TEXTE DE L'EPREUVE D'ANALYSE NUMERIQUE

O. *Notations*

α. Le naturel k étant supérieur ou égal à 1, on désigne par $\mathbf{R}^k$ l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ des colonnes (appelées aussi vecteurs) de k nombres réels, muni des lois usuelles d'addition et de multiplication par un scalaire réel. La notation $u = (u_i) \in \mathbf{R}^k$ signifie que u_i est la i-ième composante du vecteur u de $\mathbf{R}^k$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. On note e_i les vecteurs de la *base canonique de* $\mathbf{R}^k$ (e_i a toutes ses composantes nulles, sauf la i-ième qui vaut 1).

On définit sur $\mathbf{R}^k$ la *norme du maximum*, notée φ_∞ (quel que soit k), par :

$$u = (u_i) \in \mathbf{R}^k \longrightarrow \varphi_\infty(u) = \operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,k} |u_i|$$

β. Pour toute la suite on munit $\mathbf{R}^k$ de la relation d'ordre partiel (dite « composante à composante »), notée $\leqslant$, suivante : pour $u = (u_i)$ et $u' = (u'_i)$, éléments de $\mathbf{R}^k$, la relation $u \leqslant u'$ (notée aussi $u' \geqslant u$) est définie par :

$$\text{pour tout } i = 1, 2, \ldots, k \quad , \quad u_i \leqslant u'_i \text{ (dans } \mathbf{R})$$

En notant 0 le vecteur nul de $\mathbf{R}^k$, appelé aussi origine de $\mathbf{R}^k$, la relation $0 \leqslant u$ signifie donc que u a toutes ses composantes positives ou nulles dans $\mathbf{R}$. Si *toutes* les composantes de u sont strictement positives dans $\mathbf{R}$, on écrira $0 < u$ (ou aussi $u > 0$).

Pour tout $u = (u_i)$ de $\mathbf{R}^k$, on note $|u| = (|u_i|)$ le vecteur de $\mathbf{R}^k$, dont chaque composante est la valeur absolue de la composante correspondante de u; on a donc : $|u| \geqslant 0$.

γ. On note $\mathcal{M}_k$ l'algèbre des matrices carrées (k, k) à éléments réels. La notation $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_k$ signifie que le réel a_{ij} est l'élément de la i-ième ligne et de la j-ième colonne $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$ dans la matrice A de $\mathcal{M}_k$.

Pour toute la suite, on munit $\mathcal{M}_k$ de la relation d'ordre partiel (dite « élément à élément ») suivante, notée encore $\leqslant$: pour $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$, éléments de $\mathcal{M}_k$, la relation $A \leqslant B$ est définie par :

$$a_{ij} \leqslant b_{ij} \text{ dans } \mathbf{R}, \quad \text{quels que soient } i \text{ et } j \text{ dans } \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, la matrice nulle sera désignée par 0. Une matrice A satisfait donc à : $A \geqslant 0$, si tous ses éléments sont positifs ou nuls dans $\mathbf{R}$; une telle matrice sera dite *nonnégative* (en un seul mot).

I

On appelle *rayon spectral* $\rho(A)$ d'une matrice carrée A, à éléments réels ou complexes, le module maximum des valeurs propres de A. On rappelle alors les résultats suivants :

Proposition 1.

Si $\rho(A)$ est strictement inférieur à 1, alors la matrice $I - A$ est inversible et on a :

$$(I - A)^{-1} = \lim_{r \to +\infty} \sum_{h=0}^{r} A^h$$

(I : matrice-unité de même type que A.)

Proposition 2.

Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_k$ vérifiant $0 \leqslant A \leqslant B$, alors on a :

$$\rho(A) \leqslant \rho(B)$$

Proposition 3.

Soient L et U deux matrices nonnégatives dans $\mathfrak{M}_k$. Si on a $\rho(\mathrm{L}+\mathrm{U}) < 1$ alors :

α. $\mathrm{I}-\mathrm{L}$ est inversible et $(\mathrm{I}-\mathrm{L})^{-1}$ est nonnégative;

β. $\rho[(\mathrm{I}-\mathrm{L})^{-1}\mathrm{U}] \leqslant \rho(\mathrm{L}+\mathrm{U}) < 1$.

Q 1 *Démontrer, en utilisant les propositions 1 et 2, le point α de la proposition 3.* (L'étude du point β n'est pas demandée.)

Les propositions 1, 2, 3 seront utiles seulement dans les sections IV, VI, VII, VIII de ce problème.

II

Dans toute la suite, X désigne un espace vectoriel sur le corps **R**. On rappelle que toute application Ψ de X dans **R**, vérifiant les deux axiomes suivants :

(*a*) $\quad \forall x \in \mathrm{X}\ ,\ \forall \lambda \in \mathbf{R}\ ,\quad \Psi(\lambda x) = |\lambda|\,\Psi(x)$

(*b*) $\quad \forall x, y \in \mathrm{X}\ ,\quad \Psi(x+y) \leqslant \Psi(x) + \Psi(y)$

est appelée *semi-norme* sur X.

Q 2 *Démontrer que toute semi-norme* Ψ *sur* X *prend nécessairement des valeurs* $\geqslant 0$ *et que son* noyau, *c'est-à-dire le sous-ensemble* V *de* X *défini par :*

$$\mathrm{V} = \{ x \in \mathrm{X} : \Psi(x) = 0 \}$$

est un sous-espace vectoriel de X. *Montrer que, pour tout* x *dans* X *et tout* v *dans* V, *il vient :*

$$\Psi(x+v) = \Psi(x)$$

On rappelle qu'une semi-norme sur X est une *norme* si, et seulement si, son noyau se réduit à l'origine de X.

III

On suppose qu'il existe une application p de X dans $\mathbf{R}^k$ (k étant un naturel $\geqslant 1$, donné) vérifiant les axiomes suivants :

(A) $\quad \forall x \in \mathrm{X}\ ,\ \forall \lambda \in \mathbf{R} \quad p(\lambda x) = |\lambda|\,p(x)$

(B) $\quad \forall x\ ,\ y \in \mathrm{X} \quad p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ [ordre sur $\mathbf{R}^k$]

(C) $\quad p(x) = 0$ implique $x = 0$.

On appelle une telle application une *norme vectorielle de taille k sur* X. On notera, pour tout x dans X, $p_i(x)$ la ième composante ($i = 1, 2, \ldots, k$) du vecteur $p(x)$ de $\mathbf{R}^k$.

Q 3 *Démontrer que les applications* p_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) *sont des semi-normes sur* X, *dont les noyaux* V_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) *vérifient :*

(D) $$\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{V}_i = \{ 0 \}\ .$$

En déduire que, pour tout $x \in \mathrm{X}$, *on a* $p(x) \geqslant 0$ *dans* $\mathbf{R}^k$.

Réciproquement, démontrer que la donnée de k *semi-normes* p_i ($i = 1, \ldots, k$) *sur* X, *dont les noyaux* V_i *vérifient* (D), *définit une norme vectorielle de taille* k *sur* X.

On définit alors l'application, notée φ, de X dans $\mathbf{R}$ suivante :

$$x \in X \longmapsto \varphi(x) = \operatorname*{Max}_{i=1,2,\ldots,k} p_i(x).$$

Q 4 *Démontrer que* φ *est une norme sur* X *(vectorielle de taille 1).*

Pour tout $u > 0$ dans $\mathbf{R}^k$ (toutes composantes strictement positives), on considère la partie suivante de X :

$$\mathcal{V}_u = \{x \in X;\ \ p(x) \leqslant u\}$$

Q 5 *Démontrer que l'ensemble des* $\mathcal{V}_u$ *forme un système fondamental de voisinag le l'origine de* X. *Démontrer que la topologie ainsi définie sur* X *est* équivalente *à celle de la norme* φ.

L'espace vectoriel X muni de la norme vectorielle p sera dit *vectoriellement normé.* Dans toute la suite, la topologie considérée sur X sera celle qui vient d'être définie.

Q 6 *Exemples :*

1. *On prend* $X = \mathbf{R}^k$.

   Démontrer que $x \in X \longmapsto |x|$ (voir O, β) *e.t une norme vectorielle de taille k sur* $\mathbf{R}^k$. *On l'appellera la* norme vectorielle type *sur* $\mathbf{R}^k$. *Quelle est la topologie corres ondante?*

2. *Soit* Y *l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, continues sur* $[0, 1]$. *On prend* $X = Y \times Y$, *et pour tout élément* $f = (f_1, f_2)$ *de* X (f_1 *et* f_2 *appartiennent à* Y) *on pose :*

$$p_1(f) = \operatorname*{Max}_{t \in [0,1]} |f_1(t)|$$

$$p_2(f) = \operatorname*{Max}_{t \in [0,1]} |f_2(t)|$$

Démontrer qu'on obtient ainsi une norme vectorielle de taille 2 sur X.

Ainsi vectoriellement normé, X *est-il complet?*

IV

Soit alors F une application de X dans lui-même, pour laquelle on suppose exister une matrice M, nonnégative dans $\mathcal{M}_k$, et de rayon spectral $\rho(M) < 1$, telle que :

(E) $\qquad \forall x, y \in X \qquad p(F(x) - F(y)) \leqslant Mp(x - y)$

F est alors dite *contractante sur* X *relativement à p.*

On appellera *point fixe* de F dans X tout élément x de X, s'il en existe, tel que $x = F(x)$.

Q 7 *Démontrer que, si* F *admet un point fixe dans* X, *il est unique. Prouver de plus que toute suite* $(x^{(i)})_{i \in \mathbf{N}}$ *d'éléments de* X *ainsi définie* (méthode des approximations successives sur F) :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ pris quelconque dans X} \\ x^{(r+1)} = F(x^{(r)}) \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

est une suite de Cauchy dans X.

En déduire que, si X *est complet,* F *admet dans* X *un unique point fixe x, calculable par la méthode des approximations successives et qu'on a alors l'estimation suivante en norme vectorielle :*

(F) $\qquad p(x - x^{(r)}) \leqslant M^r(I - M)^{-1}p(x^{(1)} - x^{(0)})$

On définit alors sur $\mathfrak{M}_k$ la norme suivante, notée s_∞ :

$$A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_k \longmapsto s_\infty(A) = \underset{\substack{z \in \mathbf{R}^k \\ z \neq 0}}{\operatorname{Sup}} \frac{\varphi_\infty(Az)}{\varphi_\infty(z)}$$

Q 8 *Démontrer que, pour tout* A *dans* $\mathfrak{M}_k$, *il vient :*

$$s_\infty(A) = \underset{i=1,2,\ldots,k}{\operatorname{Max}} \sum_{j=1}^{k} |a_{ij}|$$

Q 9 *Démontrer, à partir de l'inégalité de contraction* (E), *la relation :*

(G) $\qquad \forall x, y \in X \qquad \varphi(F(x) - F(y)) \leqslant s_\infty(M)\, \varphi(x - y)$

Démontrer que (G) n'implique pas nécessairement *que* F *soit contractante relativement à la norme* φ *(vectorielle de taille 1) sur* X.

Exemples :

Q 10 *En utilisant la norme vectorielle type sur* $\mathbf{R}^2$, *prouver que le système d'équations non linéaires suivant admet une solution unique* $x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$, *calculable par la méthode des approximations successives :*

$$\xi_1 = 0{,}4 \sin \xi_1 + 0{,}2 \cos \xi_2$$
$$\xi_2 = 0{,}8 \cos \xi_1 + 0{,}4 \sin \xi_2$$

*Démontrer que cet exemple illustre le résultat de **Q 9**.*

On considère la méthode des approximations successives sur cet exemple, en partant de :

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} \xi_1^{(0)} \\ \xi_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi/2 \end{bmatrix}$$

Donner une estimation de $|x - x^{(1)}|$ *et* $|x - x^{(4)}|$ *sans pour autant calculer* $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$ *(aucune table n'est nécessaire).*

Q 11 *En utilisant des majorations identiques à celles utilisées en **Q 10**, prouver qu'il existe un jeu unique* (f_1, f_2) *de fonctions à valeurs réelles, continues sur* $[0, 1]$, *telles que, pour tout* t *dans* $[0, 1]$:

$$f_1(t) = \int_0^t [0{,}4 \sin f_1(\theta) + 0{,}2 \cos f_2(\theta)]\, d\theta$$

$$f_2(t) = \int_0^t [0{,}8 \cos f_1(\theta) + 0{,}4 \sin f_2(\theta)]\, d\theta$$

La méthode des approximations successives est-elle numériquement *utilisable **telle** quelle pour calculer la solution* (f_1, f_2)?

V

Les deux naturels n et k étant strictement supérieurs à 1, on prend pour toute la suite $X = \mathbf{R}^n$, muni d'une norme vectorielle p de taille k. On définit les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbf{R}^n$ (V_i désigne encore le noyau de la semi-norme p_i) :

$$W_i = \bigcap_{\substack{j=1,2,\ldots,k \\ j \neq i}} V_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

On a évidemment $W_i \cap V_i = \{0\}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, de sorte qu'on peut définir, pour tout i, la somme directe Z_i de W_i et V_i :

$$Z_i = W_i \oplus V_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

Q 12 *Démontrer que la somme directe* $\mathbf{W} = \mathbf{W}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{W}_k$ *des* k *sous-espaces* $\mathbf{W}_i$ *est bien définie. Prouver que, de plus, pour tout* x *de* $\mathbf{W}$ *décomposé (de façon unique) en* $x = \sum_{i=1}^{k} x_i$, *avec* $x_i \in \mathbf{W}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, *on a :*

$$p(x) = \sum_{i=1}^{k} p(x_i) = \sum_{i=1}^{k} p_i(x_i) e_i$$

où les e_i *sont les vecteurs de base de* $\mathbf{R}^k$. *Prouver enfin que la restriction de* p_i *à* $\mathbf{W}_i$ *est une* norme *sur* $\mathbf{W}_i$.

Q 13 *Construire les sous-espaces* $\mathbf{V}_i, \mathbf{W}_i, \mathbf{Z}_i, \mathbf{W}$ *pour la norme vectorielle* p *suivante, de taille* 3 *sur* $\mathbf{R}^5$:

$$x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_5 \end{bmatrix} \longmapsto p(x) = \begin{bmatrix} |\xi_1| + |\xi_2| \\ |\xi_2| + |\xi_3| \\ |\xi_4| + |\xi_5| \end{bmatrix}$$

Même question pour la norme vectorielle q *suivante sur* $\mathbf{R}^5$:

$$x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_5 \end{bmatrix} \longmapsto q(x) = \begin{bmatrix} |\xi_1| + |\xi_2| \\ |\xi_3| \\ |\xi_4| + |\xi_5| \end{bmatrix}$$

Q 14 *Montrer que les propositions 1 et 2 suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathbf{Z}_i = \mathbf{R}^n \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$
2. $\mathbf{W} = \mathbf{R}^n$

Lorsqu'elles sont vérifiées, on dit que la norme vectorielle p est *régulière*.

VI

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ des naturels $\geqslant 1$ tels que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$ [d'où nécessairement $k \leqslant n$].

On « partitionne » alors tout vecteur x de $\mathbf{R}^n$ en k blocs, de la façon suivante :

$$x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{\lambda_1} \\ \hdashline \xi_{\lambda_1+1} \\ \vdots \\ \xi_{\lambda_1+\lambda_2} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \xi_{\lambda_1+\dots+\lambda_{k-1}+1} \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \hdashline x_2 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline x_k \end{bmatrix} \begin{array}{l} \} \ \lambda_1 \text{ composantes} \\ \} \ \lambda_2 \text{ composantes} \\ \\ \} \ \lambda_k \text{ composantes} \end{array}$$

$$\left(x_i \in \mathbf{R}^{\lambda_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k) \ , \ x_i = \begin{bmatrix} \xi_{\lambda_1+\dots+\lambda_{i-1}+1} \\ \vdots \\ \xi_{\lambda_1+\dots+\lambda_{i-1}+\lambda_i} \end{bmatrix} \right)$$

φ_∞ désignant, pour tout i, la norme du maximum sur $\mathbf{R}^{\lambda_i}$, on pose, pour tout x de $\mathbf{R}^n$ ainsi décomposé :

$$p(x) = \begin{bmatrix} \varphi_\infty(x_1) \\ \vdots \\ \varphi_\infty(x_k) \end{bmatrix}$$

Q 15 *Montrer que l'application p est une norme vectorielle régulière de taille k sur $\mathbf{R}^n$. Qu'obtient-on pour $k = n$?*

Soit alors T une application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même, représentée dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ par une matrice, notée encore T, élément de $\mathcal{M}_n$.

On « partitionne » T selon les blocs suivants :

$$T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1k} \\ \vdots & & & \vdots \\ T_{k1} & T_{k2} & \dots & T_{kk} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \} \ \lambda_1 \text{ lignes} \\ \\ \} \ \lambda_k \text{ lignes} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{\lambda_1 \text{ colonnes}} & \qquad\qquad \underbrace{\qquad}_{\lambda_k \text{ colonnes}} \end{array} \end{array}$$

de sorte que T_{ij} est une matrice à éléments réels, de type (λ_i, λ_j) $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$. On pose :

$$S(T) = \begin{vmatrix} s_\infty(T_{11}) \ldots s_\infty(T_{1k}) \\ \vdots \\ s_\infty(T_{k1}) \ldots s_\infty(T_{kk}) \end{vmatrix}$$

de sorte que S(T) est une matrice nonnégative de $\mathcal{M}_k$.

On appelle alors *majorante de* T *relativement à p* toute matrice M, nonnégative dans $\mathcal{M}_k$, telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \qquad p(Tx) \leqslant M\,p(x)$$

Q 16 *Démontrer que* S(T) *est une majorante de* T *relativement à p. Démontrer que toute majorante* M *de* T *relativement à p est* caractérisée *par l'inégalité :*

$$S(T) \leqslant M$$

En déduire que S(T) *est une majorante de rayon spectral minimum.*

Q 17 *Démontrer que l'application* S : $\mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_k$ *définie ci-dessus est une norme vectorielle de taille* k^2, *régulière sur* $\mathcal{M}_n$. *Prouver de plus la relation :*

$$\forall T_1, T_2 \in \mathcal{M}_n \qquad S(T_1 . T_2) \leqslant S(T_1)S(T_2)$$

I_n *désignant la matrice-unité* (n, n), *que vaut* $S(I_n)$?

h étant un vecteur donné dans $\mathbf{R}^n$, on considère alors l'application affine F de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ suivante

$$x \in \mathbf{R}^n \longmapsto F(x) = Tx + h$$

Q 18 *Démontrer que, pour que* F *soit contractante relativement à p, il faut et il suffit que* $\rho(S(T)) < 1$.

En déduire que, si $\rho(S(T)) < 1$, *alors l'équation suivante dans* $\mathbf{R}^n$

$$x = Tx + h$$

admet une solution unique x calculable par la méthode des approximations successives, avec l'estimation suivante :

$$p(x - x^{(r)}) \leqslant [S(T)]^r [I - S(T)]^{-1} p(x^{(1)} - x^{(0)})$$

VII

F désigne maintenant une application, non nécessairement affine, de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$, contractante relativement à la norme vectorielle type sur $\mathbf{R}^n$.

On notera f_i les « composantes » de F, de sorte que :

$$x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \longmapsto F(x) = \begin{bmatrix} f_1(\xi_1, \ldots, \xi_n) \\ \vdots \\ f_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) \end{bmatrix}$$

avec :

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^n \qquad |F(x) - F(y)| \leqslant M\,|x - y| \qquad (M \geqslant 0; \quad \rho(M) < 1)$$

On définit alors l'application G (composantes g_i) de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ par les relations :

$$g_1(x) = g_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = f_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

$$g_2(x) = g_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = f_2(g_1(x), \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

$$\vdots$$

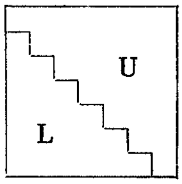
$$g_i(x) = g_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = f_i(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_{i-1}(x), \xi_i, \ldots, \xi_n)$$

$$\vdots$$

$$g_n(x) = g_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = f_n(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_{n-1}(x), \xi_n)$$

Q 19 *Démontrer que* F *et* G *admettent le même unique point fixe dans* $\mathbf{R}^n$. *Expliciter la méthode des approximations successives sur* G.

On note L la triangulaire inférieure stricte de la matrice M, U sa triangulaire supérieure :

M =  = L + U

(Sur la diagonale et au-dessus les éléments de la matrice carrée L sont nuls ; au-dessous ils sont égaux à ceux de M ayant les mêmes positions).

Q 20 *Démontrer que :*

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^n \qquad |G(x) - G(y)| \leqslant (I - L)^{-1}U\,|x - y|$$

En déduire que la méthode des approximations successives sur G *converge vers l'unique point fixe de* F, *quel que soit le vecteur de départ choisi.*

VIII

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n$ et b un vecteur donné dans $\mathbf{R}^n$. On munit $\mathbf{R}^n$ de la norme vectorielle p définie dans la partie (VI) : A est alors décomposée en blocs A_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$ de la même façon que T l'était précédemment.

De même, le vecteur b est décomposé en blocs b_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

On suppose que les blocs diagonaux A_{ii} de A (qui sont carrés) sont inversibles (et numériquement, facilement inversibles). Pour résoudre le système linéaire $Ax = b$, on envisage les deux méthodes itératives suivantes :

Partant d'un vecteur quelconque $x^{(0)}$ dans $\mathbf{R}^n$ décomposé selon les blocs $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}$, on définit une suite de vecteurs $x^{(r)}$ de $\mathbf{R}^n$, décomposés selon les blocs $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots, x_k^{(r)}$, par la récurrence :

$$\left\{\begin{array}{l} x_i^{(r+1)} = -A_{ii}^{-1}\left[\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} A_{ij}x_j^{(r)}\right] + A_{ii}^{-1}\,b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) \\ (r = 0, 1, 2, \ldots) \end{array}\right.$$

(Méthode de Jacobi par blocs.)

De même, partant d'un vecteur quelconque $y^{(0)}$ de $\mathbf{R}^n$ décomposé selon les blocs $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_k^{(0)}$, on définit une suite de vecteurs

$y^{(r)}$ de $\mathbf{R}^n$ décomposés selon les blocs $y_1^{(r)}, y_2^{(r)}, \ldots, y_k^{(r)}$, par la récurrence :

$$\begin{cases} y_i^{(r+1)} = -\mathrm{A}_{ii}^{-1} \left[\sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{A}_{ij} y_j^{(r+1)} + \sum_{j=i+1}^{k} \mathrm{A}_{ij} y_j^{(r)} \right] + \mathrm{A}_{ii}^{-1} b_i \\ \hfill (i = 1, 2, \ldots, k) \\ (r = 0, 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

(Méthode de Gauss-Seidel par blocs.)
(Dans la somme entre crochets le premier terme disparaît lorsque i vaut *1*, et le second lorsque i vaut n).

On définit alors dans $\mathcal{M}_n$ les matrices L et U suivantes : dans la décomposition en blocs introduite sur $\mathcal{M}_n$, soient L_{ij} les blocs de L, U_{ij} ceux de U ($i, j = 1, 2, \ldots, k$). On pose, pour définir L et U :

$$\mathrm{L}_{ij} = 0 \quad \text{si } i \leqslant j \ , \quad \mathrm{U}_{ij} = -\mathrm{A}_{ii}^{-1} \mathrm{A}_{ij} \quad \text{si } i < j$$

$$\mathrm{L}_{ij} = -\mathrm{A}_{ii}^{-1} \mathrm{A}_{ij} \quad \text{si } i > j \ , \quad \mathrm{U}_{ij} = 0 \quad \text{si } i \geqslant j$$

De sorte que L (respectivement : U) est une matrice triangulaire inférieure (respectivement : supérieure) stricte, par blocs.

ERRATUM : ligne 19, *lire* « i vaut k » *au lieu de* « i vaut n ».

Q 21 *Démontrer que les deux méthodes introduites peuvent se mettre sous la forme :*

$$x^{(r+1)} = \mathrm{J} \ x^{(r)} + h_1 \quad \text{(Jacobi par blocs)}$$
$$y^{(r+1)} = \mathcal{L} \ y^{(r)} + h_2 \quad \text{(Gauss-Seidel par blocs)}$$

où J *et* $\mathcal{L}$ *sont deux matrices dans* $\mathcal{M}_n$, *indépendantes de* r, *qu'on explicitera en fonction de* L *et* U, *et où* h_1 *et* h_2 *sont deux vecteurs de* $\mathbf{R}^n$, *indépendants de* r, *qu'on explicitera également.*

Q 22 *Démontrer que, si* $\rho(\mathrm{S(J)}) < 1$:

1. *Le système linéaire* $\mathrm{A}x = b$ *admet une solution unique* x *dans* $\mathbf{R}^n$;
2. *La méthode de Jacobi par blocs considérée produit une suite qui converge vers cette solution, quel que soit le vecteur* $x^{(0)}$ *de départ;*
3. *La méthode de Gauss-Seidel par blocs considérée produit une suite qui converge vers cette solution, quel que soit le vecteur* $y^{(0)}$ *de départ.*

Q 23 *Démontrer que l'on peut étendre intégralement l'étude faite à la section (VII) au cas de la norme vectorielle p définie à la section (VI).*

Formuler ces résultats plus généraux; démontrer alors que l'étude faite ci-dessus en **Q 21** *et* **Q 22** *en est cas particulier pour une application affine de* $\mathbf{R}^n$ *dans* $\mathbf{R}^n$.

RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE NUMERIQUE

Le problème concernait l'étude et l'utilisation (pour des questions d'analyse numérique) de la notion de norme vectorielle : sur un espace vectoriel X, une norme vectorielle de taille k est une norme à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ (ordonné composante à composante pour l'inégalité triangulaire). L'étude proposée était relativement "simple", avec quelques questions plus difficiles. L'épaisseur des copies (15, 30 pages...) montre que la quasi totalité des candidats a pu fournir une prose abondante. La longueur apparente du problème correspondait en fait à une démarche très détaillée par l'énoncé.

On a trouvé : peu de copies totalement nulles, une grande mane de copies médiocres, un lot assez important de copies acceptables et pas mal de copies bonnes ou très bonnes. Les questions posées et le barème adopté ont permis un classement clairement satisfaisant, qui s'est révélé, à la délibération, très corrélé avec celui des deux autres épreuves.

Les six premières questions, élémentaires, ont été dans l'ensemble bien traitées, et en tous cas étudiées par la quasi totalité des candidats. Elles permettaient de voir que munir X d'une norme vectorielle p de taille k n'est pas autre chose que le munir de la topologie séparée définie par k semi-normes (les composantes p_i de p). Cette topologie est équivalente à celle d'une norme notée φ dans le texte.

De **Q7** à **Q14**, on utilisait la notion introduite pour l'étude de l'existence, de l'unicité, et de la construction algorithmique du point fixe (appelé souvent "point double" dans les copies..) de certains opérateurs sur X : à partir de la notion de contraction en norme vectorielle (la constante de contraction usuelle est ici remplacée par une matrice K, non-négative et de rayon spectral ρ (K) $<$ 1) il s'agissait exactement de retranscrire, en **Q7**, la démonstration du théorème usuel du point fixe pour un opérateur contractant F.

Un lot bien trop important de copies commence à trébucher à ce niveau : confusion dans la notion de suite de Cauchy (!) qu'on ramène très souvent, de façon explicite ou plus dissimulée, à la suivante : "la distance de deux éléments successifs tend vers 0". D'autre part lorsque $x_{2+1} = F(x_r)$ $(r \in \mathbb{N}\,,\ x_r \in X)$, et que x_r converge vers x dans X, il paraît évident à beaucoup trop de candidats que $x = F(x)$ "d'après le principe de prolongement des égalités". Peu de copies estiment nécessaire de démontrer cette conclusion, et parmi celles qui y pensent, beaucoup se livrent à des développements touffus : trop peu signalent que, F étant contractant, est nécessairement continu ... ce qui suffisait.

L'illustration, en **Q10** et **Q11**, de cette première étude sur deux exemples simples pris dans le contexte des exemples de normes vectorielles donnés en **Q6**, permet de bien distinguer les copies dont les auteurs savent ce qu'ils font et où ils vont : ces copies-là mettent bien en évidence que la contraction en norme vectorielle est, pour le même résultat, une notion moins impérative que la contraction "scalaire" obtenue en utilisant la norme φ.

De **Q12** à **Q14** était demandée une étude, purement algébrique, de la structure en sous-espaces vectoriels définie par une norme vectorielle sur $\mathbb{R}^n$. La plupart des copies ignorent une caractérisation correcte du fait que k sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ admettent une somme directe : on se contente très souvent de vérifier que ces sous-espaces sont deux à deux d'intersection réduite à zéro (on les appelle alors "disjoints"...). **Q13**, exercice de construction de ces sous-espaces sur 2 exemples, a été généralement bien traité, de même que **Q14** qui était une question importante et jugée assez difficile : malgré la réserve ci-dessus, il semble que les questions à caractère algébrique soient mieux traitées par l'ensemble des candidats :

de **Q15** à **Q18** on construisait, à partir d'une norme vectorielle ρ régulière sur $\mathbb{R}^n$, la norme vectorielle d'opérateur linéaire correspondante : toute matrice T (n,n) est alors décomposée en blocs et la norme vectorielle S(T) construite s'obtient en remplaçant chaque bloc de T par sa norme (scalaire). Par cette construction on retrouvait, en **Q18**, pour le cas d'opérateurs affines sur $\mathbb{R}^n$ $[F(x) = Tx + h]$ le résultat de **Q7** : car dans ce cas la contraction de F est caractérisée par la condition $\rho(S(T)) < 1$: très peu de candidats traitent correctement cette question, qui donne lieu à de grosses confusions.

On revenait ensuite, pour la simplicité des notations, à la norme vectorielle type sur $\mathbb{R}^n$, et (en **Q19** et **Q20**) on considérait un opérateur F, non nécessairement linéaire, contractant sur $\mathbb{R}^n$: il s'agissait alors de voir que non seulement la méthode des approximations successives, mais aussi la méthode non linéaire de Gauss-Seidel, converge vers l'unique point fixe de F. C'est l'extension de ce résultat au cas d'une norme vectorielle régulière plus générale (correspondant alors à des méthodes par blocs) qui sera demandée en **Q23**.

En **Q19** beaucoup trop de copies se bornent à montrer que l'unique point fixe de F est point fixe de G sans penser à la réciproque. En **Q20** (question jugée difficile) une bonne quinzaine de copies parvient correctement au résultat : voici la démarche (cf les notations de l'énoncé) $|F(x) - F(y)| \leqslant K|x - y|$ d'où d'après la définition de G (opérateur non linéaire de Gauss-Seidel attaché à F) et la décomposition donnée de K en L + U :

$$|G(x) - G(y)| \leqslant L\,|G(x) - G(y)| + U(x - y)$$

d'où $$|G(x) - G(y)| \leqslant (I - L)^{-1}\,U\,|x - y|$$

or $$\rho\,[(I - L)^{-1}\,U] \leqslant \rho\,(L + U) = \rho\,(K) < 1$$ d'après le théorème de Stein-Rosenberg, donné dans l'énoncé (proposition 3).

Les copies qui parviennent à ce niveau le font dans l'aisance et la solidité : les questions difficiles, lorsqu'elles sont traitées, le sont bien mieux que les questions simples, qui donnent lieu à de nombreuses rédactions floues, approximatives, pénibles.

En **Q21** était demandé d'établir le formalisme matriciel des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel par blocs pour le cas linéaire, en **Q22** de démontrer la convergence de ces méthodes sous l'hypothèse de contraction de l'opérateur correspondant de Jacobi.

Enfin, en **Q23** on demandait une synthèse du problème : précisément, d'étendre au cas non linéaire le résultat de **Q22**, généralisant la démonstration demandée en **Q20** et rappelée ci-dessus. Une quinzaine de copies brillantes parviennent à cette synthèse, sans toutefois formuler l'énoncé demandé. Ce sont les meilleures copies, qui, ayant dominé l'ensemble du problème, proposent une rédaction claire, concise, sûre, et de lecture intéressante.

Pour terminer, citons les erreurs les plus grosses, rencontrées de façon systématique dans un trop grand nombre de copies :

a) formalisme matriciel : si $u \in \mathbb{R}^k$ et M est une matrice (k,k) on écrit, sous différentes formes :

$$\frac{1}{u}\ ;\ u\mathrm{M} \text{ au lieu de } \mathrm{M}u\ ;\ \frac{1}{\mathrm{I} - \mathrm{M}} \text{ pour } (\mathrm{I} - \mathrm{M})^{-1}$$

On croit que $\mathrm{M}u \leqslant u$ entraîne $\mathrm{M} \leqslant \mathrm{I}$; que si u n'est pas $\geqslant 0$ (composantes à composantes) ni nul, il est < 0. Ou encore que u est > 0 dès qu'il est $\geqslant 0$ et $\neq 0$. On croit que si une matrice A est $\geqslant 0$ et de rayon spectral plus petit que 1, elle est majorée par la matrice "pleine de 1"...

b) analyse : suite de Cauchy dans un espace vectoriel ; $x^{r+1} - x^r$ tend vers 0 ou variantes équivalentes ; "il existe des suites de fonctions continues qui convergent, au sens de la convergence uniforme vers une fonction discontinue sur $[0,1]$".

Notions de continuité, de limite mal assimilées, utilisées de façon fondamentalement erronée. On parle de la topologie de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^n$. Un raisonnement pernicieux :

$$\left.\begin{array}{l} x^r - F(x^r) \text{ tend vers } 0 \\ x^r \text{ tend vers } x \end{array}\right\} \quad \text{"donc"} F(x^r) \text{ tend vers } F(x)$$

c) algèbre : soient $W_1 \ldots W_k$ k sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.
Voici (au dire de beaucoup) différentes CNS pour que leur somme algébrique soit directe :

$$W_i \cap W_j = \{0\} \ (i \neq j) \ ; \quad W_i \cap [\bigcup_{j \neq i} W_j] = \{0\} \quad i \in (1,2\ldots k) \ ;$$

$$W_i \cap [\bigcap_{j \neq i} W_j] = \{0\} \quad i \in (1,2\ldots k) \ !$$

$$W_i \cap W_{i+1} = \{0\} \quad i = 1,2\ldots k-1$$

$$\bigcap_{j \in 1,2..k} W_j = \{0\}$$

ou encore : "Pour que k sous-espaces admettent une somme directe, il faut et il suffit qu'ils soient 2 à 2 distincts"

Autre erreur grave : si $x \in V \oplus W$, et si $x \notin V$ alors $x \in W$.

d) confusion entre un vecteur et sa norme, une matrice et sa norme $T \leqslant s(T)$

e) Calcul numérique : même élémentaire, il rebute. Très peu évitent l'erreur de calcul grossière. Visiblement un calcul numérique fait peur:... "mais ceci nécessiterait de calculer $(I - M)^{-1}$" (dans l'exemple, M est une matrice (2,2)...).

f) l'inégalité $|\sin a - \sin b| \leqslant |a - b|$ fait trébucher beaucoup de candidates ; on écrit que, dans $\mathbb{R}^3$, l'équation $|x_1| + |x_2| = 0$ "est celle d'un hyperplan".

Enfin, citons à propos de la question **Q9**, la plus énorme bêtise commise dans ce problème :

$$F(x) = F(x_1, x_2) = \left| \begin{array}{l} 0,4 \sin x_1 + 0,2 \cos x_2 \\ 0,8 \cos x_1 + 0,4 \sin x_2 \end{array} \right. = \begin{pmatrix} 0,4 \sin & 0,2 \cos \\ 0,8 \cos & 0,4 \sin \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Mx$$

$$\text{d'où} \quad F(x) - F(y) = Mx - My = M(x - y)$$

il s'agit donc d'un principe nouveau de linéarisation.

L'auteur continue, en calculant ensuite $(I - M)^{-1}$, utilisant pour cela :

$$\det (I - M) = (1 - 0,4 \sin)^2 - (0,4 \cos)^2 = \text{etc.}$$

Répartition des notes (entre 0 et 40)

Agrégation masculine (510 copies)

n ⩽ 4	4 < n ⩽ 9	9 < n ⩽ 14	14 < n ⩽ 19	19 < n ⩽ 24	24 < n ⩽ 29	29 < n ⩽ 34	34 < n
66	124	130	110	38	28	12	2

Agrégation féminine (282 copies ; moyenne 11,83/40)

n ⩽ 4	4 < n ⩽ 9	9 < n ⩽ 14	14 < n ⩽ 19	19 < n ⩽ 24	24 < n ⩽ 29	29 < n ⩽ 34	34 < n
36	70	98	41	22	7	3	5