AGREGATION HOMMES

RAPPORT SUR LES EPREUVES DEFINITIVES (ORAL)

I. EPREUVE D'ANALYSE - TRIGONOMETRIE - MECANIQUE

I 1. OBSERVATIONS GENERALES

Le jury a constaté que nombre de candidats n'ont pas compris la nature exacte des exposés d'oral, ni même assimilé les dispositions réglementaires les concernant :

- trop de plans sont précédés d'introductions inutiles se résumant, soit à un verbiage intempestif, soit à des rappels excessivement longs, de sorte que le jury est amené à demander de résumer des résultats importants ou cruciaux ;

- trop de plans sont situés à un niveau plus qu'élémentaire, et même alors sont incomplets ;

- trop de plans apparaissent comme un recopiage stérile de sources extérieures, alors qu'un nombre croissant d'exposés demande un sérieux effort de synthèse ;

- trop de plans ne peuvent être présentés en entier, car le candidat s'obstine à écrire au tableau chaque mot qu'il prononce.

Bien que beaucoup de sujets proposés comportent dans leur intitulé les mots "exemples", "contre-exemples", "applications".., l'absence quasi-systématique d'illustrations montre que les candidats n'atteignent pas en général un niveau satisfaisant d'assimilation des notions les plus élémentaires (ainsi, dans l'exposé : *"Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries à termes réels"*, des candidats indisposent le jury en se limitant à une étude générale des séries à termes réels) ; il convient de rappeler que, dans la plupart des ouvrages figurant à la bibliothèque de l'agrégation, des exemples et contre-exemples intéressants figurent dans les listes d'exercices, rarement étudiées - semble-t-il - par les candidats. D'autre part, l'emploi d'une terminologie se référant à la situation la plus générale n'est souvent qu'un simpliste camouflage d'ignorances graves et répétées : le jury ne peut que s'étonner de voir des candidats citer un théorème concernant les espaces de Banach, sans pouvoir un instant l'appliquer aux espaces $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$. Le jury rappelle également que les candidats sont *tenus* de proposer un certain nombre (au moins deux) de points de leur plan pour l'exposé, et s'alarme de la masse considérable de démonstrations qui ne peuvent être achevées sans son intervention.

Les examinateurs ont constaté que rares sont les candidats qui exploitent des connaissances certainement assimilées pour l'écrit concernant l'intégration, les fonctions analytiques, les séries de Fourier. Le jury attire l'attention des candidats sur les nombreuses confusions constatées entre les notions de valeur d'adhérence d'une suite, point d'accumulation etc.

- Signalons aussi que les candidats n'ont pas su, en général, profiter des remarques du rapport d'agrégation 1972 au sujet des équations différentielles linéaires à coefficients constants : la plupart des exposés portant sur ce sujet, ou sur des sujets voisins, sont extravagants, et comportent d'énormes erreurs sur la réduction des matrices, les blocs de Jordan, la description de bases d'espaces de solutions, etc.

- Signalons encore que - à quelques exceptions près - des exposés de géométrie différentielle se limitent à la mise en place des notions primitives (arc paramétrique, arc géométrique, arc géométrique orienté etc.) et n'abordent que de façon très épisodique les sujets proposés.

- Signalons enfin que la désaffection pour les sujets de cinématique conduit quelques candidats à s'imposer des exposés qu'ils ne peuvent maîtriser ; l'exposé *"Mouvement à accélération centrale"* pour classique qu'il soit, n'a manifestement pas inspiré certains des candidats qui l'ont choisi, et qui n'ont pas jugé utile, par exemple, de s'intéresser au cas pourtant important de l'attraction newtonienne ; l'exposé *"Cinématique du solide ; exemples"* ne saurait être un prétexte à une logorrhée sur la "nature du temps" et sur les angles d'Euler, exclusivement.

I 2. REMARQUES PARTICULIERES

Le jury renvoie le lecteur aux observations formulées dans les rapports des années précédentes, et tient à insister plus spécialement sur les exposés concernant les notices de topologie.

Les examinateurs ont constaté, et s'en alarment, que la notion de valeur d'adhérence d'une suite donne lieu à de très fréquentes et graves erreurs : une valeur d'adhérence n'est ni un point d'accumulation de suite, ni un point adhérent à l'image de la suite ; en outre, il ne s'agit d'une limite de suite extraite que dans le cas où le point en question a une base dénombrable de voisinages : il en est bien ainsi dans les espaces métriques. A ce propos, le jury conseille aux candidats n'ayant pas une pratique suffisante des topologies non métrisables, de se limiter aux espaces métriques.

Certains candidats semblent peu familiers avec l'utilisation des suites pour exprimer une propriété de limite (ou sa négation), ceci dans les espaces les plus élémentaires ; ce devrait être pourtant un réflexe naturel que d'exprimer le fait que f, application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ne tend pas vers 0 en $+\infty$, en affirmant l'existence d'une suite réelle x_n telle que : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, et d'un réel $a > 0$ tels que : $|f(x_n)| \geqslant a$ pour tout n.

Par ailleurs, des candidats confondent souvent les notions de distances équivalentes, uniformément équivalentes, topologiquement équivalentes (par exemple, l'existence d'une distance bornée uniformément équivalente à une distance donnée est ignorée), mais ne savent pas expliquer efficacement que ces notions se confondent pour des distances associées à des normes.

L'exposé *"Propriétés topologiques des espaces $\mathbb{R}^n$ et leur utilisation en analyse"* ne doit pas être assimilé à l'exposé *"Espaces vectoriels normés de dimension finie"*. Pour le premier, il semble nécessaire de donner une définition intrinsèque de la topologie de $\mathbb{R}^n$, ainsi que de la notion de partie bornée, et, également de connaître la structure des parties ouvertes (resp. ouvertes et connexes) de $\mathbb{R}^n$, de citer des exemples non triviaux de parties compactes de $\mathbb{R}^n$ etc. Pour le second, outre le théorème d'équivalence des normes et le théorème de Riesz, on peut s'intéresser aux propriétés géométriques des boules, par exemple aux rapports entre norme et jauge d'une partie convexe symétrique compacte d'intérieur non vide, éventuellement aussi aux liens avec le caractère différentiable de la norme aux points distincts de l'origine.

Dans plusieurs exposés *(applications continues ; espaces topologiques produits,* etc.) les candidats omettent l'importante caractérisation des applications continues à but produit. L'exposé *"Limites"*, même placé à un niveau élémentaire, doit comporter d'autres notions que celle de limite d'une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, en un point : en particulier, limites de suites, numériques ou non. On peut également y évoquer les familles sommables, les sommes de Reimann ou de Darboux, les limites au sens de Césaro, les limites inférieures ou supérieures, et donner un théorème correct et efficace d'interversion des limites, etc.

L'exposé *"Exemples d'espaces vectoriels normés et d'espaces de Banach ; sous-espaces denses"* a été en général fort mal traité ; les théories classiques de l'intégration et de l'analyse fonctionnelle fournissent pourtant de très nombreux exemples ; la séparabilité des espaces de Banach, le plongement isométrique d'un Banach dans son bidual, les espaces de Banach quotients, le prolongement des formes linéaires continues définies sur un sous-espace dense, les utilisations les plus élémentaires du théorème de Stone-Weierstrass (polynômes, polynômes trigonométriques,..) l'emploi de sous-espaces denses pour la démonstration de résultats simples et classiques (par exemple le théorème de Reimann-Lebesgue) sont ignorés ; enfin les candidats sont fort surpris quand on leur demande de quelle norme "raisonnable" il faut munir un espace d'applications pour en faire un espace de Banach (par exemple $C^1([0,1] ; \mathbb{R})$...).

L'exposé *"Fonctions réelles d'une variable réelle ; continuité, dérivabilité"* ne doit pas se limiter à un catalogue plus ou moins exhaustif des propriétés générales des fonctions continues ou dérivables, transcrites dans le cas réel. En outre, pour y insister, "dérivable" ne signifie pas "une fois dérivable". On pourra donc s'intéresser par exemple aux points de continuité (et éventuellement de dérivabilité) des fonctions monotones (et donc, des fonctions à variation bornée) des fonctions convexes, ou réglées, ou lipschitziennes, etc. ; aux points de continuité d'une limite simple d'une suite de fonctions continues ; aux rapports entre le caractère C^∞ et l'analyticité ; aux fonctions dérivées (intégrabilité, propriété de Darboux,...), etc.

Pour l'exposé *"Définition et propriétés de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels"*, certains candidats ont, en général, selon la méthode employée, commis l'une ou l'autre des erreurs suivantes :

- considérer $\mathbb{Q}$ comme espace métrique, avant d'avoir construit $\mathbb{R}$;

- ignorer la définition exacte d'un corps valué, d'une valeur absolue sur un corps (il s'agit d'une application dont le but est $\mathbb{R}_+$, et non l'ensemble des positifs du corps, quand il est ordonné).

En outre, les candidats ont souvent cité des théorèmes inexacts en ce qui concerne l'unicité de $\mathbb{R}$ "à un isomorphisme près", et omis d'analyser l'importance de l'exigence : "être archimédien". Toutefois, un candidat montre correctement qu'un groupe ordonné archimédien se plonge dans $\mathbb{R}$ par un prolongement de groupe ordonné.

Quant à l'exposé *"Topologie de la droite numérique $\mathbb{R}$; droite numérique achevée"*, il nécessite la mention préalable du mode de construction choisi pour $\mathbb{R}$, et le plan se doit d'être cohérent avec ce choix.

L'exposé *"Les différentes notions de convergence d'une suite ou d'une série des fonctions ; exemples"* a été souvent mal traité. Signalons qu'outre les notions de convergence simple (resp. uniforme), il existe d'autres notions de convergence utilisées couramment en analyse : la convergence uniforme sur un ensemble de parties de l'ensemble source, la convergence en moyenne, la convergence presque partout, la convergence au sens de Césaro... Trop de candidats affirment, sans hypothèse sur l'espace topologique de départ (locale compacité ; métrisabilité) qu'une limite uniforme sur tout compact d'une suite d'applications continues est continue. Pour les séries de fonctions, il est indispensable d'analyser de façon précise les rapports entre convergence normale, absolue, uniforme, et de donner des exemples et contre-exemples ne portant pas exclusivement sur les séries entières. Enfin, le jury rappelle qu'il est faux qu'une suite qui converge en moyenne, converge presque partout.

Les énoncés du théorème des fonctions implicites, outre ceux qui sont inexacts, pèchent souvent par une formulation maladroite ne mettant pas en évidence l'unicité locale de la fonction implicite et sa continuité. Quant aux applications géométriques du théorème des fonctions implicites, trop de candidats se limitent à parler de la tangente en un point d'une courbe définie par une équation $f(x,y) = 0$ (et s'avèrent parfois incapables de traiter un exemple qu'ils ont eux-mêmes choisi) ; il est souhaitable que soient évoqués le plan tangent à une surface définie par une équation $f(x,y,z) = 0$ et la tangente à une courbe intersection de deux surfaces.

Dans les problèmes de changement de variable, le jury considère comme un minimum exigible que les candidats sachent expliquer correctement un "passage en coordonnées polaires".

Dans l'exposé *"Fonction $x \to e^{ix}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Nombre π. Notion d'argument d'un nombre complexe"*, le jury s'étonne de ne voir pratiquement aucun candidat donner un sens précis à l'expression "suivre par continuité l'argument d'un nombre complexe le long d'une courbe", a fortiori énoncer des résultats simples et positifs sur les déterminations continues de l'argument dans un ouvert de $\mathbb{C}$. Le jury ne saurait exiger, à l'occasion de cet exposé, des considérations sur la question délicate de la mesure des angles.

Méthodes pratiques de recherche des primitives et de calcul des intégrales.
Le jury a trop souvent obtenu une liste de recettes, dont certains candidats n'imaginent pas qu'elles puissent se rattacher à une théorie précise et générale ; il rappelle par ailleurs qu'il existe d'autres méthodes de calcul de certaines intégrales que le recours aux primitives.

Opérations sur les séries à termes réels ou complexes
En plus des opérations algébriques usuelles et du changement de l'ordre des termes, le jury souhaiterait que soient abordés les problèmes liés à la sommation par paquets (associativité, associativité restreinte..), à la transformation d'Abel, ainsi que des considérations sur les procédés de sommation (Césaro, Abel,...).

Répartition des notes :
Les notes des 320 candidats ayant participé à l'épreuve orale d'analyse se répartissent comme suit :

$n \leqslant 10$	$11 \leqslant n \leqslant 20$	$21 \leqslant n \leqslant 30$	$31 \leqslant n \leqslant 40$	$41 \leqslant n \leqslant 50$	$51 \leqslant n \leqslant 60$	$61 \leqslant n \leqslant 70$	$71 \leqslant n \leqslant 80$
33	63	64	66	45	30	14	5

I 3. LISTE DES SUJETS D'ANALYSE

1. *Espaces compacts – Applications.*
2. *Application à l'analyse de la notion de compacité.*
3. *Espaces métriques complets. Théorème du point fixe.*
4. *Espaces métriques complets ; espaces métriques compacts. Comparaison des deux théories.*
5. *Produit d'espaces topologiques. Exemples et applications diverses.*
6. *Espaces connexes. Applications à l'analyse.*
7. *Suites numériques. Limite, limite supérieure, limite inférieure.*
8. *Etude, sur des exemples, de divers types de suites définies par une relation de récurrence.*
9. *Utilisation des suites en topologie.*
10. *La notion d'espace vectoriel normé et son utilisation en analyse ou en géométrie.*
11. *Espace vectoriel normé de dimension finie.*
12. *Définition et propriétés de l'ensemble des nombres réels.*
13. *Approximation d'un nombre réel par des rationnels.*
14. *Propriétés topologiques de $\mathbb{R}^n$ et leur utilisation en analyse.*
15. *Limites.*
16. *Applications continues.*

17. *Fonctions croissantes.*

18. *Fonctions réciproques. Fonctions implicites.*

19. *Fonctions implicites. Applications géométriques.*

20. *Fonctions convexes d'une ou plusieurs variables réelles. Inégalités de convexité.*

21. *Continuité, dérivabilité, intégrabilité de la somme d'une suite de fonctions d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.*

22. *Les différentes notions de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions. Exemples.*

23. *Exemples d'utilisation du critère de convergence de Cauchy (suites, séries, fonctions, intégrales).*

24. *Dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables ; changement de variables ; exemples.*

25. *Fonctions de plusieurs variables réelles ; formule des accroissements finis, formule de Taylor ; applications.*

26. *Applications de classe* $\mathbb{C}^k$ *d'un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^p$.

27. *Les différentes formules de Taylor.*

28. *Application des formules des accroissements finis et de Taylor aux problèmes de calcul numérique.*

29. *Application du calcul différentiel aux problèmes d'extremum.*

30. *Comparaison de fonctions au voisinage d'un point.*

31. *Applications de la méthode des développements limités ou asymptotiques.*

32. *Fonction logarithmique, fonction exponentielle d'une variable réelle.*

33. *Fonction exponentielle complexe.*

34. *Extension de la notion de fonction exponentielle.*

35. *Fonctions circulaires directes et inverses.*

36. *Prolongement de fonctions ; exemples.*

37. *Intégration des fonctions d'une variable réelle.*

38. *Primitives et intégrales.*

39. *Méthodes pratiques de recherche et de calcul des intégrales.*

40. *Intégrales impropres ; exemples.*

41. *Fonctions définies par une intégrale. Exemples.*

42. *Intégrale curviligne.*

43. *Calcul approché d'une intégrale.*

44. *Séries à termes réels ou complexes. Exemples.*

45. *Illustrer par des exemples et des contre-exemples la théorie des séries à termes réels.*

46. *Liaison entre la théorie de l'intégrale et la théorie des séries numériques.*

47. *Opérations sur les séries à termes réels ou complexes.*

48. *Séries entières.*

49. *Méthodes de développement d'une fonction en série entière. Exemples.*

50. *Série de Taylor.*

51. *Calcul approché de la somme d'une série.*

52. *Exemples de problèmes d'interversion de limites en analyse (séries, intégrales,...).*

53. *Fonction* $x \to e^{ix}$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$. *Nombre* π. *Module et argument d'un nombre complexe.*

54. *Equations différentielles linéaires. Exemple.*

55. *Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.*

56. *Equations différentielles linéaires à coefficients constants.*

57. *Exemples de problèmes géométriques résolus à l'aide d'équations différentielles.*

58. *Surface, plan tangent. Exemples.*

59. *Etude locale des courbes, propriétés affines. Exemples.*

60. *Etude locale des courbes, propriétés métriques. Exemples.*

61. *Tracé des courbes planes définies par* $\overrightarrow{OM} = \vec{f}(t)$. *Exemples.*

62. *Tracé des courbes planes définies en coordonnées polaires par* $\rho = f(\theta)$. *Exemples.*

63. *Application de la théorie des développements limités ou asymptotiques au tracé des courbes planes.*

64. *Courbure et centre de courbure en un point d'une courbe plane. Développée, développantes.*

65. *Mouvement à accélération centrale.*

66. *Mouvement relatif. Changement de repère. Application.*

67. *Cinématique du solide. Exemples.*

68. *Mouvement d'un repère orthonormé. Application à la théorie métrique des courbes gauches et à la cinématique du solide.*

69. *Mouvement d'un plan sur un plan.*

70. *Fonction différentiable.*

71. *Espace métrique. Complété d'un espace métrique.*

72. *Topologie de la droite numérique* $\mathbb{R}$. *Droite numérique achevée.*

73. *Exemples d'espaces vectoriels normés et d'espaces de Banach, sous-espaces denses.*

74. *Théorème du point fixe. Applications.*

75. *Fonction réelle d'une variable réelle ; continuité, dérivabilité.*

II. EPREUVE D'ALGEBRE ET GEOMETRIE

II 1. OBSERVATIONS GENERALES

Peut-être est-il bon de commencer par rappeler deux observations qui figuraient déjà dans le rapport sur le concours de 1972 :

- Le candidat doit savoir que si une grande liberté lui est laissée dans la détermination du niveau auquel il se place, il faut qu'il se montre capable de dominer les programmes des classes secondaires et préparatoires ; le jury se réserve le droit d'interroger sur toute question figurant dans l'un de ces programmes dans la mesure, naturellement, où elle est en rapport avec le sujet traité.

- Le jury a déploré à nouveau une désaffection certaine pour la géométrie, bien que quelques candidats aient obtenu une note brillante dans cette discipline. Cette désaffection constitue un risque grave, car des couplages de sujets de géométrie, empruntés à des chapitres différents, ont été donnés et continueront à être donnés au cours des prochains concours.

Les modalités pratiques de l'épreuve sont maintenant bien connues des candidats qui savent en particulier qu'ils disposent, pour exposer leur plan, de quinze à vingt minutes au maximum, et que, d'autre part, le plan doit tenir tout entier dans le tableau, de façon que, sans perte de temps, les examinateurs puissent éventuellement obtenir telle ou telle précision.

Le jury souhaiterait que, dès l'exposé du plan, le candidat montre ses qualités pédagogiques dans la mise en valeur des idées, qu'il s'efforce d'être audible, d'être lisible et de ne pas cacher ce qu'il écrit ; beaucoup de lapsus auraient pu être évités par des candidats trop esclaves de notes qu'ils lisaient sans réfléchir.

Beaucoup de leçons où se pose un problème de classification (espaces vectoriels et leurs structures, corps finis, groups abéliens libres, etc.) ont souffert d'une mauvaise présentation: il y a intérêt à bien dégager les objets mathématiques et les isomorphismes entre ces objets pour ensuite les classifier. Dans le même ordre d'idées, l'introduction d'une théorie telle que celle du corps des fractions d'un anneau intègre ou du complexifié d'un espace vectoriel serait facilitée par la formulation d'un problème universel.

S'il faut bien entendu éviter toute incohérence dans le plan, il faut aussi proscrire les définitions trop générales qu'on ne pourra suffisamment illustrer et utiliser. Ce rapport n'est pas exhaustif, et les exemples qu'il contient ne doivent pas nécessairement être tous familiers aux candidats ; cependant chaque leçon devrait être une occasion de se montrer curieux à l'égard des applications et des développements éventuels.

II 2. REMARQUES PARTICULIERES A PROPOS DE CERTAINES LECONS

Groupes. Dans la leçon sur les générateurs de groupes, beaucoup de candidats ont négligé l'étude des groupes abéliens libres et n'ont pas vu que deux groupes abéliens libres du type fini ont le même nombre de générateurs indépendants. Beaucoup de candidats ignorent encore la décomposition des permutations en cycles et le calcul commode de la signature qui en résulte ; quelques-uns se sont montrés incapables de définir correctement un cycle.

Les leçons sur les groupes opérant sur un ensemble et sur les générateurs de groupes méritaient d'être davantage illustrées par des exemples empruntés à la géométrie (groupe des isométries dans un espace euclidien, groupe affine de la droite, groupe des homographies, etc.).

Il n'est pas mauvais, par ailleurs, de connaître quelques exemples non triviaux de groupes.

Anneaux, corps. Peu d'exemples originaux ont été cités sur les questions de caractère général telles que corps fini, extension quadratique d'un corps fini, corps algébriquement clos ; les candidats auraient pourtant pu en trouver dans les ouvrages mis à leur disposition.

Comme exemples d'anneaux principaux autres que $\mathbb{Z}$ et $K[X]$, on peut citer les sous-anneaux de $\mathbb{Q}$ formés de fractions de la forme a/b où b n'est pas divisible par un nombre premier p fixé à l'avance (ou des anneaux du même genre). On peut aussi étudier la structure des idéaux d'anneaux du type $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, bien que ces anneaux ne soient pas intègres, etc.

Dans la leçon sur la numération, la référence à l'anneau des nombres décimaux, dont on souhaitait voir commenter la structure, invitait plus généralement à poser le problème de la représentation d'un nombre réel et à caractériser par sa périodicité le développement décimal illimité d'un nombre rationnel.

Nombres premiers. L'étroitesse apparente du sujet ne doit pas effrayer les candidats. Il y a matière à approfondissement dans plusieurs directions : théorèmes de Fermat et de Wilson, structure des groupes abéliens finis et des anneaux du type $\mathbb{Z}/(n)$, répartition des nombres premiers, aperçu historique de la théorie des idéaux, etc.

Polynômes, fractions rationnelles. Nombreux sont les candidats qui ne savent pas que le quotient de l'algèbre de polynômes $K[X]$ par l'idéal principal engendré par un polynôme irréductible est un corps. La structure des algèbres quotients de $\mathbb{R}[X]$ n'a pas non plus suscité la curiosité bien qu'elle intervienne lorsqu'on présente aux élèves les nombres complexes par $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$.

Dans l'étude des polynômes et des séries formelles on rencontre des questions de valuation intéressantes. La recherche des idéaux et même celle des éléments inversibles de l'algèbre des séries formelles ont été bien souvent laborieuses.

Le langage des anneaux factoriels permet de mieux conceptualiser un certain nombre de résultats ; il est l'introduction naturelle aux polynômes à plusieurs indéterminées ; c'est à cette occasion, que l'on peut voir des exemples d'anneaux non principaux où existent P.G.C.D. et P.P.C.M., (l'identité de Bezout ne s'appliquant néanmoins qu'aux anneaux principaux).

Peu de candidats ont choisi la leçon sur le résultant et l'élimination. La question de l'irréductibilité du résultant aurait mérité d'être plus approfondie.

Algèbre linéaire. Le jury attendait des candidats, sur des leçons d'aspect théorique facile, une richesse en exemples qui a un peu manqué. Une leçon "simple" comme celle sur les sous-espaces d'un espace vectoriel aurait gagné à être reliée à d'autres chapitres de l'algèbre et de l'analyse. Par exemple : étude du dual d'un sous-espace, applications linéaires entre espaces vectoriels exprimés comme somme directe de sous-espaces et matrices en bloc associées, formes quadratiques sur une somme orthogonale, solutions d'équations différentielles, etc.

La réduction des applications linéaires $f : E \longrightarrow F$ entre espaces vectoriels de dimension finie n'a été trop souvent traitée que dans le cas $E = F$. Il est pourtant utile, en particulier dans des problèmes de rangs, de savoir qu'il existe des bases de E et de F telles que la matrice de f s'écrive :

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nombreux sont les candidats qui n'ont pas su exploiter la complexification pour obtenir des résultats sur les endomorphismes réels (réduction des matrices orthogonales, etc.). Il y a là pourtant un domaine intéressant où interfèrent la commodité du corps des complexes et des questions de géométrie.

L'aspect topologique de l'algèbre linéaire (quand le corps de base est le corps des réels ou celui des complexes) a été aussi négligé. Le fait que l'exponentielle d'une matrice soit une fonction continue de cette matrice n'a pas été perçu. Bien peu de candidats ont aussi remarqué la compacité du groupe orthogonal et du groupe unitaire ou se sont posés des questions sur la connexité des groupes linéaire, orthogonal, unitaire.

Formes bilinéaires et formes quadratiques - Dualité. Le langage commun aux formes bilinéaires symétriques et antisymétriques n'a pas été suffisamment dégagé. Il en est ainsi par exemple des notions de rang et d'orthogonalité, des réductions et passages au quotient du type $L^{\perp}/L$, lorsque L est totalement isotrope.

L'intérêt de la notion de dualité est mal perçu : réduction des endomorphismes par la recherche des sous-espaces stables de dimension 1 ou de codimension 1, démonstration du théorème de l'invariance du rang par transposition. Voici un autre exemple :
Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps commutatif K muni d'une involution $\lambda \to \overline{\lambda}$.
On note ${}^tE$ (resp. ${}^tF$) le K-espace vectoriel des formes sur E(resp. F) **antilinéaires**, c'est-à-dire additives et satisfaisant à l'identité $u(\lambda x) = \overline{\lambda} u(x)$; cela permet de définir sur E(resp. F) une forme **hermitienne** φ (resp. ψ) ; on note $\tilde{\varphi} : E \to {}^tE$ (resp. $\tilde{\psi} : F \to {}^tF$) l'application linéaire associée à φ (resp. ψ) ; on suppose φ non dégénérée.

De toute application linéaire $f : E \to F$, on a déjà déduit sa **transposée** ${}^tf : {}^tF \to {}^tE$; on peut maintenant définir l'**adjointe** f^* de f grâce au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & {}^tE \\ F \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, "\tilde{\psi}"] & {}^tF \arrow[u, "{}^tf"'] \end{tikzcd}$$

Dans le même ordre d'idées, il arrive que l'on confonde les notions de matrices congruentes et de matrices semblables. Or, alors que, (d'après la réduction des formes quadratiques), toute matrice carrée est congruente à une matrice diagonale, elle n'est pas nécessairement semblable à telle matrice.

Le cas où le corps de base est $\mathbb{R}$ mérite une mention à part en raison du théorème de diagonalisation des matrices symétriques réelles ; rappelons à ce propos qu'une matrice symétrique complexe n'est pas toujours diagonalisable, comme le montre l'exemple de la matrice

$$\begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}$$

La correspondance entre formes hermitienne et bilinéaire symétrique a été bien péniblement perçue. Si φ est une forme hermitienne sur E, on en déduit une forme bilinéaire symétrique sur l'espace réel sous-jacent en considérant la partie réelle de $\varphi(x,y)$. Si f est une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel réel, on en déduit une forme hermitienne sur l'espace complexifié en posant $\varphi(x + iy,\ x' + iy') = f(x,\ x') + if(x',y) - if(x,\ y') + f(y,\ y')$.

L'interprétation géométrique des matrices orthogonales d'ordre 3 et de déterminant 1 a suscité des réactions décevantes. La compréhension de la notion d'angle dans le plan n'est pas en cause ; cependant il faut remarquer qu'un vecteur non nul dans un espace euclidien orienté de dimension trois induit une orientation sur le plan perpendiculaire associé à ce vecteur, pour pouvoir définir correctement une rotation dans l'espace.

Espaces affines et espaces projectifs. Les candidats s'encombrent en général de notations assez lourdes, parfois nécessaires pour préciser certaines définitions mais dont on peut avantageusement se débarrasser en cours d'exposé. Ainsi la notation $\overrightarrow{AB}$, conçue comme vecteur de translation, est bien commode.

A propos du barycentre et des difficultés que pose son "associativité" il est possible d'étendre le mécanisme de composition des points d'un espace affine A sur un corps K, pondérés par des scalaires non nuls (loi dans $A \times K^*$), aux vecteurs de l'espace vectoriel V sous-jacent ; en effet l'action de toutes les paires de la forme $\{ (\alpha, P), (-\alpha, P - \frac{\vec{u}}{\alpha}) \}$ ne dépend que de $\vec{u}$, et l'ensemble de ces paires peut être identifié à $\vec{u}$. A partir de la réunion $A \times K^* \cup V$, aisément constituée en espace vectoriel, le passage au projectif donne immédiatement et de façon intrinsèque la complétion projective de A.

Même dans le cas de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ munis de leurs structures affines cononiques, beaucoup de candidats ont eu du mal à interpréter les notions de points à l'infini dans les espaces projectifs associés. Ils ont en général négligé la topologie qu'on est en droit de mettre sur ces espaces projectifs et n'ont pas vu la possibilité de les interpréter comme les adhérences des espaces affines correspondants.

L'introduction des repères projectifs a été faite souvent de manière artificielle et abstraite sans relation avec les applications projectives. Il est bon de remarquer une fois pour toutes que se donner un repère projectif dans P (E) équivaut à se donner une application projective de $P(K^{n+1})$ sur P(E).

De manière générale, l'étude des diverses géométries en jeu aurait mérité qu'on s'attache plus à décrire les groupes linéaires, affines, projectifs et qu'on les mette en relation les uns avec les autres.

II 3. LECONS D'ALGEBRE ET DE GEOMETRIE

1. *Relations d'ordre. Exemples. Applications.*
2. *Analyse combinatoire. Applications.*
3. *Sous-groupes. Groupe quotient. Exemples. Applications.*
4. *Exemples de groupes (la théorie des groupes est supposée connue).*
5. *Groupe symétrique.*
6. *Systèmes de générateurs d'un groupe. Exemples.*
7. *Groupe opérant sur un ensemble. Exemples. Applications.*
8. *Idéaux d'un anneau. Exemples. Applications.*
9. *Anneaux principaux.*
10. *Divisibilité dans un anneau intègre. Exemples.*
11. *Anneau commutatif intègre : corps des fractions.*
12. *Anneau des classes résiduelles d'entiers modulo n.*
13. *Nombres premiers.*
14. *Numération. Notion de base. Anneau des nombres décimaux.*
15. *Corps, sous-corps, corps premier ; caractéristique. Exemples.*
16. *Corps des nombres complexes.*
17. *Algèbre sur un corps commutatif. Exemples.*
18. *Polynômes à une indéterminée.*
19. *Polynômes à n indéterminées. Dérivation.*
20. *Formule de Taylor pour un polynôme. Applications.*
21. *Divisions dans une algèbre de polynômes sur un corps commutatif. Applications.*
22. *Divisibilité dans une algèbre de polynômes sur un corps commutatif.*
23. *Fonctions polynômes.*
24. *Racines d'un polynôme ; multiplicité. Exemples.*
25. *Polynômes symétriques.*
26. *Résultant de deux polynômes. Elimination.*
27. *Fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Décomposition (la théorie du corps des fractions d'un anneau intègre est supposée connue).*
28. *Sous-espaces d'un espace vectoriel, somme et intersection de sous-espaces ; somme directe. Exemples. Applications.*
29. *Notion de rang en algèbre linéaire. Applications.*
30. *Applications multilinéaires.*
31. *Déterminant d'un endomorphisme ; déterminant d'une matrice carrée. Propriétés.*
32. *Applications des déterminants.*
33. *Systèmes d'équations linéaires.*
34. *Complexification d'un espace vectoriel réel, d'une application linéaire. Applications.*
35. *Formes réduites d'une matrice carrée. Applications.*
36. *Polynôme minimal d'un endomorphisme. Applications.*

37. *Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme. Applications.*

38. *Exponentiation d'une matrice. Exemples.*

39. *Dualité en algèbre linéaire. Applications.*

40. *Formes bilinéaires en dimension finie. Applications.*

41. *Formes quadratiques. Conjugaison. Noyau. Eléments isotropes.*

42. *Décomposition d'une forme quadratique en carrés ; cas complexe ; cas réel.*

43. *Groupe orthogonal réel. Matrices orthogonales. Réduction.*

44. *Groupe unitaire. Matrices unitaires. Réduction.*

45. *Relation entre espace vectoriel euclidien et espace vectoriel hermitien. Applications.*

46. *Dualité dans les espaces hermitiens. Adjoint d'un endomorphisme. Endomorphismes auto-adjoints. Réduction.*

47. *Dualité dans les espaces euclidiens. Adjoint d'un endomorphisme. Endomorphismes symétriques. Réduction.*

48. *Groupe des rotations du plan euclidien. Angle de deux vecteurs non nuls. Angle de deux droites.*

49. *Espace euclidien orienté de dimension trois 3 produit mixte ; produit vectoriel. Applications.*

50. *Espaces affines. Applications affines. Sous-espaces affines. Repères affines.*

51. *Variétés affines. Intersection. Parallélisme. Projecteurs affines.*

52. *Barycentres. Applications.*

53. *Convexité dans les espaces affines réels. Applications.*

54. *Projection orthogonale dans un espace affine euclidien ; problèmes d'angles et de distances.*

55. *Isométrie de l'espace affine euclidien de dimension n ; déplacements et antidéplacements.*

56. *Isométries de l'espace affine euclidien de dimension 2 et 3. Formes réduites.*

57. *Exemples de groupes d'isométries laissant globalement stable une partie de l'espace affine euclidien de dimension 2 ou 3.*

58. *Similitudes directes et inverses dans le plan. Formes réduites. Groupe des similitudes.*

59. *Inversion dans le plan. Groupe circulaire.*

60. *La sphère.*

61. *Torseurs.*

62. *Espaces projectifs. Sous-espaces projectifs. Intersection. Repères projectifs.*

63. *Liaison entre géométrie projective et géométrie affine. Eléments à l'infini.*

64. *Homographies. Groupe projectif.*

65. *Droite projective. Homographie. Involution.*

66. *Quadriques dans un espace projectif de dimension n ; propriétés projectives.*

67. *Propriétés projectives des coniques non dégénérées.*

68. *Equation tangentielle d'une conique non dégénérée. Enveloppes de Seconde classe.*

69. *Propriétés affines des coniques ; liaison avec la géométrie projective.*

70. *Propriétés métriques des coniques ; foyers et directrices.*

71. *Faisceaux linéaires ponctuels de coniques.*

RAPPORT SUR LES EPREUVES DEFINITIVES (ORAL)

I. REMARQUES GENERALES

Les épreuves de quelques candidats ont été excellentes, d'autres très bonnes et bonnes, et, dans l'ensemble, l'oral a été sérieusement préparé. Mais le jury a dû pénaliser les candidats qui ne lui avaient pas donné le choix entre deux questions au moins pour l'exposé. Beaucoup de candidats se sont pénalisés eux-mêmes en faisant un très mauvais usage, pendant leur préparation, de la bibliothèque, et pendant leurs épreuves, de leurs notes : il est légitime d'en avoir et d'en user ; lors de la présentation du plan ces notes permettent un contrôle ; il est déjà anormal de les utiliser pendant l'exposé ; il est absurde de les feuilleter précipitamment lorsqu'une question est posée, toute question demande d'abord réflexion.

Comme les années précédentes, le jury d'oral a été moins sensible à l'érudition qu'aux qualités proprement mathématiques montrées par les candidats, plan dénotant un certain esprit de synthèse, exposé d'une proposition dont les hypothèses et la conclusion sont bien dégagées ainsi que les étapes du raisonnement, exemples d'applications de cette proposition, aisance (après réflexion) lors des questions, même si les réponses sont - et ce peut être très légitimement le cas - un "je ne sais pas" ou l'énoncé d'une proposition dont le candidat dit qu'il ne saurait pas rétablir immédiatement la démonstration.

Le jury a reconnu la qualité de la préparation de certains centres et il félicite ceux qui en ont assuré la lourde charge.

Il regrette que les nécessités de service aient exigé, contrairement aux prévisions initiales, de dispenser, en 1973 encore, de nouveaux agrégés du stage pédagogique ; la proportion en a pourtant déjà diminué ; on peut espérer que la situation sera normale en 1974.

II 1.REMARQUES DU JURY D'ANALYSE

Comme on pourra le constater, bien des remarques faites dans les précédents rapports restent valables et le jury ne saurait trop conseiller aux futurs candidats de lire soigneusement les rapports des années précédentes. En 1973 encore, trop d'admissibles ont fait un mauvais usage de la bibliothèque, se contentant de juxtaposer des tranches d'un même livre, ou de livres différents sans même harmoniser leurs notations. Rappelons, un fois de plus, qu'il est rare qu'un sujet soit traité tel quel dans un chapitre déterminé d'un livre ; aussi le candidat doit faire un travail de synthèse et trouver des applications tirées de l'ensemble du programme. Bien entendu, il est nécessaire de respecter le texte donné : que penser d'un candidat qui, ayant choisi "Critère de Cauchy", se borne à réciter un plan-type sur les espaces complets ?

Le déroulement de l'épreuve, plan présenté en 20 minutes au plus, exposé détaillé, discussion avec le jury, est maintenant bien compris. Mais le jury a été très déçu par les "exposés". Deux candidats sur trois s'y sont montrés incapables de présenter des démonstrations complètes et rigoureuses ; ils en ont été sévèrement pénalisés. Comme les années précédentes les questions de topologie générale ont été, dans l'ensemble, assez satisfaisantes ; mais leurs applications à l'analyse proprement dite ont été, presque toujours, décevantes.

Il faut rappeler d'ailleurs que les candidats peuvent choisir le niveau mathématique auquel ils se placent. Il peut être élevé et le jury a eu ainsi la satisfaction d'excellents et riches exposés sur l'intégration (intégrale de Lebesgue ; mesure abstraite...). Il peut aussi être modeste, le niveau minimum étant celui défini par le programme du concours ; et les candidats peuvent obtenir de très bonnes notes en se limitant à ce niveau. Il y a d'ailleurs des sujets qui sont élémentaires par nature (développements limités, séries numériques...), leur présentation devrait être alors enrichie d'exemples présentant un intérêt mathématique certain. Malheureusement le jury a vu bien souvent des candidats se placer à un niveau mathématique beaucoup trop élevé pour leurs connaissances réelles, ce que montrait l'absence d'exemples et, souvent de manière cruelle, les réponses aux questions. D'autre part, si le jury est prêt à une certaine indulgence lorsque le candidat aborde des questions délicates, il n'est pas dupe quand on lui jette de la poudre aux yeux.

II 2. REMARQUES PARTICULIERES SUR CERTAINS SUJETS D'ANALYSE

- **Propriétés métriques des courbes planes** (resp. gauches). Tous les exposés faits manquent de rigueur ; les hypothèses sont rarement précisées ; aucun candidat n'a pu dire celles qu'il sous-entendait dans son calcul de la courbure (resp. la torsion). Aucun candidat ne sait qu'une courbe plane est caractérisée par son équation intrinsèque (à une isométrie près).

- **Le nombre Π.** Aucun candidat n'a pu faire le lien entre la définition qu'il donne de π (en général, double du plus petit zéro positif de la fonction cosinus), la longueur du cercle et la mesure des angles. Aucun n'a donné de méthode numérique de calcul, ne s'est montré capable, par exemple, de prouver que π est compris entre 3 et 4.

- **Espaces vectoriels normés ; applications linéaires continues ; exemples.** Il s'agissait d'étudier l'espace des applications linéaires et continues d'un espace vectoriel normé dans un autre et de donner des exemples de telles applications. La caractérisation du dual topologique de certains espaces normés simples devait figurer dans le plan. Toutes les leçons faites sur ce sujet, sauf une, étaient très pauvres en exemples ; l'une d'elles n'en contenait aucun.

- **Développements limités.** Les leçons faites ont été toujours extrêmement pauvres et surtout, ce qui est grave, les candidats se sont montrés incapables de faire un développement limité, même très simple, ou de répondre à des questions élémentaires comme d'indiquer, dans un exemple de fonctions numériques qui leur étaient données, le nombre de termes que devrait avoir chaque développement pour fournir un développement d'ordre simple donné de leur produit.

- **Développement des fonctions en séries entières et applications.** Cette leçon comporte une étude détaillée du développement en séries entières des fonctions réelles d'une variable réelle et quelques indications sur l'extension de ces développements au prolongement au domaine complexe des fonctions usuelles. Certains candidats qui traitent le cas des fonctions holomorphes, ignorent totalement le cas réel ; en particulier, ils ne savent pas pourquoi $(1 + x)^{\alpha}$ est développable en série entière au voisinage de l'origine.

- **Accroissements finis et formule de Taylor.** De nombreux candidats choisissent ces leçons bien qu'ils ignorent l'existence de ces formules pour les fonctions de plusieurs variables. Le jury n'a pas entendu une seule démonstration correcte du théorème des accroissements finis. Pour les formules de Taylor, les candidats ne semblent pas voir la différence de nature qu'il existe entre la formule de Taylor-Young (locale) et la formule de Taylor-Lagrange (globale). Enfin les exemples d'application de ces formules sont toujours extrêmement pauvres.

- **Espaces compacts.** De nombreux candidats ne connaissent aucun compact autre que les ensembles fermés bornés de $\mathbb{R}^n$.

- **Suites numériques.** Il est nécessaire de rappeler au départ la définition choisie pour $\mathbb{R}$; le plan en dépend.

- **Fonctions monotones.** Les paragraphes concernant l'intégration et la dérivation des fonctions monotones sont souvent oubliés.

- **Suites et séries de fonctions.** La plupart des candidats sont incapables d'intégrer une suite ou une série de fonctions sur un intervalle non compact. Trop souvent on ne fait pas le lien entre les différentes notions de convergence et les topologies sur un espace fonctionnel ; en particulier la topologie de la convergence simple, souvent citée, est ignorée de la plupart des candidats.

- **Equations différentielles homogènes ; équations de Lagrange et de Clairaut.** Beaucoup de candidats en restent au niveau des recettes de calcul que d'ailleurs ils ne savent pas justifier. Il s'agit ici de donner une série d'exemples judicieusement choisis qui mettent en évidence les caractéristiques du problème posé.

- **Mécanique.** Les exposés faits ne peuvent satisfaire, ni un mécanicien ni un mathématicien. Les candidats dérivent des "angles" sans savoir de quoi ils parlent. Aucun ne sait définir le mouvement d'un solide. Les applications sont quasi inexistantes. Les candidats qui traitent des mouvements à accélération centrale connaissent-ils le nom de Képler ? connaissent-ils les mouvements des planètes et des comètes ?

II 3. LISTE DES SUJETS D'ANALYSE

1. *Le théorème du point fixe et ses applications.*
2. *Espaces complets ; exemples.*
3. *Espaces métriques compacts.*
4. *Espaces métriques compacts, espaces complets.*
5. *Espaces homéomorphes ; exemples et contre-exemples.*
6. *Connexité.*
7. *Suites dans les espaces métriques.*
8. *Topologie de* $\mathbb{R}^n$.
9. *Caractérisations de* $\mathbb{R}$.
10. *Espaces vectoriels normés : applications linéaires continues. Exemples.*
11. *Distances équivalentes, normes équivalentes.*
12. *Approximation d'un nombre réel.*
13. *Limite supérieure, limite inférieure.*
14. *Suites numériques.*
15. *Suites récurrentes.*
16. *Applications du théorème de la limite monotone.*
17. *Parties connexes de* $\mathbb{R}$, *homéomorphismes.*
18. *Fonctions monotones.*
19. *Fonctions convexes.*
20. *Inégalités de convexité.*
21. *Développements limités (ou asymptotiques).*

22. *Applications des développements limités.*

23. *Les différentes formules de Taylor et leurs applications.*

24. *Formules de Taylor pour les applications vectorielles de plusieurs variables réelles.*

25. *Fonctions homogènes.*

26. *Théorème des accroissements finis. Applications.*

27. *Problèmes d'extremum.*

28. *Le théorème des fonctions implicites et ses applications.*

29. *Le nombre π.*

30. *Fonctions circulaires.*

31. *Logarithme complexe.*

32. *Prolongement des fonctions.*

33. *La fonction exponentielle réelle et ses différentes généralisations.*

34. *Primitives et intégrales.*

35. *Intégration.*

36. *Calcul des primitives.*

37. *Le critère de Cauchy.*

38. *Intégrales impropres.*

39. *Fonctions définies par une intégrale. Exemples.*

40. *Séries numériques.*

41. *Séries entières.*

42. *Développement des fonctions en séries entières et applications.*

43. *Séries de fonctions.*

44. *Suites de fonctions.*

45. *Les différentes notions de convergence.*

46. *Valeurs d'adhérence.*

47. *Interversion de limites. Exemples.*

48. *Etude, à partir d'exemples, des équations différentielles de Lagrange et de Clairaut.*

49. *Etude, à partir d'exemples, des équations différentielles homogènes.*

50. *Systèmes différentiels homogènes à coefficients constants.*

51. *Equation différentielle linéaire* $A(x)y' + B(x)y = C(x)$*, où* y *est une fonction numérique de la variable réelle* x*,* A, B *et* C *des fonctions numériques continues ; cas où* A *peut s'annuler.*

52. *Etude locale d'une courbe gauche.*

53. *Propriétés métriques des courbes planes.*

54. *Propriétés métriques des courbes gauches.*

55. *Trièdre de Frenet.*

56. *Etude locale d'une surface.*

57. *Hélice circulaire. Mouvement hélicoïdal.*

58. *Composition des mouvements.*

59. *Vitesse.*

60. *Mouvements à accélération centrale.*

61. *Mouvement d'un plan sur un plan.*

62. *Repère mobile.*

63. *Définition et application des coordonnées polaires (études locales de courbes, équations différentielles... etc.).*

III 1. REMARQUES DU JURY D'ALGEBRE.

Peu de candidats ont tenu compte des recommandations, soulignées dans le rapport de 1972, concernant une utilisation judicieuse des documents mis à leur disposition ; le jury ne peut pas admettre qu'une épreuve orale soit réduite à la lecture et à la transcription de plans et de démonstrations extraits hâtivement d'ouvrages connus. Le désarroi de beaucoup de candidats qui ne trouvent pas dans leurs notes les réponses à des questions, pourtant très élémentaires, ne sauraient être imputé à un émotion somme toute compréhensible : le réflexe qui les pousse à chercher un hypothétique secours dans une liasse de feuilles hâtivement griffonées semble indiquer que sont paralysées en eux toute initiative et toute velléité de réflexion personnelle !

Dès que le contenu mathématique du plan est arrêté, il faut réfléchir à ce qui doit être écrit et ce qui doit être dit. Une transcription intégrale devient vite fastidieuse ; elle masque souvent l'ensemble des points fondamentaux d'où le candidat devrait naturellement extraire ceux qu'il envisage d'exposer en détail.

Un bon exposé ne doit pas consister à réciter, avec ou sans le secours de notes, telle étude ou telle démonstration copiée dans un manuel. Plus encore que la présentation d'un plan, il devrait être l'occasion, pour tout candidat, de mettre en valeur son aptitude à dégager des idées directrices, à comparer des méthodes, à replacer le sujet étudié dans son environnement naturel, enfin à en circonscrire la portée par un choix judicieux d'exemples et d'exercices. Il faut éviter d'accréditer l'idée, qu'en toutes circonstances, il n'existe qu'une seule justification d'un théorème donné ou une seule méthode qui permette de traiter un problème donné, si modeste soit-il. Ainsi, à propos d'une leçon ayant pour titre "systèmes d'équations linéaires", le candidat qui propose d'exposer le théorème de Rouché ne doit pas se contenter d'en fournir une seule justification laissant à un débutant le souvenir d'un artifice qu'il importe de confier à sa mémoire. En revanche, il est intéressant de comparer les divers aspects du problème selon que l'on fait intervenir un espace vectoriel, son dual ou son bidual. En tout état de cause, il est opportun de rappeler, sans ambiguïté, la définition du rang (d'un système de vecteurs, ou de formes linéaires, ou d'une matrice) ainsi que les procédés usuels qui permettent de former des relations de dépendance ou d'exprimer que le rang d'une matrice est un entier donné.

La désaffection pour les parties géométriques du programme s'aggrave dangereusement. Par exemple, des deux sujets intitulés "Sous-groupes distingués" et "similitudes dans un espace affine euclidien" le premier est généralement préféré au second. La leçon est alors purement formelle : il est rare que le plan fasse mention d'exemples intéressants. Et si, d'aventure, le jury s'enquiert de savoir si le groupe des translations, ou celui des homothéties et des translations sont des sous-groupes distingués du groupe des similitudes affines, le candidat interrogé, sans chercher à réfléchir, s'avère incapable de fournir une réponse satisfaisante.

Inversement le choix d'un sujet de géométrie ne doit pas signifier, qu'au nom d'un cloisonnement périmé, on renonce à recourir aux structures fondamentales de l'algèbre et à une terminologie dont l'usage ne manque jamais de rendre l'exposé à la fois plus clair et plus élégant.

En conclusion, le jury d'algèbre voudrait mettre en garde les candidats aux prochains concours contre une interprétation caricaturale des épreuves orales. Qu'ils sachent que le jury n'a pas à juger une épreuve de lecture ou de récitation, mais qu'il est très sensible à tout effort de réflexion personnelle. Les sujets "de composition", les leçons d'exercices se sont montrés, à ses yeux, comme particulièrement révélateurs des qualités des candidats.

III 2. REMARQUES PARTICULIERES SUR LES SUJETS D'ALGEBRE ET DE GEOMETRIE

- **Théorème de D'Alembert** : Les démonstrations les plus élémentaires utilisent l'équation binôme ; son étude préliminaire ne doit donc pas faire intervenir le théorème à démontrer.

En l'absence de tout effort pour dégager un invariant projectif, la notion de **birapport** reste artificielle.

Un candidat envisage un birapport infini. D'autres, dans un exposé sur les espaces projectifs, mentionnent un mystérieux plan de l'infini.

Lorsqu'il s'agit d'étudier une **application linéaire**, il est maladroit de privilégier, sans raison, l'aspect matriciel. Délibérément, certains candidats "identifient" un endomorphisme à "sa matrice" sans qu'aucune base ait été précisée.

La notion de **déterminant d'un endomorphisme** est trop souvent justifiée par un recours aux matrices de passage.

Il est souvent difficile d'obtenir une définition acceptable du **rang** d'une matrice ou du rang d'une forme bilinéaire symétrique et, dans le cas où le corps de base est R, un énoncé équivalent à "non dégénérée et positive".

Certains candidats ignorent la définition du degré d'un polynôme ainsi que celle d'un anneau euclidien.

A propos des **fonctions polynômes**, le jury a entendu que "si un polynôme à deux indéterminées admet une infinité de zéros, il est identiquement nul " !!

La présentation des **structures-quotients** ne soulève guère de difficultés ; mais l'on ne sait pas toujours tirer le meilleur parti du "schéma universel".

Plusieurs candidats affirment que la somme $E_1 + E_2 + E_3$ de trois sous-espaces vectoriels est une somme directe si et seulement si on a : $E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_3 = E_3 \cap E_1 = \{\vec{0}\}$.

La définition du **barycentre** est, trop souvent, laborieuse et inélégante. La recherche des coordonnées barycentriques d'un point est généralement vouée à l'échec. Il en est malheureusement ainsi de presque toutes les applications pratiques. Par exemple, à l'occasion d'un exposé sur les repères projectifs, un candidat renonce à chercher un système de coordonnées homogènes de l'homologue d'un point dans une homologie biaxiale.

Les **sujets de géométrie**, toujours décevants, qu'il s'agisse de similitudes, d'inversion, ou de faisceaux de coniques, sont rarement assortis de figures qui fixeraient les résultats énoncés et les raisonnements qui ont permis de les obtenir.

III 3. LISTE DES SUJETS D'ALGEBRE

1. *Applications d'un ensemble fini dans lui-même.*
2. *Analyse combinatoire.*
3. *Relation d'ordre ; exemples et applications.*
4. *Relation d'équivalence compatible avec une structure algébrique.*
5. *Structures algébriques quotients.*
6. *Groupes finis ; exemples.*
7. *Systèmes de générateurs d'un groupe ; exemples.*
8. *Groupe symétrique.*
9. *Sous-groupes distingués ; exemples.*
10. *Groupes opérant sur un ensemble ; applications.*
11. *Structure d'anneau ; exemples.*
12. *Anneaux quotients de Z.*
13. *Notion d'idéal et applications.*

14. *Divisibilité dans les anneaux intègres.*
15. *Corps, sous-corps, corps premier, caractéristique.*
16. *Corps des nombres complexes.*
17. *Groupe multiplicatif et sous-groupes des nombres complexes de module un.*
18. *Numération, bases. Anneau des nombres décimaux.*
19. *Anneau des polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif : factorisation et applications.*
20. *Anneau des polynômes à une ou plusieurs indéterminées.*
21. *Polynômes symétriques à plusieurs indéterminées.*
22. *Polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif ; division euclidienne, congruences.*
23. *Divisibilité dans les anneaux de polynômes.*
24. *Polynôme dérivé. Formule de Taylor (le corps de base est de caractéristique nulle).*
25. *Division des polynômes suivant les puissances croissantes et applications.*
26. *Résultant de deux polynômes. Elimination.*
27. *Fonctions polynômes associées à un polynôme à une ou plusieurs indéterminées.*
28. *Corps des fractions rationnelles à une ou plusieurs indéterminées.*
29. *Applications linéaires ; espaces vectoriels quotients.*
30. *Bases et dimension dans les espaces vectoriels ; applications.*
31. *Sous-espaces d'un espace vectoriel.*
32. *Rang d'une application linéaire. Groupe linéaire.*
33. *Espaces vectoriels de dimension finie : endomorphismes, automorphismes.*
34. *Dualité dans les espaces vectoriels.*
35. *Calcul matriciel.*
36. *Matrices et applications linéaires.*
37. *Applications multilinéaires ; formes multilinéaires alternées ; exemples.*
38. *Déterminant d'un endomorphisme et déterminant d'une matrice carrée.*
39. *Applications des déterminants.*
40. *Résolution des systèmes d'équations linéaires.*
41. *Valeurs propres, vecteurs propres.*
42. *Sous-espaces vectoriels propres, sous-espaces vectoriels stables d'un endomorphisme. Applications.*
45. *Formes quadratiques. Décomposition en carrés. Cas réel.*
46. *Réduction d'une forme quadratique.*
47. *Espaces vectoriels euclidiens.*
48. *Groupe orthogonal en dimension finie.*
49. *Espaces vectoriels hermitiens.*
50. *Groupe unitaire en dimension finie.*
51. *Dualité dans les espaces euclidiens. Adjoint d'un endomorphisme. Endomorphismes symétriques. Réduction.*
52. *Dualité dans les espaces hermitiens. Adjoint d'un endomorphisme. Endomorphismes auto-adjoints. Réduction.*
53. *Espace affine de dimension finie. Barycentre. Groupe affine.*
54. *Barycentres, formes affines et convexité (espace affine réel).*
55. *Parties convexes d'un espace affine réel, enveloppe convexe d'une partie, faces.*
56. *Liaison entre géométrie affine et géométrie projective.*
57. *Espaces projectifs. Sous-espaces projectifs. Intersection. Repère projectif.*
58. *Groupe projectif dans l'espace de dimension n.*
59. *Dualité dans les espaces projectifs.*
60. *Groupe projectif de la droite complexe.*
61. *Homographies du plan projectif réel sur lui-même.*

62. *Isométries dans le plan affine euclidien.*

63. *Isométries dans l'espace affine euclidien de dimension trois.*

64. *Isométries dans l'espace affine euclidien de dimension n.*

65. *Isométries du plan affine euclidien laissant globalement invariante une figure donnée.*

66. *Isométries de l'espace affine euclidien de dimension trois laissant globalement invariante une figure donnée.*

67. *Notion d'angle.*

68. *Similitudes directes et inverses dans le plan affine euclidien.*

69. *Similitudes dans un espace affine euclidien de dimension trois.*

70. *Groupe affine en dimension finie.*

71. *Sous-groupes et groupes quotients du groupe affine d'un espace affine de dimension finie.*

72. *Sous-variétés affines d'un espace affine de dimension finie.*

73. *Exemples de problèmes de géométrie affine, le corps de base étant R. En dimension n, on se limitera à des questions n'utilisant que la notion de sous-variété linéaire projective. En dimension deux on pourra utiliser la théorie des coniques.*

74. *Exemples de problèmes de géométrie métrique dans un espace affine euclidien.*

75. *Exemples de problèmes de géométrie projective, le corps de base étant C. En dimension n, on se limitera à des questions n'utilisant que la théorie des repères projectifs et des variétés linéaires projectives ; en dimension deux, on pourra en outre utiliser la théorie des coniques.*

76. *Exemples de problèmes de géométrie métrique, le corps de base étant R. En dimension n, on se limitera à des questions n'utilisant que la notion de sous-variété affine. En dimension deux, on pourra en outre utiliser la théorie des coniques.*

77. *Homographies de la droite projective réelle sur elle-même.*

78. *Homographies du plan projectif dans son dual.*

79. *Poles et polaires en géométrie plane.*

80. *Poles et polaires en géométrie dans l'espace.*

81. *Propriétés projectives des coniques ; dualité.*

82. *Coniques dans le plan projectif réel.*

83. *Propriétés affines des coniques.*

84. *Coniques dans le plan affine réel.*

85. *Propriétés métriques des coniques ; liaison avec la géométrie projective.*

86. *Faisceaux linéaires ponctuels de coniques.*

87. *Propriétés focales des coniques.*

88. *Inversion plane, groupe circulaire.*

89. *Torseurs dans R^3, équiprojectivité.*