

Agrégation masculine :
Nombre de copies corrigées : 451
Moyenne : 10,9 sur 40
Quantiles supérieurs :
- d'ordre 2 (médiane): 10 (223 notes ⩾ 10)
- d'ordre 3 : 14 (156 notes ⩾ 14)
- d'ordre 4 : 17 (119 notes ⩾ 17)
- d'ordre 5 : 19 (92 notes > 19)

Agrégation féminine :
Nombre de copies corrigées : 264
Moyenne : 11,56 sur 40
Quantiles supérieurs :
- d'ordre 2 (médiane) : 10 (134 notes > 10)
- d'ordre 3 : 15 (92 notes > 15)
- d'ordre 4 : 18 (71 notes > 18)
- d'ordre 5 : 20 (59 notes > 20)

Répartition des notes par classes d'amplitude 5 :

	0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40
Candidats	99	77	61	88	52	41	10	17	6
Candidates	51	39	42	44	36	25	17	7	3

(Candidats : 2 copies ont obtenu la note 40)
(Candidates : une note 40, une note 38, une note 37).

AGREGATION HOMMES

RAPPORT SUR LES EPREUVES DEFINITIVES (ORAL)

I. EPREUVE D'ANALYSE - TRIGONOMETRIE - MECANIQUE

I 1. OBSERVATIONS GENERALES

Le jury a constaté que nombre de candidats n'ont pas compris la nature exacte des exposés d'oral, ni même assimilé les dispositions réglementaires les concernant :

- trop de plans sont précédés d'introductions inutiles se résumant, soit à un verbiage intempestif, soit à des rappels excessivement longs, de sorte que le jury est amené à demander de résumer des résultats importants ou cruciaux ;

- trop de plans sont situés à un niveau plus qu'élémentaire, et même alors sont incomplets ;

- trop de plans apparaissent comme un recopiage stérile de sources extérieures, alors qu'un nombre croissant d'exposés demande un sérieux effort de synthèse ;

- trop de plans ne peuvent être présentés en entier, car le candidat s'obstine à écrire au tableau chaque mot qu'il prononce.

Bien que beaucoup de sujets proposés comportent dans leur intitulé les mots "exemples", "contre-exemples", "applications"..., l'absence quasi-systématique d'illustrations montre que les candidats n'atteignent pas en général un niveau satisfaisant d'assimilation des notions les plus élémentaires (ainsi, dans l'exposé : *"Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries à termes réels"*, des candidats indisposent le jury en se limitant à une étude générale des séries à termes réels) ; il convient de rappeler que, dans la plupart des ouvrages figurant à la bibliothèque de l'agrégation, des exemples et contre-exemples intéressants figurent dans les listes d'exercices, rarement étudiées - semble-t-il - par les candidats. D'autre part, l'emploi d'une terminologie se référant à la situation la plus générale n'est souvent qu'un simpliste camouflage d'ignorances graves et répétées : le jury ne peut que s'étonner de voir des candidats citer un théorème concernant les espaces de Banach, sans pouvoir un instant l'appliquer aux espaces $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$. Le jury rappelle également que les candidats sont *tenus* de proposer un certain nombre (au moins deux) de points de leur plan pour l'exposé, et s'alarme de la masse considérable de démonstrations qui ne peuvent être achevées sans son intervention.

Les examinateurs ont constaté que rares sont les candidats qui exploitent des connaissances certainement assimilées pour l'écrit concernant l'intégration, les fonctions analytiques, les séries de Fourier. Le jury attire l'attention des candidats sur les nombreuses confusions constatées entre les notions de valeur d'adhérence d'une suite, point d'accumulation etc.

- Signalons aussi que les candidats n'ont pas su, en général, profiter des remarques du rapport d'agrégation 1972 au sujet des équations différentielles linéaires à coefficients constants : la plupart des exposés portant sur ce sujet, ou sur des sujets voisins, sont extravagants, et comportent d'énormes erreurs sur la réduction des matrices, les blocs de Jordan, la description de bases d'espaces de solutions, etc.

- Signalons encore que - à quelques exceptions près - des exposés de géométrie différentielle se limitent à la mise en place des notions primitives (arc paramétrique, arc géométrique, arc géométrique orienté etc.) et n'abordent que de façon très épisodique les sujets proposés.

- Signalons enfin que la désaffection pour les sujets de cinématique conduit quelques candidats à s'imposer des exposés qu'ils ne peuvent maîtriser ; l'exposé *"Mouvement à accélération centrale"* pour classique qu'il soit, n'a manifestement pas inspiré certains des candidats qui l'ont choisi, et qui n'ont pas jugé utile, par exemple, de s'intéresser au cas pourtant important de l'attraction newtonienne ; l'exposé *"Cinématique du solide ; exemples"* ne saurait être un prétexte à une logorrhée sur la "nature du temps" et sur les angles d'Euler, exclusivement.

I 2. REMARQUES PARTICULIERES

Le jury renvoie le lecteur aux observations formulées dans les rapports des années précédentes, et tient à insister plus spécialement sur les exposés concernant les notices de topologie.

Les examinateurs ont constaté, et s'en alarment, que la notion de valeur d'adhérence d'une suite donne lieu à de très fréquentes et graves erreurs : une valeur d'adhérence n'est ni un point d'accumulation de suite, ni un point adhérent à l'image de la suite ; en outre, il ne s'agit d'une limite de suite extraite que dans le cas où le point en question a une base dénombrable de voisinages : il en est bien ainsi dans les espaces métriques. A ce propos, le jury conseille aux candidats n'ayant pas une pratique suffisante des topologies non métrisables, de se limiter aux espaces métriques.

Certains candidats semblent peu familiers avec l'utilisation des suites pour exprimer une propriété de limite (ou sa négation), ceci dans les espaces les plus élémentaires ; ce devrait être pourtant un réflexe naturel que d'exprimer le fait que f, application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ne tend pas vers 0 en $+\infty$, en affirmant l'existence d'une suite réelle x_n telle que : $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, et d'un réel $a > 0$ tels que : $|f(x_n)| \geqslant a$ pour tout n.

Par ailleurs, des candidats confondent souvent les notions de distances équivalentes, uniformément équivalentes, topologiquement équivalentes (par exemple, l'existence d'une distance bornée uniformément équivalente à une distance donnée est ignorée), mais ne savent pas expliquer efficacement que ces notions se confondent pour des distances associées à des normes.

L'exposé *"Propriétés topologiques des espaces $\mathbb{R}^n$ et leur utilisation en analyse"* ne doit pas être assimilé à l'exposé *"Espaces vectoriels normés de dimension finie"*. Pour le premier, il semble nécessaire de donner une définition intrinsèque de la topologie de $\mathbb{R}^n$, ainsi que de la notion de partie bornée, et, également de connaître la structure des parties ouvertes (resp. ouvertes et connexes) de $\mathbb{R}^n$, de citer des exemples non triviaux de parties compactes de $\mathbb{R}^n$ etc. Pour le second, outre le théorème d'équivalence des normes et le théorème de Riesz, on peut s'intéresser aux propriétés géométriques des boules, par exemple aux rapports entre norme et jauge d'une partie convexe symétrique compacte d'intérieur non vide, éventuellement aussi aux liens avec le caractère différentiable de la norme aux points distincts de l'origine.

Dans plusieurs exposés *(applications continues ; espaces topologiques produits,* etc.) les candidats omettent l'importante caractérisation des applications continues à but produit. L'exposé *"Limites"*, même placé à un niveau élémentaire, doit comporter d'autres notions que celle de limite d'une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, en un point : en particulier, limites de suites, numériques ou non. On peut également y évoquer les familles sommables, les sommes de Reimann ou de Darboux, les limites au sens de Césaro, les limites inférieures ou supérieures, et donner un théorème correct et efficace d'interversion des limites, etc.

L'exposé *"Exemples d'espaces vectoriels normés et d'espaces de Banach ; sous-espaces denses"* a été en général fort mal traité ; les théories classiques de l'intégration et de l'analyse fonctionnelle fournissent pourtant de très nombreux exemples ; la séparabilité des espaces de Banach, le plongement isométrique d'un Banach dans son bidual, les espaces de Banach quotients, le prolongement des formes linéaires continues définies sur un sous-espace dense, les utilisations les plus élémentaires du théorème de Stone-Weierstrass (polynômes, polynômes trigonométriques,..) l'emploi de sous-espaces denses pour la démonstration de résultats simples et classiques (par exemple le théorème de Reimann-Lebesgue) sont ignorés ; enfin les candidats sont fort surpris quand on leur demande de quelle norme "raisonnable" il faut munir un espace d'applications pour en faire un espace de Banach (par exemple $C^1([0,1] ; \mathbb{R})$...).

L'exposé *"Fonctions réelles d'une variable réelle ; continuité, dérivabilité"* ne doit pas se limiter à un catalogue plus ou moins exhaustif des propriétés générales des fonctions continues ou dérivables, transcrites dans le cas réel. En outre, pour y insister, "dérivable" ne signifie pas "une fois dérivable". On pourra donc s'intéresser par exemple aux points de continuité (et éventuellement de dérivabilité) des fonctions monotones (et donc, des fonctions à variation bornée) des fonctions convexes, ou réglées, ou lipschitziennes, etc. ; aux points de continuité d'une limite simple d'une suite de fonctions continues ; aux rapports entre le caractère C^∞ et l'analyticité ; aux fonctions dérivées (intégrabilité, propriété de Darboux,...), etc.

Pour l'exposé *"Définition et propriétés de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels"*, certains candidats ont, en général, selon la méthode employée, commis l'une ou l'autre des erreurs suivantes :

- considérer $\mathbb{Q}$ comme espace métrique, avant d'avoir construit $\mathbb{R}$;

- ignorer la définition exacte d'un corps valué, d'une valeur absolue sur un corps (il s'agit d'une application dont le but est $\mathbb{R}_+$, et non l'ensemble des positifs du corps, quand il est ordonné).

En outre, les candidats ont souvent cité des théorèmes inexacts en ce qui concerne l'unicité de $\mathbb{R}$ "à un isomorphisme près", et omis d'analyser l'importance de l'exigence : "être archimédien". Toutefois, un candidat montre correctement qu'un groupe ordonné archimédien se plonge dans $\mathbb{R}$ par un prolongement de groupe ordonné.

Quant à l'exposé *"Topologie de la droite numérique $\mathbb{R}$; droite numérique achevée"*, il nécessite la mention préalable du mode de construction choisi pour $\mathbb{R}$, et le plan se doit d'être cohérent avec ce choix.

L'exposé *"Les différentes notions de convergence d'une suite ou d'une série des fonctions ; exemples"* a été souvent mal traité. Signalons qu'outre les notions de convergence simple (resp. uniforme), il existe d'autres notions de convergence utilisées couramment en analyse : la convergence uniforme sur un ensemble de parties de l'ensemble source, la convergence en moyenne, la convergence presque partout, la convergence au sens de Césaro... Trop de candidats affirment, sans hypothèse sur l'espace topologique de départ (locale compacité ; métrisabilité) qu'une limite uniforme sur tout compact d'une suite d'applications continues est continue. Pour les séries de fonctions, il est indispensable d'analyser de façon précise les rapports entre convergence normale, absolue, uniforme, et de donner des exemples et contre-exemples ne portant pas exclusivement sur les séries entières. Enfin, le jury rappelle qu'il est faux qu'une suite qui converge en moyenne, converge presque partout.

Les énoncés du théorème des fonctions implicites, outre ceux qui sont inexacts, pèchent souvent par une formulation maladroite ne mettant pas en évidence l'unicité locale de la fonction implicite et sa continuité. Quant aux applications géométriques du théorème des fonctions implicites, trop de candidats se limitent à parler de la tangente en un point d'une courbe définie par une équation $f(x,y) = 0$ (et s'avèrent parfois incapables de traiter un exemple qu'ils ont eux-mêmes choisi) ; il est souhaitable que soient évoqués le plan tangent à une surface définie par une équation $f(x,y,z) = 0$ et la tangente à une courbe intersection de deux surfaces.

Dans les problèmes de changement de variable, le jury considère comme un minimum exigible que les candidats sachent expliquer correctement un "passage en coordonnées polaires".

Dans l'exposé *"Fonction $x \to e^{ix}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Nombre π. Notion d'argument d'un nombre complexe"*, le jury s'étonne de ne voir pratiquement aucun candidat donner un sens précis à l'expression "suivre par continuité l'argument d'un nombre complexe le long d'une courbe", a fortiori énoncer des résultats simples et positifs sur les déterminations continues de l'argument dans un ouvert de $\mathbb{C}$. Le jury ne saurait exiger, à l'occasion de cet exposé, des considérations sur la question délicate de la mesure des angles.

Méthodes pratiques de recherche des primitives et de calcul des intégrales.
Le jury a trop souvent obtenu une liste de recettes, dont certains candidats n'imaginent pas qu'elles puissent se rattacher à une théorie précise et générale ; il rappelle par ailleurs qu'il existe d'autres méthodes de calcul de certaines intégrales que le recours aux primitives.

Opérations sur les séries à termes réels ou complexes
En plus des opérations algébriques usuelles et du changement de l'ordre des termes, le jury souhaiterait que soient abordés les problèmes liés à la sommation par paquets (associativité, associativité restreinte..), à la transformation d'Abel, ainsi que des considérations sur les procédés de sommation (Césaro, Abel,...).

Répartition des notes :

Les notes des 320 candidats ayant participé à l'épreuve orale d'analyse se répartissent comme suit :

$n \leqslant 10$	$11 \leqslant n \leqslant 20$	$21 \leqslant n \leqslant 30$	$31 \leqslant n \leqslant 40$	$41 \leqslant n \leqslant 50$	$51 \leqslant n \leqslant 60$	$61 \leqslant n \leqslant 70$	$71 \leqslant n \leqslant 80$
33	63	64	66	45	30	14	5

I 3. LISTE DES SUJETS D'ANALYSE

1. *Espaces compacts – Applications.*
2. *Application à l'analyse de la notion de compacité.*
3. *Espaces métriques complets. Théorème du point fixe.*
4. *Espaces métriques complets ; espaces métriques compacts. Comparaison des deux théories.*
5. *Produit d'espaces topologiques. Exemples et applications diverses.*
6. *Espaces connexes. Applications à l'analyse.*
7. *Suites numériques. Limite, limite supérieure, limite inférieure.*
8. *Etude, sur des exemples, de divers types de suites définies par une relation de récurrence.*
9. *Utilisation des suites en topologie.*
10. *La notion d'espace vectoriel normé et son utilisation en analyse ou en géométrie.*
11. *Espace vectoriel normé de dimension finie.*
12. *Définition et propriétés de l'ensemble des nombres réels.*
13. *Approximation d'un nombre réel par des rationnels.*
14. *Propriétés topologiques de $\mathbb{R}^n$ et leur utilisation en analyse.*
15. *Limites.*
16. *Applications continues.*

17. *Fonctions croissantes.*

18. *Fonctions réciproques. Fonctions implicites.*

19. *Fonctions implicites. Applications géométriques.*

20. *Fonctions convexes d'une ou plusieurs variables réelles. Inégalités de convexité.*

21. *Continuité, dérivabilité, intégrabilité de la somme d'une suite de fonctions d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.*

22. *Les différentes notions de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions. Exemples.*

23. *Exemples d'utilisation du critère de convergence de Cauchy (suites, séries, fonctions, intégrales).*

24. *Dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables ; changement de variables ; exemples.*

25. *Fonctions de plusieurs variables réelles ; formule des accroissements finis, formule de Taylor ; applications.*

26. *Applications de classe $\mathbb{C}^k$ d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.*

27. *Les différentes formules de Taylor.*

28. *Application des formules des accroissements finis et de Taylor aux problèmes de calcul numérique.*

29. *Application du calcul différentiel aux problèmes d'extremum.*

30. *Comparaison de fonctions au voisinage d'un point.*

31. *Applications de la méthode des développements limités ou asymptotiques.*

32. *Fonction logarithmique, fonction exponentielle d'une variable réelle.*

33. *Fonction exponentielle complexe.*

34. *Extension de la notion de fonction exponentielle.*

35. *Fonctions circulaires directes et inverses.*

36. *Prolongement de fonctions ; exemples.*

37. *Intégration des fonctions d'une variable réelle.*

38. *Primitives et intégrales.*

39. *Méthodes pratiques de recherche et de calcul des intégrales.*

40. *Intégrales impropres ; exemples.*

41. *Fonctions définies par une intégrale. Exemples.*

42. *Intégrale curviligne.*

43. *Calcul approché d'une intégrale.*

44. *Séries à termes réels ou complexes. Exemples.*

45. *Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries à termes réels.*

46. *Liaison entre la théorie de l'intégrale et la théorie des séries numériques.*

47. *Opérations sur les séries à termes réels ou complexes.*

48. *Séries entières.*

49. *Méthodes de développement d'une fonction en série entière. Exemples.*

50. *Série de Taylor.*

51. *Calcul approché de la somme d'une série.*

52. *Exemples de problèmes d'interversion de limites en analyse (séries, intégrales,...).*

53. *Fonction $x \to e^{ix}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Nombre π. Module et argument d'un nombre complexe.*

54. *Equations différentielles linéaires. Exemple.*

55. *Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.*

56. *Equations différentielles linéaires à coefficients constants.*

57. *Exemples de problèmes géométriques résolus à l'aide d'équations différentielles.*

58. *Surface, plan tangent . Exemples.*

59. *Etude locale des courbes, propriétés affines. Exemples.*

60. *Etude locale des courbes, propriétés métriques. Exemples.*

61. *Tracé des courbes planes définies par $\overrightarrow{OM} = \vec{f}(t)$. Exemples.*

62. Tracé des courbes planes définies en coordonnées polaires par $\rho = f(\theta)$. Exemples.

63. Application de la théorie des développements limités ou asymptotiques au tracé des courbes planes.

64. Courbure et centre de courbure en un point d'une courbe plane. Développée, développantes.

65. Mouvement à accélération centrale.

66. Mouvement relatif. Changement de repère. Application.

67. Cinématique du solide. Exemples.

68. Mouvement d'un repère orthonormé. Application à la théorie métrique des courbes gauches et à la cinématique du solide.

69. Mouvement d'un plan sur un plan.

70. Fonction différentiable.

71. Espace métrique. Complété d'un espace métrique.

72. Topologie de la droite numérique $\mathbb{R}$. Droite numérique achevée.

73. Exemples d'espaces vectoriels normés et d'espaces de Banach, sous-espaces denses.

74. Théorème du point fixe. Applications.

75. Fonction réelle d'une variable réelle ; continuité, dérivabilité.

II. EPREUVE D'ALGEBRE ET GEOMETRIE

II 1. OBSERVATIONS GENERALES

Peut-être est-il bon de commencer par rappeler deux observations qui figuraient déjà dans le rapport sur le concours de 1972 :

- Le candidat doit savoir que si une grande liberté lui est laissée dans la détermination du niveau auquel il se place, il faut qu'il se montre capable de dominer les programmes des classes secondaires et préparatoires ; le jury se réserve le droit d'interroger sur toute question figurant dans l'un de ces programmes dans la mesure, naturellement, où elle est en rapport avec le sujet traité.

- Le jury a déploré à nouveau une désaffection certaine pour la géométrie, bien que quelques candidats aient obtenu une note brillante dans cette discipline. Cette désaffection constitue un risque grave, car des couplages de sujets de géométrie, empruntés à des chapitres différents, ont été donnés et continueront à être donnés au cours des prochains concours.

Les modalités pratiques de l'épreuve sont maintenant bien connues des candidats qui savent en particulier qu'ils disposent, pour exposer leur plan, de quinze à vingt minutes au maximum, et que, d'autre part, le plan doit tenir tout entier dans le tableau, de façon que, sans perte de temps, les examinateurs puissent éventuellement obtenir telle ou telle précision.

Le jury souhaiterait que, dès l'exposé du plan, le candidat montre ses qualités pédagogiques dans la mise en valeur des idées, qu'il s'efforce d'être audible, d'être lisible et de ne pas cacher ce qu'il écrit ; beaucoup de lapsus auraient pu être évités par des candidats trop esclaves de notes qu'ils lisaient sans réfléchir.

Beaucoup de leçons où se pose un problème de classification (espaces vectoriels et leurs structures, corps finis, groups abéliens libres, etc.) ont souffert d'une mauvaise présentation: il y a intérêt à bien dégager les objets mathématiques et les isomorphismes entre ces objets pour ensuite les classifier. Dans le même ordre d'idées, l'introduction d'une théorie telle que celle du corps des fractions d'un anneau intègre ou du complexifié d'un espace vectoriel serait facilitée par la formulation d'un problème universel.

S'il faut bien entendu éviter toute incohérence dans le plan, il faut aussi proscrire les définitions trop générales qu'on ne pourra suffisamment illustrer et utiliser. Ce rapport n'est pas exhaustif, et les exemples qu'il contient ne doivent pas nécessairement être tous familiers aux candidats ; cependant chaque leçon devrait être une occasion de se montrer curieux à l'égard des applications et des développements éventuels.

II 2. REMARQUES PARTICULIERES A PROPOS DE CERTAINES LECONS

Groupes. Dans la leçon sur les générateurs de groupes, beaucoup de candidats ont négligé l'étude des groupes abéliens libres et n'ont pas vu que deux groupes abéliens libres du type fini ont le même nombre de générateurs indépendants. Beaucoup de candidats ignorent encore la décomposition des permutations en cycles et le calcul commode de la signature qui en résulte ; quelques-uns se sont montrés incapables de définir correctement un cycle.

Les leçons sur les groupes opérant sur un ensemble et sur les générateurs de groupes méritaient d'être davantage illustrées par des exemples empruntés à la géométrie (groupe des isométries dans un espace euclidien, groupe affine de la droite, groupe des homographies, etc.).

Il n'est pas mauvais, par ailleurs, de connaître quelques exemples non triviaux de groupes.

Anneaux, corps. Peu d'exemples originaux ont été cités sur les questions de caractère général telles que corps fini, extension quadratique d'un corps fini, corps algébriquement clos ; les candidats auraient pourtant pu en trouver dans les ouvrages mis à leur disposition.

Comme exemples d'anneaux principaux autres que $\mathbb{Z}$ et $K[X]$, on peut citer les sous-anneaux de $\mathbb{Q}$ formés de fractions de la forme a/b où b n'est pas divisible par un nombre premier p fixé à l'avance (ou des anneaux du même genre). On peut aussi étudier la structure des idéaux d'anneaux du type $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, bien que ces anneaux ne soient pas intègres, etc.

Dans la leçon sur la numération, la référence à l'anneau des nombres décimaux, dont on souhaitait voir commenter la structure, invitait plus généralement à poser le problème de la représentation d'un nombre réel et à caractériser par sa périodicité le développement décimal illimité d'un nombre rationnel.

Nombres premiers. L'étroitesse apparente du sujet ne doit pas effrayer les candidats. Il y a matière à approfondissement dans plusieurs directions : théorèmes de Fermat et de Wilson, structure des groupes abéliens finis et des anneaux du type $\mathbb{Z}/(n)$, répartition des nombres premiers, aperçu historique de la théorie des idéaux, etc.

Polynômes, fractions rationnelles. Nombreux sont les candidats qui ne savent pas que le quotient de l'algèbre de polynômes $K[X]$ par l'idéal principal engendré par un polynôme irréductible est un corps. La structure des algèbres quotients de $\mathbb{R}[X]$ n'a pas non plus suscité la curiosité bien qu'elle intervienne lorsqu'on présente aux élèves les nombres complexes par $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$.

Dans l'étude des polynômes et des séries formelles on rencontre des questions de valuation intéressantes. La recherche des idéaux et même celle des éléments inversibles de l'algèbre des séries formelles ont été bien souvent laborieuses.

Le langage des anneaux factoriels permet de mieux conceptualiser un certain nombre de résultats ; il est l'introduction naturelle aux polynômes à plusieurs indéterminées ; c'est à cette occasion, que l'on peut voir des exemples d'anneaux non principaux où existent P.G.C.D. et P.P.C.M., (l'identité de Bezout ne s'appliquant néanmoins qu'aux anneaux principaux).

Peu de candidats ont choisi la leçon sur le résultant et l'élimination. La question de l'irréductibilité du résultant aurait mérité d'être plus approfondie.

Algèbre linéaire. Le jury attendait des candidats, sur des leçons d'aspect théorique facile, une richesse en exemples qui a un peu manqué. Une leçon "simple" comme celle sur les sous-espaces d'un espace vectoriel aurait gagné à être reliée à d'autres chapitres de l'algèbre et de l'analyse. Par exemple : étude du dual d'un sous-espace, applications linéaires entre espaces vectoriels exprimés comme somme directe de sous-espaces et matrices en bloc associées, formes quadratiques sur une somme orthogonale, solutions d'équations différentielles, etc.

La réduction des applications linéaires $f : E \longrightarrow F$ entre espaces vectoriels de dimension finie n'a été trop souvent traitée que dans le cas $E = F$. Il est pourtant utile, en particulier dans des problèmes de rangs, de savoir qu'il existe des bases de E et de F telles que la matrice de f s'écrive :

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nombreux sont les candidats qui n'ont pas su exploiter la complexification pour obtenir des résultats sur les endomorphismes réels (réduction des matrices orthogonales, etc.). Il y a là pourtant un domaine intéressant où interfèrent la commodité du corps des complexes et des questions de géométrie.

L'aspect topologique de l'algèbre linéaire (quand le corps de base est le corps des réels ou celui des complexes) a été aussi négligé. Le fait que l'exponentielle d'une matrice soit une fonction continue de cette matrice n'a pas été perçu. Bien peu de candidats ont aussi remarqué la compacité du groupe orthogonal et du groupe unitaire ou se sont posés des questions sur la connexité des groupes linéaire, orthogonal, unitaire.

Formes bilinéaires et formes quadratiques - Dualité. Le langage commun aux formes bilinéaires symétriques et antisymétriques n'a pas été suffisamment dégagé. Il en est ainsi par exemple des notions de rang et d'orthogonalité, des réductions et passages au quotient du type $L^{\perp}/L$, lorsque L est totalement isotrope.

L'intérêt de la notion de dualité est mal perçu : réduction des endomorphismes par la recherche des sous-espaces stables de dimension 1 ou de codimension 1, démonstration du théorème de l'invariance du rang par transposition. Voici un autre exemple :
Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps commutatif K muni d'une involution $\lambda \to \overline{\lambda}$. On note ${}^tE$ (resp. ${}^tF$) le K-espace vectoriel des formes sur E(resp. F) **antilinéaires**, c'est-à-dire additives et satisfaisant à l'identité $u(\lambda x) = \overline{\lambda} u(x)$; cela permet de définir sur E(resp. F) une forme **hermitienne** φ (resp. ψ) ; on note $\widetilde{\varphi} : E \to {}^tE$ (resp. $\widetilde{\psi} : F \to {}^tF$) l'application linéaire associée à φ (resp. ψ) ; on suppose φ non dégénérée.

De toute application linéaire $f : E \to F$, on a déjà déduit sa **transposée** ${}^t f : {}^t F \to {}^t E$; on peut maintenant définir **l'adjointe** f^* de f grâce au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & {}^t E \\ {\scriptstyle f^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle {}^t f} \\ F & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & {}^t F \end{array}$$

Dans le même ordre d'idées, il arrive que l'on confonde les notions de matrices congruentes et de matrices semblables. Or, alors que, (d'après la réduction des formes quadratiques), toute matrice carrée est congruente à une matrice diagonale, elle n'est pas nécessairement semblable à telle matrice.

Le cas où le corps de base est $\mathbb{R}$ mérite une mention à part en raison du théorème de diagonalisation des matrices symétriques réelles ; rappelons à ce propos qu'une matrice symétrique complexe n'est pas toujours diagonalisable, comme le montre l'exemple de la matrice

$$\begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}$$

La correspondance entre formes hermitienne et bilinéaire symétrique a été bien péniblement perçue. Si φ est une forme hermitienne sur E, on en déduit une forme bilinéaire symétrique sur l'espace réel sous-jacent en considérant la partie réelle de $\varphi(x,y)$. Si f est une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel réel, on en déduit une forme hermitienne sur l'espace complexifié en posant $\varphi(x + iy,\ x' + iy') = f(x,\ x') + if(x',y) - if(x,\ y') + f(y,\ y')$.

L'interprétation géométrique des matrices orthogonales d'ordre 3 et de déterminant 1 a suscité des réactions décevantes. La compréhension de la notion d'angle dans le plan n'est pas en cause ; cependant il faut remarquer qu'un vecteur non nul dans un espace euclidien orienté de dimension trois induit une orientation sur le plan perpendiculaire associé à ce vecteur, pour pouvoir définir correctement une rotation dans l'espace.

Espaces affines et espaces projectifs. Les candidats s'encombrent en général de notations assez lourdes, parfois nécessaires pour préciser certaines définitions mais dont on peut avantageusement se débarrasser en cours d'exposé. Ainsi la notation $\overrightarrow{AB}$, conçue comme vecteur de translation, est bien commode.

A propos du barycentre et des difficultés que pose son "associativité" il est possible d'étendre le mécanisme de composition des points d'un espace affine A sur un corps K, pondérés par des scalaires non nuls (loi dans $A \times K^*$), aux vecteurs de l'espace vectoriel V sous-jacent ; en effet l'action de toutes les paires de la forme $\{ (\alpha, P), (-\alpha, P - \frac{\vec{u}}{\alpha}) \}$ ne dépend que de $\vec{u}$, et l'ensemble de ces paires peut être identifié à $\vec{u}$. A partir de la réunion $A \times K^* \cup V$, aisément constituée en espace vectoriel, le passage au projectif donne immédiatement et de façon intrinsèque la complétion projective de A.

Même dans le cas de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ munis de leurs structures affines cononiques, beaucoup de candidats ont eu du mal à interpréter les notions de points à l'infini dans les espaces projectifs associés. Ils ont en général négligé la topologie qu'on est en droit de mettre sur ces espaces projectifs et n'ont pas vu la possibilité de les interpréter comme les adhérences des espaces affines correspondants.

L'introduction des repères projectifs a été faite souvent de manière artificielle et abstraite sans relation avec les applications projectives. Il est bon de remarquer une fois pour toutes que se donner un repère projectif dans P (E) équivaut à se donner une application projective de $P(K^{n+1})$ sur P(E).

De manière générale, l'étude des diverses géométries en jeu aurait mérité qu'on s'attache plus à décrire les groupes linéaires, affines, projectifs et qu'on les mette en relation les uns avec les autres.

II 3. LECONS D'ALGEBRE ET DE GEOMETRIE

1. *Relations d'ordre. Exemples. Applications.*
2. *Analyse combinatoire. Applications.*
3. *Sous-groupes. Groupe quotient. Exemples. Applications.*
4. *Exemples de groupes (la théorie des groupes est supposée connue).*
5. *Groupe symétrique.*
6. *Systèmes de générateurs d'un groupe. Exemples.*
7. *Groupe opérant sur un ensemble. Exemples. Applications.*
8. *Idéaux d'un anneau. Exemples. Applications.*
9. *Anneaux principaux.*
10. *Divisibilité dans un anneau intègre. Exemples.*
11. *Anneau commutatif intègre : corps des fractions.*
12. *Anneau des classes résiduelles d'entiers modulo n.*
13. *Nombres premiers.*
14. *Numération. Notion de base. Anneau des nombres décimaux.*
15. *Corps, sous-corps, corps premier ; caractéristique. Exemples.*
16. *Corps des nombres complexes.*
17. *Algèbre sur un corps commutatif. Exemples.*
18. *Polynômes à une indéterminée.*
19. *Polynômes à n indéterminées. Dérivation.*
20. *Formule de Taylor pour un polynôme. Applications.*
21. *Divisions dans une algèbre de polynômes sur un corps commutatif. Applications.*
22. *Divisibilité dans une algèbre de polynômes sur un corps commutatif.*
23. *Fonctions polynômes.*
24. *Racines d'un polynôme ; multiplicité. Exemples.*
25. *Polynômes symétriques.*
26. *Résultant de deux polynômes. Elimination.*
27. *Fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Décomposition (la théorie du corps des fractions d'un anneau intègre est supposée connue).*
28. *Sous-espaces d'un espace vectoriel, somme et intersection de sous-espaces ; somme directe. Exemples. Applications.*
29. *Notion de rang en algèbre linéaire. Applications.*
30. *Applications multilinéaires.*
31. *Déterminant d'un endomorphisme ; déterminant d'une matrice carrée. Propriétés.*
32. *Applications des déterminants.*
33. *Systèmes d'équations linéaires.*
34. *Complexification d'un espace vectoriel réel, d'une application linéaire. Applications.*
35. *Formes réduites d'une matrice carrée. Applications.*
36. *Polynôme minimal d'un endomorphisme. Applications.*

37. *Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme. Applications.*

38. *Exponentiation d'une matrice. Exemples.*

39. *Dualité en algèbre linéaire. Applications.*

40. *Formes bilinéaires en dimension finie. Applications.*

41. *Formes quadratiques. Conjugaison. Noyau. Eléments isotropes.*

42. *Décomposition d'une forme quadratique en carrés ; cas complexe ; cas réel.*

43. *Groupe orthogonal réel. Matrices orthogonales. Réduction.*

44. *Groupe unitaire. Matrices unitaires. Réduction.*

45. *Relation entre espace vectoriel euclidien et espace vectoriel hermitien. Applications.*

46. *Dualité dans les espaces hermitiens. Adjoint d'un endomorphisme. Endomorphismes auto-adjoints. Réduction.*

47. *Dualité dans les espaces euclidiens. Adjoint d'un endomorphisme. Endomorphismes symétriques. Réduction.*

48. *Groupe des rotations du plan euclidien. Angle de deux vecteurs non nuls. Angle de deux droites.*

49. *Espace euclidien orienté de dimension trois 3 produit mixte ; produit vectoriel. Applications.*

50. *Espaces affines. Applications affines. Sous-espaces affines. Repères affines.*

51. *Variétés affines. Intersection. Parallélisme. Projecteurs affines.*

52. *Barycentres. Applications.*

53. *Convexité dans les espaces affines réels. Applications.*

54. *Projection orthogonale dans un espace affine euclidien ; problèmes d'angles et de distances.*

55. *Isométrie de l'espace affine euclidien de dimension n ; déplacements et antidéplacements.*

56. *Isométries de l'espace affine euclidien de dimension 2 et 3. Formes réduites.*

57. *Exemples de groupes d'isométries laissant globalement stable une partie de l'espace affine euclidien de dimension 2 ou 3.*

58. *Similitudes directes et inverses dans le plan. Formes réduites. Groupe des similitudes.*

59. *Inversion dans le plan. Groupe circulaire.*

60. *La sphère.*

61. *Torseurs.*

62. *Espaces projectifs. Sous-espaces projectifs. Intersection. Repères projectifs.*

63. *Liaison entre géométrie projective et géométrie affine. Eléments à l'infini.*

64. *Homographies. Groupe projectif.*

65. *Droite projective. Homographie. Involution.*

66. *Quadriques dans un espace projectif de dimension n ; propriétés projectives.*

67. *Propriétés projectives des coniques non dégénérées.*

68. *Equation tangentielle d'une conique non dégénérée. Enveloppes de Seconde classe.*

69. *Propriétés affines des coniques ; liaison avec la géométrie projective.*

70. *Propriétés métriques des coniques ; foyers et directrices.*

71. *Faisceaux linéaires ponctuels de coniques.*

AGREGATION FEMMES

RAPPORT SUR LES EPREUVES DEFINITIVES (ORAL)

I. REMARQUES GENERALES

Les épreuves de quelques candidats ont été excellentes, d'autres très bonnes et bonnes, et, dans l'ensemble, l'oral a été sérieusement préparé. Mais le jury a dû pénaliser les candidats qui ne lui avaient pas donné le choix entre deux questions au moins pour l'exposé. Beaucoup de candidats se sont pénalisés eux-mêmes en faisant un très mauvais usage, pendant leur préparation, de la bibliothèque, et pendant leurs épreuves, de leurs notes : il est légitime d'en avoir et d'en user ; lors de la présentation du plan ces notes permettent un contrôle ; il est déjà anormal de les utiliser pendant l'exposé ; il est absurde de les feuilleter précipitamment lorsqu'une question est posée, toute question demande d'abord réflexion.

Comme les années précédentes, le jury d'oral a été moins sensible à l'érudition qu'aux qualités proprement mathématiques montrées par les candidats, plan dénotant un certain esprit de synthèse, exposé d'une proposition dont les hypothèses et la conclusion sont bien dégagées ainsi que les étapes du raisonnement, exemples d'applications de cette proposition, aisance (après réflexion) lors des questions, même si les réponses sont - et ce peut être très légitimement le cas - un "je ne sais pas" ou l'énoncé d'une proposition dont le candidat dit qu'il ne saurait pas rétablir immédiatement la démonstration.

Le jury a reconnu la qualité de la préparation de certains centres et il félicite ceux qui en ont assuré la lourde charge.

Il regrette que les nécessités de service aient exigé, contrairement aux prévisions initiales, de dispenser, en 1973 encore, de nouveaux agrégés du stage pédagogique ; la proportion en a pourtant déjà diminué ; on peut espérer que la situation sera normale en 1974.

II 1.REMARQUES DU JURY D'ANALYSE

Comme on pourra le constater, bien des remarques faites dans les précédents rapports restent valables et le jury ne saurait trop conseiller aux futurs candidats de lire soigneusement les rapports des années précédentes. En 1973 encore, trop d'admissibles ont fait un mauvais usage de la bibliothèque, se contentant de juxtaposer des tranches d'un même livre, ou de livres différents sans même harmoniser leurs notations. Rappelons, un fois de plus, qu'il est rare qu'un sujet soit traité tel quel dans un chapitre déterminé d'un livre ; aussi le candidat doit faire un travail de synthèse et trouver des applications tirées de l'ensemble du programme. Bien entendu, il est nécessaire de respecter le texte donné : que penser d'un candidat qui, ayant choisi "Critère de Cauchy", se borne à réciter un plan-type sur les espaces complets ?

Le déroulement de l'épreuve, plan présenté en 20 minutes au plus, exposé détaillé, discussion avec le jury, est maintenant bien compris. Mais le jury a été très déçu par les "exposés". Deux candidats sur trois s'y sont montrés incapables de présenter des démonstrations complètes et rigoureuses ; ils en ont été sévèrement pénalisés. Comme les années précédentes les questions de topologie générale ont été, dans l'ensemble, assez satisfaisantes ; mais leurs applications à l'analyse proprement dite ont été, presque toujours, décevantes.

Il faut rappeler d'ailleurs que les candidats peuvent choisir le niveau mathématique auquel ils se placent. Il peut être élevé et le jury a eu ainsi la satisfaction d'excellents et riches exposés sur l'intégration (intégrale de Lebesgue ; mesure abstraite...). Il peut aussi être modeste, le niveau minimum étant celui défini par le programme du concours ; et les candidats peuvent obtenir de très bonnes notes en se limitant à ce niveau. Il y a d'ailleurs des sujets qui sont élémentaires par nature (développements limités, séries numériques...), leur présentation devrait être alors enrichie d'exemples présentant un intérêt mathématique certain. Malheureusement le jury a vu bien souvent des candidats se placer à un niveau mathématique beaucoup trop élevé pour leurs connaissances réelles, ce que montrait l'absence d'exemples et, souvent de manière cruelle, les réponses aux questions. D'autre part, si le jury est prêt à une certaine indulgence lorsque le candidat aborde des questions délicates, il n'est pas dupe quand on lui jette de la poudre aux yeux.

II 2. REMARQUES PARTICULIERES SUR CERTAINS SUJETS D'ANALYSE

- **Propriétés métriques des courbes planes** (resp. gauches). Tous les exposés faits manquent de rigueur ; les hypothèses sont rarement précisées ; aucun candidat n'a pu dire celles qu'il sous-entendait dans son calcul de la courbure (resp. la torsion). Aucun candidat ne sait qu'une courbe plane est caractérisée par son équation intrinsèque (à une isométrie près).

- **Le nombre π.** Aucun candidat n'a pu faire le lien entre la définition qu'il donne de π (en général, double du plus petit zéro positif de la fonction cosinus), la longueur du cercle et la mesure des angles. Aucun n'a donné de méthode numérique de calcul, ne s'est montré capable, par exemple, de prouver que π est compris entre 3 et 4.

- **Espaces vectoriels normés ; applications linéaires continues ; exemples.** Il s'agissait d'étudier l'espace des applications linéaires et continues d'un espace vectoriel normé dans un autre et de donner des exemples de telles applications. La caractérisation du dual topologique de certains espaces normés simples devait figurer dans le plan. Toutes les leçons faites sur ce sujet, sauf une, étaient très pauvres en exemples ; l'une d'elles n'en contenait aucun.

- **Développements limités.** Les leçons faites ont été toujours extrêmement pauvres et surtout, ce qui est grave, les candidats se sont montrés incapables de faire un développement limité, même très simple, ou de répondre à des questions élémentaires comme d'indiquer, dans un exemple de fonctions numériques qui leur étaient données, le nombre de termes que devrait avoir chaque développement pour fournir un développement d'ordre simple donné de leur produit.

- **Développement des fonctions en séries entières et applications.** Cette leçon comporte une étude détaillée du développement en séries entières des fonctions réelles d'une variable réelle et quelques indications sur l'extension de ces développements au prolongement au domaine complexe des fonctions usuelles. Certains candidats qui traitent le cas des fonctions holomorphes, ignorent totalement le cas réel ; en particulier, ils ne savent pas pourquoi $(1 + x)^{\alpha}$ est développable en série entière au voisinage de l'origine.

- **Accroissements finis et formule de Taylor.** De nombreux candidats choisissent ces leçons bien qu'ils ignorent l'existence de ces formules pour les fonctions de plusieurs variables. Le jury n'a pas entendu une seule démonstration correcte du théorème des accroissements finis. Pour les formules de Taylor, les candidats ne semblent pas voir la différence de nature qu'il existe entre la formule de Taylor-Young (locale) et la formule de Taylor-Lagrange (globale). Enfin les exemples d'application de ces formules sont toujours extrêmement pauvres.

- **Espaces compacts.** De nombreux candidats ne connaissent aucun compact autre que les ensembles fermés bornés de $\mathbb{R}^n$.

- **Suites numériques.** Il est nécessaire de rappeler au départ la définition choisie pour $\mathbb{R}$; le plan en dépend.

- **Fonctions monotones.** Les paragraphes concernant l'intégration et la dérivation des fonctions monotones sont souvent oubliés.

- **Suites et séries de fonctions.** La plupart des candidats sont incapables d'intégrer une suite ou une série de fonctions sur un intervalle non compact. Trop souvent on ne fait pas le lien entre les différentes notions de convergence et les topologies sur un espace fonctionnel ; en particulier la topologie de la convergence simple, souvent citée, est ignorée de la plupart des candidats.

- **Equations différentielles homogènes ; équations de Lagrange et de Clairaut.** Beaucoup de candidats en restent au niveau des recettes de calcul que d'ailleurs ils ne savent pas justifier. Il s'agit ici de donner une série d'exemples judicieusement choisis qui mettent en évidence les caractéristiques du problème posé.

- **Mécanique.** Les exposés faits ne peuvent satisfaire, ni un mécanicien ni un mathématicien. Les candidats dérivent des "angles" sans savoir de quoi ils parlent. Aucun ne sait définir le mouvement d'un solide. Les applications sont quasi inexistantes. Les candidats qui traitent des mouvements à accélération centrale connaissent-ils le nom deKépler ? connaissent-ils les mouvements des planètes et des comètes ?

II 3. LISTE DES SUJETS D'ANALYSE

1. *Le théorème du point fixe et ses applications.*
2. *Espaces complets ; exemples.*
3. *Espaces métriques compacts.*
4. *Espaces métriques compacts, espaces complets.*
5. *Espaces homéomorphes ; exemples et contre-exemples.*
6. *Connexité.*
7. *Suites dans les espaces métriques.*
8. *Topologie de* $\mathbb{R}^n$.
9. *Caractérisations de* $\mathbb{R}$.
10. *Espaces vectoriels normés : applications linéaires continues. Exemples.*
11. *Distances équivalentes, normes équivalentes.*
12. *Approximation d'un nombre réel.*
13. *Limite supérieure, limite inférieure.*
14. *Suites numériques.*
15. *Suites récurrentes.*
16. *Applications du théorème de la limite monotone.*
17. *Parties connexes de* $\mathbb{R}$, *homéomorphismes.*
18. *Fonctions monotones.*
19. *Fonctions convexes.*
20. *Inégalités de convexité.*
21. *Développements limités (ou asymptotiques).*

22. *Applications des développements limités.*

23. *Les différentes formules de Taylor et leurs applications.*

24. *Formules de Taylor pour les applications vectorielles de plusieurs variables réelles.*

25. *Fonctions homogènes.*

26. *Théorème des accroissements finis. Applications.*

27. *Problèmes d'extremum.*

28. *Le théorème des fonctions implicites et ses applications.*

29. *Le nombre* π.

30. *Fonctions circulaires.*

31. *Logarithme complexe.*

32. *Prolongement des fonctions.*

33. *La fonction exponentielle réelle et ses différentes généralisations.*

34. *Primitives et intégrales.*

35. *Intégration.*

36. *Calcul des primitives.*

37. *Le critère de Cauchy.*

38. *Intégrales impropres.*

39. *Fonctions définies par une intégrale. Exemples.*

40. *Séries numériques.*

41. *Séries entières.*

42. *Développement des fonctions en séries entières et applications.*

43. *Séries de fonctions.*

44. *Suites de fonctions.*

45. *Les différentes notions de convergence.*

46. *Valeurs d'adhérence.*

47. *Interversion de limites. Exemples.*

48. *Etude, à partir d'exemples, des équations différentielles de Lagrange et de Clairaut.*

49. *Etude, à partir d'exemples, des équations différentielles homogènes.*

50. *Systèmes différentiels homogènes à coefficients constants.*

51. *Equation différentielle linéaire* $A(x)y' + B(x)y = C(x)$, *où* y *est une fonction numérique de la variable réelle* x, A, B *et* C *des fonctions numériques continues ; cas où* A *peut s'annuler.*

52. *Etude locale d'une courbe gauche.*

53. *Propriétés métriques des courbes planes.*

54. *Propriétés métriques des courbes gauches.*

55. *Trièdre de Frenet.*

56. *Etude locale d'une surface.*

57. *Hélice circulaire. Mouvement hélicoïdal.*

58. *Composition des mouvements.*

59. *Vitesse.*

60. *Mouvements à accélération centrale.*

61. *Mouvement d'un plan sur un plan.*

62. *Repère mobile.*

63. *Définition et application des coordonnées polaires (études locales de courbes, équations différentielles... etc.).*

III 1. REMARQUES DU JURY D'ALGEBRE.

Peu de candidats ont tenu compte des recommandations, soulignées dans le rapport de 1972, concernant une utilisation judicieuse des documents mis à leur disposition ; le jury ne peut pas admettre qu'une épreuve orale soit réduite à la lecture et à la transcription de plans et de démonstrations extraits hâtivement d'ouvrages connus. Le désarroi de beaucoup de candidats qui ne trouvent pas dans leurs notes les réponses à des questions, pourtant très élémentaires, ne sauraient être imputé à un émotion somme toute compréhensible : le réflexe qui les pousse à chercher un hypothétique secours dans une liasse de feuilles hâtivement griffonées semble indiquer que sont paralysées en eux toute initiative et toute velléité de réflexion personnelle !

Dès que le contenu mathématique du plan est arrêté, il faut réfléchir à ce qui doit être écrit et ce qui doit être dit. Une transcription intégrale devient vite fastidieuse ; elle masque souvent l'ensemble des points fondamentaux d'où le candidat devrait naturellement extraire ceux qu'il envisage d'exposer en détail.

Un bon exposé ne doit pas consister à réciter, avec ou sans le secours de notes, telle étude ou telle démonstration copiée dans un manuel. Plus encore que la présentation d'un plan, il devrait être l'occasion, pour tout candidat, de mettre en valeur son aptitude à dégager des idées directrices, à comparer des méthodes, à replacer le sujet étudié dans son environnement naturel, enfin à en circonscrire la portée par un choix judicieux d'exemples et d'exercices. Il faut éviter d'accréditer l'idée, qu'en toutes circonstances, il n'existe qu'une seule justification d'un théorème donné ou une seule méthode qui permette de traiter un problème donné, si modeste soit-il. Ainsi, à propos d'une leçon ayant pour titre "systèmes d'équations linéaires", le candidat qui propose d'exposer le théorème de Rouché ne doit pas se contenter d'en fournir une seule justification laissant à un débutant le souvenir d'un artifice qu'il importe de confier à sa mémoire. En revanche, il est intéressant de comparer les divers aspects du problème selon que l'on fait intervenir un espace vectoriel, son dual ou son bidual. En tout état de cause, il est opportun de rappeler, sans ambiguïté, la définition du rang (d'un système de vecteurs, ou de formes linéaires, ou d'une matrice) ainsi que les procédés usuels qui permettent de former des relations de dépendance ou d'exprimer que le rang d'une matrice est un entier donné.

La désaffection pour les parties géométriques du programme s'aggrave dangereusement. Par exemple, des deux sujets intitulés "Sous-groupes distingués" et "similitudes dans un espace affine euclidien" le premier est généralement préféré au second. La leçon est alors purement formelle : il est rare que le plan fasse mention d'exemples intéressants. Et si, d'aventure, le jury s'enquiert de savoir si le groupe des translations, ou celui des homothéties et des translations sont des sous-groupes distingués du groupe des similitudes affines, le candidat interrogé, sans chercher à réfléchir, s'avère incapable de fournir une réponse satisfaisante.

Inversement le choix d'un sujet de géométrie ne doit pas signifier, qu'au nom d'un cloisonnement périmé, on renonce à recourir aux structures fondamentales de l'algèbre et à une terminologie dont l'usage ne manque jamais de rendre l'exposé à la fois plus clair et plus élégant.

En conclusion, le jury d'algèbre voudrait mettre en garde les candidats aux prochains concours contre une interprétation caricaturale des épreuves orales. Qu'ils sachent que le jury n'a pas à juger une épreuve de lecture ou de récitation, mais qu'il est très sensible à tout effort de réflexion personnelle. Les sujets "de composition", les leçons d'exercices se sont montrés, à ses yeux, comme particulièrement révélateurs des qualités des candidats.

III 2. REMARQUES PARTICULIERES SUR LES SUJETS D'ALGEBRE ET DE GEOMETRIE

- Théorème de D'Alembert : Les démonstrations les plus élémentaires utilisent l'équation binôme ; son étude préliminaire ne doit donc pas faire intervenir le théorème à démontrer.

En l'absence de tout effort pour dégager un invariant projectif, la notion de **birapport** reste artificielle.

Un candidat envisage un birapport infini. D'autres, dans un exposé sur les espaces projectifs, mentionnent un mystérieux plan de l'infini.

Lorsqu'il s'agit d'étudier une **application linéaire**, il est maladroit de privilégier, sans raison, l'aspect matriciel. Délibérément, certains candidats "identifient" un endomorphisme à "sa matrice" sans qu'aucune base ait été précisée.

La notion de **déterminant d'un endomorphisme** est trop souvent justifiée par un recours aux matrices de passage.

Il est souvent difficile d'obtenir une définition acceptable du **rang** d'une matrice ou du rang d'une forme bilinéaire symétrique et, dans le cas où le corps de base est R, un énoncé équivalent à "non dégénérée et positive".

Certains candidats ignorent la définition du degré d'un polynôme ainsi que celle d'un anneau euclidien.

A propos des **fonctions polynômes**, le jury a entendu que "si un polynôme à deux indéterminées admet une infinité de zéros, il est identiquement nul " !!

La présentation des **structures-quotients** ne soulève guère de difficultés ; mais l'on ne sait pas toujours tirer le meilleur parti du "schéma universel".

Plusieurs candidats affirment que la somme $E_1 + E_2 + E_3$ de trois sous-espaces vectoriels est une somme directe si et seulement si on a : $E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_3 = E_3 \cap E_1 = \{\vec{0}\}$.

La définition du **barycentre** est, trop souvent, laborieuse et inélégante. La recherche des coordonnées barycentriques d'un point est généralement vouée à l'échec. Il en est malheureusement ainsi de presque toutes les applications pratiques. Par exemple, à l'occasion d'un exposé sur les repères projectifs, un candidat renonce à chercher un système de coordonnées homogènes de l'homologue d'un point dans une homologie biaxiale.

Les **sujets de géométrie**, toujours décevants, qu'il s'agisse de similitudes, d'inversion, ou de faisceaux de coniques, sont rarement assortis de figures qui fixeraient les résultats énoncés et les raisonnements qui ont permis de les obtenir.

III 3. LISTE DES SUJETS D'ALGEBRE

1. *Applications d'un ensemble fini dans lui-même.*
2. *Analyse combinatoire.*
3. *Relation d'ordre ; exemples et applications.*
4. *Relation d'équivalence compatible avec une structure algébrique.*
5. *Structures algébriques quotients.*
6. *Groupes finis ; exemples.*
7. *Systèmes de générateurs d'un groupe ; exemples.*
8. *Groupe symétrique.*
9. *Sous-groupes distingués ; exemples.*
10. *Groupes opérant sur un ensemble ; applications.*
11. *Structure d'anneau ; exemples.*
12. *Anneaux quotients de Z.*
13. *Notion d'idéal et applications.*

14. *Divisibilité dans les anneaux intègres.*

15. *Corps, sous-corps, corps premier, caractéristique.*

16. *Corps des nombres complexes.*

17. *Groupe multiplicatif et sous-groupes des nombres complexes de module un.*

18. *Numération, bases. Anneau des nombres décimaux.*

19. *Anneau des polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif : factorisation et applications.*

20. *Anneau des polynômes à une ou plusieurs indéterminées.*

21. *Polynômes symétriques à plusieurs indéterminées.*

22. *Polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif ; division euclidienne, congruences.*

23. *Divisibilité dans les anneaux de polynômes.*

24. *Polynôme dérivé. Formule de Taylor (le corps de base est de caractéristique nulle).*

25. *Division des polynômes suivant les puissances croissantes et applications.*

26. *Résultant de deux polynômes. Elimination.*

27. *Fonctions polynômes associées à un polynôme à une ou plusieurs indéterminées.*

28. *Corps des fractions rationnelles à une ou plusieurs indéterminées.*

29. *Applications linéaires ; espaces vectoriels quotients.*

30. *Bases et dimension dans les espaces vectoriels ; applications.*

31. *Sous-espaces d'un espace vectoriel.*

32. *Rang d'une application linéaire. Groupe linéaire.*

33. *Espaces vectoriels de dimension finie : endomorphismes, automorphismes.*

34. *Dualité dans les espaces vectoriels.*

35. *Calcul matriciel.*

36. *Matrices et applications linéaires.*

37. *Applications multilinéaires ; formes multilinéaires alternées ; exemples.*

38. *Déterminant d'un endomorphisme et déterminant d'une matrice carrée.*

39. *Applications des déterminants.*

40. *Résolution des systèmes d'équations linéaires.*

41. *Valeurs propres, vecteurs propres.*

42. *Sous-espaces vectoriels propres, sous-espaces vectoriels stables d'un endomorphisme. Applications.*

45. *Formes quadratiques. Décomposition en carrés. Cas réel.*

46. *Réduction d'une forme quadratique.*

47. *Espaces vectoriels euclidiens.*

48. *Groupe orthogonal en dimension finie.*

49. *Espaces vectoriels hermitiens.*

50. *Groupe unitaire en dimension finie.*

51. *Dualité dans les espaces euclidiens. Adjoint d'un endomorphisme. Endomorphismes symétriques. Réduction.*

52. *Dualité dans les espaces hermitiens. Adjoint d'un endomorphisme. Endomorphismes auto-adjoints. Réduction.*

53. *Espace affine de dimension finie. Barycentre. Groupe affine.*

54. *Barycentres, formes affines et convexité (espace affine réel).*

55. *Parties convexes d'un espace affine réel, enveloppe convexe d'une partie, faces.*

56. *Liaison entre géométrie affine et géométrie projective.*

57. *Espaces projectifs. Sous-espaces projectifs. Intersection. Repère projectif.*

58. *Groupe projectif dans l'espace de dimension n.*

59. *Dualité dans les espaces projectifs.*

60. *Groupe projectif de la droite complexe.*

61. *Homographies du plan projectif réel sur lui-même.*

62. *Isométries dans le plan affine euclidien.*

63. *Isométries dans l'espace affine euclidien de dimension trois.*

64. *Isométries dans l'espace affine euclidien de dimension n.*

65. *Isométries du plan affine euclidien laissant globalement invariante une figure donnée.*

66. *Isométries de l'espace affine euclidien de dimension trois laissant globalement invariante une figure donnée.*

67. *Notion d'angle.*

68. *Similitudes directes et inverses dans le plan affine euclidien.*

69. *Similitudes dans un espace affine euclidien de dimension trois.*

70. *Groupe affine en dimension finie.*

71. *Sous-groupes et groupes quotients du groupe affine d'un espace affine de dimension finie.*

72. *Sous-variétés affines d'un espace affine de dimension finie.*

73. *Exemples de problèmes de géométrie affine, le corps de base étant R. En dimension n, on se limitera à des questions n'utilisant que la notion de sous-variété linéaire projective. En dimension deux on pourra utiliser la théorie des coniques.*

74. *Exemples de problèmes de géométrie métrique dans un espace affine euclidien.*

75. *Exemples de problèmes de géométrie projective, le corps de base étant C. En dimension n, on se limitera à des questions n'utilisant que la théorie des repères projectifs et des variétés linéaires projectives ; en dimension deux, on pourra en outre utiliser la théorie des coniques.*

76. *Exemples de problèmes de géométrie métrique, le corps de base étant R. En dimension n, on se limitera à des questions n'utilisant que la notion de sous-variété affine. En dimension deux, on pourra en outre utiliser la théorie des coniques.*

77. *Homographies de la droite projective réelle sur elle-même.*

78. *Homographies du plan projectif dans son dual.*

79. *Poles et polaires en géométrie plane.*

80. *Poles et polaires en géométrie dans l'espace.*

81. *Propriétés projectives des coniques ; dualité.*

82. *Coniques dans le plan projectif réel.*

83. *Propriétés affines des coniques.*

84. *Coniques dans le plan affine réel.*

85. *Propriétés métriques des coniques ; liaison avec la géométrie projective.*

86. *Faisceaux linéaires ponctuels de coniques.*

87. *Propriétés focales des coniques.*

88. *Inversion plane, groupe circulaire.*

89. *Torseurs dans R^3, équiprojectivité.*