TEXTE DE L'EPREUVE DE MECANIQUE

DÉFINITIONS ET NOTATIONS

1. *Système mécanique.*

On se propose d'étudier quelques questions relatives au système mécanique Σ, *supposé isolé,* constitué par trois points matériels M_0, M_1, M_2, de masses respectives m_0, m_1, m_2 non nulles et en mouvement dans l'espace affine euclidien E_3.

Pour $i, j = 0, 1, 2$ et $i \neq j$, on désigne par d_{ij} la longueur du segment M_iM_j, supposée toujours non nulle, et par $\vec{u}_{ij}$ le vecteur unitaire de la demi-droite M_iM_j d'origine M_i, contenant M_j. On a donc $\overrightarrow{M_iM_j} = d_{ij}\vec{u}_{ij}$.

Chacun des trois points M_i est soumis *uniquement* à l'action des deux autres : on note $\vec{F}_{ij}$ l'action de M_j sur M_i $(i \neq j)$; dans tout le problème, les hypothèses suivantes sont faites sur les forces $\vec{F}_{ij}$:

a. $\vec{F}_{ij}$ est colinéaire à $\vec{u}_{ij}$;

b. $\vec{F}_{ij}$ s'écrit sous la forme $\vec{F}_{ij} = m_im_jf_{ij}(d_{ij})\vec{u}_{ij}$, où f_{ij} n'est fonction que de d_{ij};

c. en général, les fonctions f_{ij} et f_{ji} ne sont pas égales : cette dernière hypothèse implique que, *à l'intérieur de* Σ, « *l'action n'est pas toujours égale à la réaction* »;

d. Les fonctions $u \longmapsto f_{ij}(u)$ sont définies et continûment dérivables pour u réel strictement positif.

2. *Repères et coordonnées.*

Dans E_3 trois repères orthonormés seront utilisés :

- $\mathcal{F}$ est un repère fixe d'origine O arbitraire;
- $\mathcal{R}_0$ est le repère d'origine M_0, d'axes parallèles à ceux de $\mathcal{F}$;
- $\mathcal{R}$, utilisé dans la deuxième partie, est un repère mobile d'origine M_0, dont le premier axe passe par M_1 et dont le troisième axe coïncide avec le troisième axe de $\mathcal{R}_0$.

On utilisera aussi un repère $\mathcal{N}$ dans un espace auxiliaire introduit dans la question II 6°.

Dans la mesure du possible, on se conformera aux notations suivantes, choisies pour leur commodité, en désignant :

- Par $\vec{r}_i$ le vecteur $\overrightarrow{M_0M_i}$, et par x_i, y_i, z_i ses coordonnées dans $\mathcal{R}_0$ $(i = 1, 2)$.
- Par $\vec{R}_i$ le vecteur $\overrightarrow{OM_i}$ et par X_i, Y_i, Z_i ses coordonnées dans $\mathcal{F}$ $(i = 0, 1, 2)$.

Les trois points jouent dans le problème des rôles dissymétriques; on sera amené à utiliser :

$$d_{01} = d_{10} = \rho \quad , \quad d_{02} = d_{20} = r \quad , \quad d_{12} = d_{21} = d$$

Enfin on notera t le temps, et θ l'angle qui fixe la position de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}_0$.

N. B. — Une lecture attentive du texte montrera facilement quelles sont les relations de dépendance entre les différentes questions.

I

1° Écrire le système (D) des équations différentielles qui définissent le mouvement de Σ dans $\mathcal{R}_0$. On utilisera de préférence les inconnues $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ ainsi que les variables ρ, r, d.

Si l'on suppose connue la solution de (D) qui satisfait à des conditions initiales données, comment peut-on obtenir le mouvement de $\mathcal{R}_0$ par rapport à $\mathcal{F}$?

Donner les relations que doivent vérifier les fonctions f_{ij} ($i, j = 0, 1, 2$; $i \neq j$) pour que, quelles que soient les conditions initiales et quelles que soient les masses m_i ($i = 0, 1, 2$), le mouvement dans $\mathcal{F}$ du centre d'inertie G de Σ soit rectiligne uniforme. Donner une interprétation mécanique du résultat obtenu.

2° *Dans cette question seulement,* on suppose $f_{ij} = f_{ji}$ ($i, j = 0, 1, 2$; $i \neq j$); on suppose de plus que, pour tout $u > 0$ et pour toute fonction f_{ij}, on a : $f_{ij}(u) \neq 0$.

a. Étudier l'existence de positions d'équilibre de Σ *dans* $\mathcal{R}_0$ pour chacun des deux cas :

- Les points M_0, M_1, M_2 forment un véritable triangle;
- M_0, M_1, M_2 sont alignés et, pour tout $u > 0$, on a :

$$f_{01}(u) < 0 \quad , \quad f_{02}(u) < 0 \quad , \quad f_{12}(u) > 0$$

b. En supposant que les points M_0, M_1, M_2 sont astreints, par des liaisons sans frottement, à rester alignés sur une droite fixe par rapport à $\mathcal{F}$ et que les fonctions f_{ij} sont égales à :

$$f_{01}(u) = -\frac{1}{u^2} \quad , \quad f_{02}(u) = -\frac{1}{u^2} \quad , \quad f_{12}(u) = \frac{1}{u} \quad ,$$

étudier les mouvements de Σ dans lesquels r et ρ sont constants et discuter la stabilité de ces équilibres relatifs : on remarquera que, dans le mouvement de Σ par rapport à $\mathcal{F}$, les forces en jeu dérivent d'une fonction de forces et on appliquera le théorème de Lejeune-Dirichlet.

3° Dans cette question, les fonctions f_{ij} sont définies, pour $u > 0$, par $f_{ij}(u) = \lambda_{ij}u$, où les λ_{ij} sont des constantes ($i, j, = 0, 1, 2$; $i \neq j$). Intégrer les équations du mouvement de Σ dans $\mathcal{F}$, sans examiner les cas particuliers. On pourra définir toute constante intermédiaire susceptible de simplifier l'écriture; on démontrera que la solution dépend de six vecteurs constants arbitraires et on s'attachera à expliciter cette dépendance.

II

Dans toute la suite on suppose que M_2 n'agit pas sur M_0 et M_1 (mais M_0 et M_1 agissent sur M_2), c'est-à-dire que les fonctions f_{02} et f_{12} sont identiquement nulles.

Le système différentiel (D), qui définit le mouvement de Σ dans $\mathcal{R}_0$, se scinde alors en deux parties : (D_1) définit le mouvement de M_1 dans $\mathcal{R}_0$ et (D_2) définit le mouvement de M_2 dans $\mathcal{R}_0$, lorsque celui de M_1 est connu.

1° Démontrer que la trajectoire de M_1 dans $\mathcal{R}_0$ est située dans un plan P passant par M_0. On choisit $\mathcal{F}$ de façon que les deux premiers axes de $\mathcal{R}_0$ soient dans P; la position de M_1 dans P est alors donnée par ses coordonnées polaires ρ et θ (voir notations). On posera $f = m_0 f_{10} + m_1 f_{01}$, et on désignera par F une primitive de f.

Définir la trajectoire de M_1 dans P par une quadrature.

Dans le cas $F(\rho) = k\rho^n$, $n \in \mathbf{Z}$ et k constant, quelles sont les valeurs de n pour lesquelles θ s'exprime en fonction de ρ au moyen de fonctions élémentaires, quelles que soient les conditions initiales?

2° On suppose qu'il existe des valeurs positives de ρ pour lesquelles on a $f(\rho) > 0$. Démontrer que, si a est une telle valeur, il existe des conditions initiales telles que ρ soit constamment égal à a. Comment varie alors θ en fonction de t?

3° Dans le repère $\mathcal{R}$ (défini dans «définitions et notations»), les coordonnées de M_1 sont $\rho(t), 0, 0$. Soient x, y, z celles de M_2; on a :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \text{et} \qquad d = \sqrt{r^2 - 2\rho x + \rho^2}$$

On désigne par U la matrice-colonne d'ordre 3 d'éléments x, y, z. Mettre les équations du mouvement de M_2 dans $\mathcal{R}$ sous la forme :

$$\frac{d^2U}{dt^2} + A\frac{dU}{dt} + BU = C \tag{1}$$

où A, B sont des matrices carrées d'ordre 3 dont les éléments ne dépendent que de la fonction $t \longrightarrow \theta(t)$, et où C est une matrice-colonne d'ordre 3 dont les éléments ne dépendent que de x, y, z et de la fonction $t \longrightarrow \rho(t)$.

4° Dans le cas particulier, étudié en II-2, où le mouvement de M_1 dans P est circulaire, démontrer que le système (1) possède une intégrale première quadratique dont on donnera une interprétation mécanique.

5° Revenant au cas général, on effectue sur le système (1) la transformation (T) suivante : choisissant θ comme nouvelle variable, on pose :

$$x = \rho\xi \qquad y = \rho\eta \qquad z = \rho\zeta$$

(on rappelle que, après l'intégration des équations du mouvement de M_1, ρ est une fonction connue de θ).

Écrire le système différentiel reliant les fonctions ξ, η, ζ de la variable θ et leurs dérivées par rapport à θ.

Démontrer que ce système peut se mettre sous la forme :

$$\left\{\begin{aligned} \xi'' - 2\eta' &= \rho^3 \frac{\partial R}{\partial \xi} \\ \eta'' + 2\xi' &= \rho^3 \frac{\partial R}{\partial \eta} \\ \zeta'' + \zeta &= \rho^3 \frac{\partial R}{\partial \zeta} \end{aligned}\right. \tag{2}$$

où R est une fonction de ξ, η, ζ, ρ qu'on exprimera au moyen des f_{ij}, de leurs primitives et des conditions initiales du mouvement de M_1.

6° Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3, muni d'un repère orthonormé $\mathcal{N}$. Soient μ_0, μ_1, μ_2 les points de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées respectives dans $\mathcal{N}$ sont (0, 0, 0), (1, 0, 0), (ξ, η, ζ); ces points peuvent être considérés comme les images par (T) des points M_0, M_1, M_2 de E_3.

La connaissance en fonction de θ de la trajectoire de μ_2 dans $\mathcal{N}$ et la connaissance du mouvement de M_1 dans $\mathcal{R}_0$ définissent complètement le mouvement de Σ dans $\mathcal{R}_0$. Trouver les conditions que doivent vérifier les fonctions f_{ij} pour qu'il existe des solutions de (2) telles que μ_2 soit fixe dans le plan d'équation $\zeta = 0$ et forme avec μ_1 et μ_0 un triangle équilatéral.

7° Dans toute la suite on suppose que, quel que soit ρ, les fonctions f_{ij} vérifient les conditions trouvées dans II-6° et on se place dans le cas particulier étudié dans II-2° et II-4° ($\rho = a$). Si μ_2 est fixe dans $\mathcal{N}$, alors M_2 est fixe dans $\mathcal{R}$. Soient ξ_0, η_0 et ζ_0 les coordonnées de l'une des positions d'équilibre de μ_2 trouvées à la question précédente. On pose :

$$\xi = \xi_0 + \bar{\xi} \qquad \eta = \eta_0 + \bar{\eta} \qquad \zeta = \zeta_0 + \bar{\zeta}$$

En utilisant éventuellement le résultat trouvé en II-4°, démontrer qu'il existe une forme quadratique $\Phi(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ telle que, pour toute solution de (2), on ait :

$$\bar{\xi}'^2 + \bar{\eta}'^2 + \bar{\zeta}'^2 = -\Phi\left(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}\right) + \left(\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \varepsilon\left(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}\right) + \mathrm{H}$$

où H est une constante et ε une fonction de trois variables bornée au voisinage de (0, 0, 0).

La fonction f a été définie au II-1° par : $f = m_0 f_{10} + m_1 f_{01}$; on définit de même la fonction g par : $g = m_0 f_{10} - m_1 f_{01}$.

Exprimer les coefficients de Φ en fonction des valeurs de f, g et de leurs dérivées au point a.

Démontrer qu'une condition suffisante de stabilité de la position d'équilibre de μ_2 dans $\mathfrak{M}$ est que Φ soit une forme quadratique définie positive.

Quelles conditions doivent vérifier f, g et a pour qu'il en soit ainsi?

8° Étudier la stabilité du système différentiel (L) obtenu en linéarisant le système (2) autour de sa solution $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$, $\zeta = \zeta_0$. Que peut-on en conclure sur la stabilité de la position d'équilibre de μ_2?

RAPPORT SUR L'EPREUVE DE MECANIQUE

Bâti sur le thème de l'étude d'un système isolé formé de 3 masses ponctuelles, le problème avait été conçu pour tester les réactions des candidats devant un certain nombre de questions très classiques en mécanique générale et ne contenant aucun piège. Les résultats ont été décevants : très peu de candidats dominent convenablement le programme de mécanique de premier cycle, et on peut s'étonner du nombre considérable de copies blanches ou presque vides, alors que le problème commençait par des questions sans difficulté particulière.

Partie I

Dans la première question on demandait la mise en équation du problème dans un repère mobile, en translation par rapport au repère galiléen. On a retrouvé à ce propos toutes les erreurs classiques : confusion de notations, utilisation simultanée (dans l'un ou l'autre membre de l'équation) des "forces d'inertie d'entraînement" et des "accélérations d'entraînement", application sans précaution de la méthode de Lagrange à partir d'un énergie cinétique relative, sans compter l'apparition subreptice de forces de pesanteur (?).

Ce ci n'est pas pour étonner les correcteurs, vieux routiers du métier, et qui savent combien ces questions de mouvement relatif sont en général mal comprises ou mal assimilées. Ce qui est plus surprenant c'est l'utilisation généralisée de la méthode de "pêche à la ligne" des équations : on écrit une équation de la quantité de mouvement par-ci, un théorème du moment cinétique par là, éventuellement une forme bâtarde d'un théorème de l'énergie, sans se préoccuper de la cohérence du système d'équations ainsi obtenu, sans chercher à savoir si les équations sont en nombre suffisant, si elles sont indépendantes ou non. Le résultat est trop souvent catastrophique.

En particulier, les candidats qui se contentent du système formé par l'équation définissant le mouvement du centre d'inertie et l'équation du moment cinétique autour de ce centre d'inertie n'ont sans doute guère réfléchi à la différence qui existe entre un système de points matériels quelconque et un solide.

On peut s'étonner aussi de trouver des candidats qui pensent, ou semblent penser, que tout mouvement de translation est uniforme.

Dans la deuxième question on demandait tout d'abord d'étudier les positions d'équilibre relatif du système dans le cas où $f_{ij} = f_{ji} \neq 0$.

Des conditions nécessaires d'équilibre sont évidemment $\frac{d^2\vec{R}_1}{dt^2} = \frac{d^2\vec{R}_0}{dt^2} = \frac{d^2\vec{R}_2}{dt^2}$ mais, comme avec l'hypothèse $f_{ij} = f_{ji}$ le centre d'inertie a un mouvement de translation uniforme, il vient immédiatement : $\frac{d^2\vec{R}i}{dt^2} = 0 \quad i = 0, 1, 2$. Il est clair qu'il ne peut y avoir équilibre si les 3 points forment un vrai triangle et les conditions d'équilibre dans le cas de 3 points alignés sont faciles à déterminer :

Le (b) de cette question est une application immédiate du théorème de Lejeune Dirichlet pour la recherche de la stabilité. Doit-on rappeler ici que les conditions :
$\frac{\partial U}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0 \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x_0, y_0) < 0$ ne fournissent pas un ensemble de conditions suffisantes pour que U soit maximum au point (x_0, y_0) ?

La question 3 a été l'occasion de vérifier qu'un bon nombre de candidats n'ont, sur les systèmes différentiels, que des connaissances superficielles. On s'attendait à trouver plus souvent la forme générale de la solution d'un système de 6 équations du second ordre, linéaires et à coefficients constants. On ne s'attendait pas, par contre, à rencontrer le raisonnement suivant :
"X est un vecteur colonne, A une matrice carrée (6 × 6). Si X" = AX, alors $X'^2 = AX^2 + Cte$".

Partie II

Le problème traité dans cette partie est une généralisation du problème restreint des trois corps. Les 2 premières questions sont des questions de cours classiques et appellent peu de remarques particulières. Rappelons encore une fois que les trajectoires, dans un mouvement à accélération centrale, ne sont pas toujours des coniques et que $\frac{d\rho}{dt} = f(\theta)$ n'est pas l'équation différentielle d'une trajectoire.

Peu de candidats sont allés au-delà de la 3e question. Ceux qui ont franchi ce cap alors facilement obtenu des points dans la suite, où seule était nécessaire une certaine maîtrise des techniques de calcul. Aucun candidat n'a abordé de façon positive les deux dernières questions, où la stabilité des positions d'équilibre trouvées au 6° était étudiée de deux façons : par une méthode de type Liapounov et par linéarisation.

Sur le plan général, on doit noter la maladresse et la lourdeur avec laquelle sont menés les calculs, les difficultés qu'éprouvent de nombreux candidats dans la manipulation de l'analyse vectorielle, pourtant classique maintenant dans tous les cycles d'enseignement.

On peut aussi ajouter au florilège de l'agrégation les extraits suivants, sans commentaire :
"$\log a = \log b + \log c \Longrightarrow a = b + c$"
"$\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ et $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ sont trois vecteurs linéairement indépendants, donc :
$a\vec{r}_1 + b\vec{r}_2 + c(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = 0 \Longrightarrow a = b = c = 0$"
"il faut et il suffit connaître..."

Répartition des notes (entre 0 et 40)

Agrégation masculine : 198 copies

n = 0	$1 \leqslant n \leqslant 5$	$6 \leqslant n \leqslant 10$	$11 \leqslant n \leqslant 15$	$16 \leqslant n \leqslant 20$	$21 \leqslant n \leqslant 25$	$26 \leqslant n \leqslant 30$	$31 \leqslant n \leqslant 35$	$36 \leqslant n \leqslant 40$
26	77	28	42	13	6	3	2	1

Agrégation féminine : 81 copies

n = 0	$1 \leqslant n \leqslant 5$	$6 \leqslant n \leqslant 10$	$11 \leqslant n \leqslant 15$	$16 \leqslant n \leqslant 20$	$21 \leqslant n \leqslant 25$	$26 \leqslant n \leqslant 30$	$31 \leqslant n \leqslant 35$	$36 \leqslant n \leqslant 40$
10	29	18	12	8	2	2	0	0